УДК 531.3

М. М. Кабальский

Обратная задача вариационного исчисления, ее применение для интегрирования обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

Установлены необходимые и достаточные условия существования функционала для сильно нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в обыкновенных производных. Решена задача Коши.

Метод интегрирования иллюстрируется решением задач теоретической механики, теории относительности, квазилинейных колебаний, сопротивления материалов.

Встановлені необхідні і достатні умови існування функціоналу для сильно нелінійного диференціального рівняння другого порядку в звичайних похідних. Розв'язана задача Коші. Метод інтегрування ілюструється розв'язанням задач теоретичної механіки, теорії відносності, квазілінійних коливань, опору матеріалів.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varphi(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

где $y' = z$, $y'' = t$.

Предполагается, что уравнение (1) разрешимо относительно t. В случае многозначного решения рассматривается одна из ветвей

$$\varphi(x, y, z, t) = \theta(x, y, z) + \psi(x, y, z)\, t = 0. \tag{2}$$

Следовательно, здесь исследуется сильно-нелинейное относительно y и z дифференциальное уравнение (1), для которого

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 = 0. \tag{3}$$

Еще Эйлером замечено, что законы природы формулируются в виде вариационных принципов, указывается функционал

$$\mathfrak{J}(x, y, z) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z)\, dx, \tag{4}$$

минимизация которого воспроизводит решение дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа, определяющего ход физического явления.

Под обратной задачей вариационного исчисления понимаем построение функционала (4) по наперед заданному дифференциальному уравнению (2) таким образом, чтобы оно совпадало с уравнением Эйлера — Лагранжа, а именно:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} z - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} t = \varphi(x, y, z, t). \tag{5}$$

2. Учитывая, что подынтегральная функция функционала (4) не содержит t, из (2) и (5) устанавливаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\psi(x, y, z). \tag{6}$$

Введем вспомагательную функцию

$$\iint \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} t\right) dz^2 + z \iint \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} dz^2 = \Xi. \tag{7}$$

Обратная задача вариационного исчисления имеет точное решение, когда выполняются требования следующей теоремы.

Теорема 1. *Если для дифференциального уравнения* (2) *существует функционал в форме* (4), *то для этого необходимо и достаточно, чтобы* *выполнялось условие*

$$\partial(\varphi - \Xi)/\partial z = 0, \tag{8}$$

причем

$$d\psi/dx = \partial\Xi/\partial z. \tag{9}$$

Доказательство. Из (6) следует

$$f(x, y, z) = -\iint \psi(x, y, z)\, dz^2 + X(x, y)\, z + X_1(x, y). \tag{10}$$

Функции $X(x, y)$ и $X_1(x, y)$ определяются таким образом, чтобы удовлетворялось (5). Учитывая (7), после подстановки (10) в (5) находим, что между функциями X и X_1 существует связь

$$\partial X_1/\partial y - \partial X/\partial x = \varphi - \Xi. \tag{11}$$

После дифференцирования левой и правой части (11) по z получаем

$$\partial\varphi/\partial z = \partial\Xi/\partial z = \partial\psi/\partial x + z\,\partial\psi/\partial y + t\,\partial\psi/\partial z = d\psi/dx, \tag{12}$$

что и требовалось доказать.

Учитывая (11) заключаем, что X и X_1 выражаются одна через другую. Вычислив из уравнения (5)

$$\varphi - \Xi = Y(x, y) \tag{13}$$

и предположив, что

$$\partial X_1/\partial y = H(x, y), \tag{14}$$

$$X(x, y) = \int H(x, y)\, dx + \xi(y) + \int Y(x, y)\, dx,$$

$$X_1(x, y) = \int H(x, y)\, dy + \eta(x). \tag{15}$$

После подстановки (11) в (4) приходим к интегралу

$$\int_{x_0}^{x_1} \left\{ z \left[\int H(x, y)\, dx + \xi(y) \right] - \int H(x, y)\, dy - \eta(x) \right\} dx = \int_{x_0}^{x_1} dU, \tag{16}$$

подынтегральная функция которого является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, а поэтому он при постоянных пределах интегрирования не зависит от допустимых кривых сравнения, т. е функция $H(x, y)$ не влияет на функционал (4).

Таким образом, установлено, что если уравнение (2) имеет структуру

$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, t + f_1(x, y, z) + Y(x, y), \tag{17}$$

где

$$f_1(x, y, z) = \int \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + z\,\frac{\partial\psi}{\partial y} \right) dz \tag{18}$$

то ему соответствует подынтегральная функция функционала

$$f(x, y, z) = -\iint \psi(x, y, z)\, dz^2 + \int Y(x, y)\, dy. \tag{19}$$

Если же дифференциальное уравнение (2) имеет вид

$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, t + \theta(x, z) + z f_2(x, y) + f_1(x, y), \tag{20}$$

то его функционал определяется подынтегральной функцией

$$f(x, y, z) = -\iint \psi(x, y, z)\, dz^2 - \int \left[\int \theta(x, z)\, dz \right] dx + \int Y(x, y)\, dy. \tag{21}$$

Если дифференциальное уравнение (2) содержит функцию

$$\varphi(x, y, z, t) = g(x, y) + z f(x, y) + \theta_1(x, z) +$$
$$+ \theta_2(x, y, z) + \psi(x, y, z)\, t, \tag{22}$$

не совпадающую с $f_1(x, y, z)$, то для него непосредственно нельзя составить подынтегральную функцию функционала, поскольку нарушаются необходимые и достаточные условия для его построения.

3. Обратную вариационную задачу для уравнений типа (22) решим двумя способами.

а). Функцию $\xi(x, y, z)$ назовем интегрирующим множителем, если с ее помощью уравнение (22) превращается в уравнение Эйлера

$$\xi(x, y, z)\,\varphi(x, y, z, t) = \varphi_1(x, y, z, t). \tag{23}$$

Введем вспомогательные функции

$$\xi\psi = \chi, \ \gamma = \psi/\theta. \tag{24}$$

Следуя (8), находим

$$\gamma\left(\frac{\partial\chi}{\partial x} + z\frac{\partial\chi}{\partial y}\right) - \frac{\partial\chi}{\partial z} + \frac{\chi}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0. \tag{25}$$

Интегрируя (25) — линейное дифференциальное уравнение в частных производных, получаем

$$\chi = \Phi(x, y, z), \tag{26}$$

а из (24) — искомую функцию $\xi(x, y, z)$.

б). Уравнение (22) заменим приближенным, что предоставит возможность изучать физические процессы с помощью математических моделей, описываемых энергетическими методами. Предположим, что задача Коши для уравнения (22) решается при стандартных начальных условиях

$$x_0 = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 1, \text{ т. е. в окрестности точки } P(0, 0, 1). \tag{27}$$

Л е м м а. *Функция $K(x, y, z)$, в которой y является решением дифференциального уравнения* (2), *причем $y \in C^{(n)}$ в окрестности точки P, аппроксимируется суммами*

$$K(x, y, z) = \sum_{j=0}^{n} A_{jP}\cdot x^j, \text{ либо } K(x, y, z) = B_0 + y\sum_{s=0}^{n} A_{jP}\cdot x^s, \tag{28}$$

где

$$A_{0P} = K(0, 0, 1),\ A_{jP} = \frac{1}{j!}\left(\frac{d^jK}{dx^j}\right),\ j = \overline{1, n}. \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что найдены решение уравнения (2) и его производные, а именно

$$y = \bar{y},\ y' = \bar{z}, \ldots,\ y^{(n)} = \bar{z}^{n-1}. \tag{30}$$

Тогда достаточно приравнять значения производных от левой и правой частей (28), вычислив их значения в точке P.

Выделим теперь из уравнения (22) члены, нарушающие условие (8). Например,

$$K(x, y, z) = zf(x, y) + \theta_1(x, z) + \theta_2(x, y, z). \tag{31}$$

Заменим эту функцию суммой ряда Маклорена вида (28). Тогда уравнение (22) переходит в следующее:

$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\,t + \sum_{j=0}^{n} A_{jP}\cdot x^j + Y(x, y), \tag{32}$$

а соответствующая подынтегральная функция функционала имеет вид

$$f(x, y, z) = -\iint \psi(x, y, z)\,dz^2 + \int\left[\sum_{j=0}^{n} A_{jP}\cdot x^j + Y(x, y)\right]dy. \tag{33}$$

Рассмотрим случай, когда задаются начальные условия

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0; \quad x = x_1,\ y(x_1) = y_1, \tag{34}$$

т. е. отсутствует значение первой производной в начальной точке.

Задача построения подынтегральной функции функционала решается приближенно. Предположим, что

$$\varphi = \theta(x, y, z) + K(x, y, z) + \psi(x, y, z)\, t = 0 \qquad (35)$$

и $\theta(x, y, z)$ удовлетворяет необходмым и достаточным условиям (8) для замены эквивалентным уравнением Эйлера, а $K(x, y, z)$ их нарушает.

Введем вспомогательную функцию $K_1(x, y, z)$:

$$K(x, y, z) = \alpha K_1(x, y, z), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \qquad (36)$$

При $\alpha = 0$ уравнению (35) поставим в соответствие функционал

$$\mathfrak{J} = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x, y, z)\, dx. \qquad (37)$$

Минимизируя (37), находим

$$y_1 = \eta_1(x), \qquad (38)$$

$$\eta_1'(x_0) = v_1. \qquad (39)$$

Учитывая (39), приходим к уже рассмотренной задаче Коши в обычной постановке. В окрестности точки $P(x_0, y_0, v_1)$, принадлежащей экстремале, заменим функцию $K(x, y, z)$ суммой на основании (28).

С помощью (19) получим новую экстремаль и производное число

$$y_2 = \eta_2(x), \quad \eta_2'(x_0) = v_2. \qquad (40)$$

По новым начальным значениям строим новую сумму разложения

$$K(x, y, z) = \left(\sum_{j=0}^{n} A_{2j} x^j\right) y. \qquad (41)$$

Используя этот алгоритм, после k шагов получаем

$$\eta_k'(x_0) = v_k. \qquad (42)$$

Если

$$|y - \eta_k(x)| < \varepsilon, \quad x_0 < x < x_1, \qquad (43)$$

для сколь угодно малого положительного ε, то $\eta_k(x)$ является решением исходного дифференциального уравнения.

4. Построение функционалов.

Дифференциальное уравнение	Подынтегральная функция функционала
Уравнение динамики точки $my'' + R(x, y) = 0$	$f = -\dfrac{mz^2}{2} + \int R(x, y)\, dy \qquad (44)$
для потенциальных сил, $R = -\partial \Pi / \partial y$	$f = T - \Pi$ (лагранжиан)
Уравнение релятивистской механики $\dfrac{d}{dx}\dfrac{m_0 z}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2}} = V(x, y)$	$f = m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{z}{c}\right)^2} - \int V dy, \qquad (45)$
m_0 — масса материальной точки в состоянии покоя, c — скорость света, $V(x, y)$ — внешняя приложенная сила.	
Уравнение изогнутой оси бруса $\dfrac{d^2 w}{dx^2} = \dfrac{M(x)}{EJ(x)}\left[1+\left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2\right]^{3/2}$	$f = -\sqrt{1+\left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2} + \dfrac{M(x)}{EJ(x)} w, \qquad (46)$

$M(x)$ — изгибающий момент в сечении на расстоянии x от опоры, $E(x)$ — модуль упругости, $J(x)$ — момент инерции сечения относительно нейтральной оси, w — прогиб оси балки.

$$\ddot{\varphi} \pm k\theta(\dot{\varphi}) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad f = -\frac{z^2}{2} \mp k\int\left[\int\theta(z)\,dz\right]dx - \frac{g}{l}\cos\varphi. \tag{47}$$

Обобщенное уравнение движения математического маятника в среде с силой сопротивления, момент которой относительно точки подвеса $L_0(P) = \pm k\theta(\dot{\varphi})$, $\theta(\dot{\varphi})$ — интегрируемая функция, k — постоянная.

$$\frac{d}{dt}\left[ml(t)\frac{dx}{dt}\right] - mgl(t)x = 0 \qquad f = -\frac{ml(x)}{2}z^2 + mgl(x)\frac{y^2}{2}, \tag{48}$$

где $t = x$, $x = y$, $\frac{dx}{dt} = z$.

Уравнение движения маятника с переменной длиной до точки подвеса.

Уравнение Матье-Хилла

$$y'' + \left(\theta_0 + 2\sum_{r=1}^{n}\theta_{2r}\cos 2rx\right)y = 0, \qquad f = -\frac{z^2}{2} + \left(\theta_0 + \sum_{r=1}^{n}\theta_{2r}\cos 2rx\right)\frac{y^2}{2} \tag{49}$$

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $y(0) = 0$; $y'(0) = \omega$.

Уравнение Дюфинга

$$y'' + \omega^2 y = -y^3 \qquad f = -\frac{z^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4}. \tag{50}$$

при $x = 0$, $y(0) = y_0$; $y'(0) = z_0$.

Изучение колебаний приводит к приближенному уравнению

$$y'' + \lambda\left(\omega^2 + \sum_{j=0}^{n}A_j x^j\right)\cdot y = 0, \qquad f = -\frac{z^2}{2} + \frac{K(x)}{2}y^2; \quad K(x) = \omega^2 + \sum_{j=0}^{n}A_j x^j \tag{51}$$

A_j — коэффициенты разложения функции y^3 в обобщенный ряд Маклорена.

5. Система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dy_1/dx &= a_{11}(x)\cdot y_1 + a_{12}(x)\cdot y_2 + a_{13}(x), \\ dy_2/dx &= a_{21}(x)\cdot y_1 + a_{22}(x)\cdot y_2 + a_{23}(x), \end{aligned} \quad a_{12}(x) \neq 0, \tag{52}$$

путем исключения y_2 преобразуется в дифференциальное уравнение второго порядка типа (20) относительно функции y_1. Полученному уравнению соответствует подынтегральная функция функционала (21), минимизируя который, находим $y_1 = y_1(x)$. Вторая функция y_2 определяется путем введения в ее выражение найденного значения y_1.

6. Минимизация функционалов. Минимизируя функционал (4), находим уравнение экстремали

$$y = \bar{y}(x, C_1, C_2), \tag{53}$$

в котором постоянные интегрирования G_1 и G_2 определяются из начальных и граничных условий. Минимизация построенных здесь функционалов производится по методу Ритца. Метод Ритца обоснован многими исследователями, даны доказательства существования решения уравнения Эйлера, указаны оценки погрешности, возникающей в результате отклонения рассматриваемых приближений от точного решения соответствующего дифференциального уравнения [2]. Следует отметить, что наличие вариационной формулировки задачи позволяет строить разностные модели этой задачи, решение которых реализуется на ЭВМ [3].

Отметим еще, что минимизируя функционал суммой $\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$, где φ_k — система фундаментальных функций, удовлетворяющих начальным и граничным условиям, в котором y и z входят во второй степени, как, например, в (46), (52), определение характеристических чисел и коэффициентов a_{ik} сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений.

В случаях, когда y и z содержатся в подынтегральной функции функционала в степенях выше второй, задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Метод решения таких систем изложен в монографии [1].

1. *Кабальский М. М.* Новые методы высшей алгебры: В 2-х т.— Киев, 1982.— Деп. в ВИНИТИ, № 1140, № 1141.
2. *Крылов Н. М.* Sur la solution approcheé des problemes...//Изв. АН СССР.— 1929.—№ 5.— С. 3—11.
3. *Молчанов И. Н.* Машинные методы решения прикладных задач // Дифференц. уравнения.— Киев : Наук. думка, 1988.— 343 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 25.04.89