УДК 517.956.4

*С. Д. Ивасишен*

# Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем

Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых классические решения $\vec{2b}$-параболических систем, определенные в полуоткрытом слое, представимы в виде интегралов Пуассона функций или обобщенных борелевских мер из специальных пространств $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \leqslant \infty$, или $M^{k(0,a)}$. Выяснено, в каком смысле решения, представимые интегралами Пуассона, удовлетворяют начальным условиям.

Знайдені необхідні та достатні умови, при виконанні яких класичні розв'язки $\vec{2b}$-параболічних систем, що визначені в напіввідкритому шарі, зображаються у вигляді інтегралів Пуассона функцій чи узагальнених борельових мір із спеціальних просторів $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \leqslant \infty$, чи $M^{k(0,a)}$. З'ясовано, в якому значенні розв'язки, котрі зображаються інтегралами Пуассона, задовольняють початкові умови.

Вопросам интегрального представления классических решений параболических по Петровскому уравнений и систем посвящены многие работы (см. [1—3] и имеющуюся там библиографию). Однако в этих работах достаточные условия, налагаемые на решения, не всегда совпадают с необходимыми. В настоящей статье для параболических систем, более общих чем системы, параболические по Петровскому, найдены необходимые и достаточные условия, при которых решения, определенные в полуоткрытом слое, представимы в виде интегралов Пуассона некоторых функций или обобщенных борелевских мер. Совокупности этих функций или мер являются множествами начальных значений исследуемых решений. Рассматриваемые здесь параболические системы определены С. Д. Эйдельманом [1, 2] и называются $\vec{2b}$-параболическими. Излагаемые ниже результаты анонсированны в [4].

1. Пусть $n, b_1, \ldots, b_n, N$ — заданные натуральные числа; $\vec{2b} = (2b_1, \ldots, 2b_n)$, $\beta_j = (2b_j)^{-1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$, $|k\beta| = k_1\beta_1 + \ldots + k_n\beta_n$, если $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс;

$$\Phi_c(t, x; \tau, \xi) = \exp\left\{-c \sum_{j=1}^{n} (t-\tau)^{1-q_j} |x_j - \xi_j|^{q_j}\right\},$$

где $0 \leqslant \tau < t$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $c > 0$, $q_j = \dfrac{2b_j}{2b_j - 1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$; $\Pi = (0, T] \times \mathbb{R}^n$ — слой в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $T$ — заданное положительное число, $\overline{\Pi}$ — замыкание $\Pi$; $\mathbb{C}^{NN}$ и $\mathbb{C}^N$ — совокупности соответственно всех квадратных матриц $M = (m_{ij})_{i,j=1}^N$ порядка $N$ и всех столбцов $S = (s_i)_{i=1}^N$ высоты $N$, элементы которых являются комплексными числами; $|M| = \max\{|m_{ij}| \mid 1 \leqslant i, j \leqslant N\}$, $|S| = \left(\sum_{i=1}^{N} |s_i|^2\right)^{1/2}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$D_t^1 u = \sum_{|k\beta| \leqslant 1} a_k(t, x) D_x^k u, \ (t, x) \in \overline{\Pi}, \tag{1}$$

где $a_k : \overline{\Pi} \to \mathbb{C}^{NN}$, $|k\beta| \leqslant 1$, $u : \Pi \to \mathbb{C}^N$. Предположим, что выполняются следующие условия:

а) система (1) равномерно $\overrightarrow{2b}$-параболическая в слое $\overline{\Pi}$, т. е. $\lambda$-корни уравнения

$$\det\Big(\sum_{|k\beta|=1} a_k(t, x)(i\sigma)^k - \lambda I\Big) = 0,$$

где $i$ — мнимая единица, $I$ — единичная матрица порядка $N$, удовлетворяют условию

$$\exists \delta > 0, \ \forall \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall (t, x) \in \overline{\Pi} : \operatorname{Re} \lambda \leqslant -\delta(\sigma_1^{2b_1} + \ldots + \sigma_n^{2b_n});$$

б) коэффициенты $a_k$, $|k\beta| \leqslant 1$, непрерывны по $t$ на $[0, T]$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$, причем непрерывность $a_k$, $|k\beta| = 1$, равномерна по $x \in \mathbb{R}^n$; все коэффициенты ограничены на $\overline{\Pi}$ и удовлетворяют условию Гельдера по $x$ в $\mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in [0, T]$;

в) существует система, сопряженная по Лагранжу с системой (1), и ее коэффициенты удовлетворяют условию б).

Как доказано в [2], при выполнении условий а) и б) существует фундаментальная матрица решений $Z$ задачи Коши для системы (1), для которой справедливы оценки

$$|D_t^{k_0} D_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-|\beta|-k_0-|k\beta|} \Phi_c(t, x; \tau, \xi), \ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$
$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ k_0 + |k\beta| \leqslant 1, \ C > 0, \ c > 0. \tag{2}$$

Если же выполнены условия а) и в), то существует фундаментальная матрица решений $Z^*$ задачи Коши для сопряженной системы и имеет место равенство

$$Z^*(\tau, \xi; t, x) = \overline{Z'}(t, x; \tau, \xi), \ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование, а черта — комплексное сопряжение.

2. Определим используемые нормы и пространства. Пусть $c_0, a_1, \ldots, a_n$ и $T_0$ — фиксированные числа такие, что $0 < c_0 < c$, $a_j \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $T_0 \in (0, T]$, $T_0 < \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} (c_0/a_j)^{2b_j - 1}$, где $c$ — постоянная из оценок (2); $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $\Pi_0 = (0, T_0] \times \mathbb{R}^n$. Введем функции

$$k_j(t, a_j) = c_0 a_j / (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{q_j-1}, \ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$k(t, a) = (k_1(t, a_1), \ldots, k_n(t, a_n)),$$

$$\Psi_\alpha(t, a, x) = \exp\Big\{-\alpha \sum_{j=1}^n k_j(t, a_j) |x_j|^{q_j}\Big\}, \ t \in [0, T_0], \ x \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Эти функции обладают следующими свойствами [1,2]:

$$k_j(t-\tau, k_j(\tau, a_j)) = k_j(t, a_j), \ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\Phi_{c_0}(t, x; \tau, \xi) \Psi_{-1}(\tau, a, \xi) \leqslant \Psi_{-1}(t, a, x), \ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T_0, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Пусть $u : \overline{\Pi}_0 \to \mathbb{C}^N$ — заданная функция, измеримая в смысле Лебега по $x$ при каждом $t \in [0, T_0]$. Для $t \in [0, T_0]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ определим нормы

$$\| u(t, \cdot)\|_p^{k(t,a)} = \| \Psi_1(t, a, \cdot) u(t, \cdot)\|_{L_p^{n,N}},$$

где $L_p^{n,N}$ — лебегово пространство $L_p$ функций, определенных на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{C}^N$. Обозначим через $L_p^{k(0,a)}$ пространство всех измеримых по Лебегу функций $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^N$, для которых конечна норма $\|\varphi\|_p^{k(0,a)}$.

Пусть $\mathscr{B}_n$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^n$, а $M^{n,N}$ — совокупность всех счетно аддитивных функций $\nu:\mathscr{B}_n\to\mathbb{C}^N$ (обобщенных борелевских мер $\nu$), имеющих конечную полную вариацию $|\nu|$ $(\mathbb{R}^n)$. Если для $\nu$ ввести норму по формуле $\|\nu\|=|\nu|(\mathbb{R}^n)$, то $M^{n,N}$ становится банаховым пространством, которое можно отождествить с пространством, сопряженным к пространству $C_0^{n,N}$ всех таких непрерывных функций $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^N$, что $|\psi(x)|\to 0$ при $|x|\to\infty$ с равномерной нормой. Через $M^{k(0,a)}$ обозначим совокупность всех обобщенных борелевских мер $\mu:\mathscr{B}_n\to\mathbb{C}^N$, удовлетворяющих такому условию: функция

$$\nu(A)=\int\limits_A \Psi_1(0,a,x)\,d\mu(x),\quad A\in\mathscr{B}_n,$$

принадлежит пространству $M^{n,N}$ При этом для любой $\mu\in M^{k(0,a)}$

$$\|\mu\|^{k(0,a)}=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Psi_1(0,a,x)\,d|\mu|(x)<\infty.$$

**3.** Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. 1°. *Пусть* $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. *Тогда функция*

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_0, \tag{5}$$

*является единственным решением системы* (1) *в* $\Pi_0$, *удовлетворяющим условиям*:

1) *существует постоянная* $C>0$, *не зависящая от* $\varphi$ *и такая, что*

$$\forall t\in(0,T_0]:\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\leqslant C\|\varphi\|_p^{k(0,a)};$$

2) *при* $1\leqslant p<\infty$ $\lim\limits_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{k(t,a)}=0$, а при $p=\infty$

$$\forall\psi\in L_1^{-k(T_0,a)}:\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)\,u(t,x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $L_1^{-k(T_0,a)}$ — множество всех измеримых по Лебегу функций $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^N$, для которых конечна норма

$$\|\Psi_{-1}(T_0,a,\cdot)\,\psi(\cdot)\|_{L_1^{n,N}}.$$

2°. Если $\mu\in M^{k(0,a)}$, то формулой

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi),\quad (t,x)\in\Pi_0, \tag{6}$$

определяется единственное решение системы (1) в $\Pi_0$, которое удовлетворяет условиям:

1) существует такая не зависящая от $\mu$ постоянная $C>0$, что

$$\forall t\in(0,T_0]:\|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)}\leqslant C\|\mu\|^{k(0,a)};$$

2) $$\forall\psi\in C_0^{-k(T_0,a)}:\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)\,u(t,x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi'(x)\,d\mu(x),$$

где $C_0^{-k(T_0,a)}$ — множество всех таких непрерывных функций $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^N$ что $\Psi_{-1}(T_0,a,x)|\psi(x)|\to 0$ при $|x|\to\infty$

Т е о р е м а 2. *Пусть $u$ — решение системы* (1) *в* $\Pi_0$, *удовлетворяющее условию*

$$\forall t \in (0, T_0] : \| u(t, \cdot) \|_p^{k(t,a)} \leqslant C \tag{7}$$

*с некоторыми* $C > 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $1 < p \leqslant \infty$ *существует единственная функция* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, *а при* $p = 1$ — *единственная обобщенная мера* $\mu \in M^{k(0,a)}$ *такие, что решение $u$ представимо соответственно в виде* (5) *и* (6).

С л е д с т в и е. Множества $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \leqslant \infty$, и $M^{k(0,a)}$ являются множествами начальных значений классических решений системы (1) тогда и только тогда, когда решения удовлетворяют условию (7) при $1 < p \leqslant \infty$ и $p = 1$ соответственно.

4. Поскольку теорема 1 доказывается весьма громоздко и при этом используется в основном известная методика из [1, 2], то наметим лишь схему доказательства этой теоремы.

То, что функции (5) и (6) являются решениями системы (1), непосредственно следует из свойств фундаментальной матрицы решений $Z$. Доказательство того, что эти функции удовлетворяют условиям 1, проводится аналогично доказательству леммы 1.3 из [1]. При доказательстве утверждений 2 используется методика рассуждений из [1, § 1 гл. 3] и изученная в [2] структура матрицы $Z$.

Чтобы убедиться в том, что формулы (5) и (6) определяют единственные решения системы (1), удовлетворяющие условиям 1 и 2, достаточно доказать, что всякое решение системы (1), удовлетворяющее неравенству (7) и условиям 2, в которых $\varphi$ и $\mu$ принадлежат соответственно пространствам $L_p^{k(0,a)}$ и $M^{k(0,a)}$, представимо в виде (5) и (6) соответственно. Это доказывается так же, как свойство 3 из §3 гл. 1 [2].

5. Докажем теорему 2. Пусть сначала $1 < p \leqslant \infty$. Из условия (7) следует, что последовательность функций

$$\{\Psi_1 (1/\nu, a, x)\, u (1/\nu, x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \nu \geqslant 1\} \tag{8}$$

ограничена в пространстве $L_p^{n,N}$. Это пространство изометрично пространству, сопряженному к $L_{p'}^{n,N}$, $1/p + 1/p' = 1$. По теореме о слабой компактности ограниченного множества в сопряженном пространстве последовательность (8) слабо компактна в $L_p^{n,N}$. Следовательно, существует ее подпоследовательность

$$\{\Psi_1 (1/\nu(r), a, x)\, u (1/\nu (r), x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ r \geqslant 1\}, \tag{9}$$

слабо сходящаяся к некоторой функции $\chi \in L_p^{n,N}$, т. е.

$$\forall v \in L_{p'}^{n,N} : \lim_{r \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}' (\xi)\, \Psi_1 (1/\nu (r), a, \xi)\, u (1/\nu (r), \xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}' (\xi)\, \chi (\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Положим $\varphi (\xi) = \Psi_{-1} (0, a, \xi)\, \chi (\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$ и соотношение (10) записывается в виде

$$\forall v \in L_{p'}^{n,N} : \lim_{r \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}' (\xi)\, \Psi_1 (1/\nu (r), a, \xi) \times$$

$$\times\, u (1/\nu (r), \xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \bar{v}' (\xi)\, \Psi_1 (0, a, \xi)\, \varphi (\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Возьмем фиксированную точку $(t, x) \in \Pi_0$ и рассмотрим функции

$$v_j (\xi) = Z_j^* (0, \xi; t, x)\, \Psi_{-1} (0, a, \xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n,\quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{12}$$

где $Z_j$ — $j$-й столбец матрицы $Z^*$. Из оценки

$$|v_j (\xi)| \leqslant C t^{-|\beta|} \Phi_c (t, x; 0, \xi)\, \Psi_{-1} (0, a, \xi) \leqslant$$

$$\leqslant C t^{-|\beta|} \Phi_{c-c_0} (t, x; 0, \xi)\, \Psi_{-1} (t, a, x),\quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

получающейся с помощью (2) — (4), следует, что $v_j \in L_{p'}^{n;N}$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Поэтому в силу (3) и (11) имеем

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \Psi_{-1}(0, a, \xi) \Psi_1(1/\nu(r) a, \xi) u(1/\nu(r), \xi) d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi. \tag{14}$$

Можно предполагать, что $1/\nu(r) \leqslant t/2$, $r \geqslant 1$. Согласно теореме единственности решения задачи Коши [2]

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 1/\nu(r), \xi) u(1/\nu(r), \xi) d\xi. \tag{15}$$

В силу (15) получаем

$$u(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (Z(t, x; 1/\nu(r), \xi) - Z(t, x; 0, \xi)) \times$$

$$\times u(1/\nu(r), \xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)(1 - \Psi_{-1}(0, a, \xi) \Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)) u(1/\nu(r),$$

$$\xi) d\xi + \Big( \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \Psi_{-1}(0, a, \xi) \Psi_1(1/\nu(r), a, \xi) d\xi -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi \Big) = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + I_3^{(r)}, \quad r \geqslant 1. \tag{16}$$

Чтобы получить представление (5), достаточно доказать, что для $j = 1, 2, 3$

$$\lim_{r\to\infty} I_j^{(r)} = 0. \tag{17}$$

Из (14) следует (17) для $j = 3$. Докажем (17) для $j = 2$. С помощью неравенства Гельдера и оценки (7) имеем

$$|I_2^{(r)}| \leqslant C \Big( \int_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi) d\xi \Big)^{1/p'}, \tag{18}$$

где для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $r \geqslant 1$

$$F_r(\xi) = |Z(t, x; 0, \xi)|^{p'} |\Psi_{-1}(1/\nu(r), a, \xi) - \Psi_{-1}(0, a, \xi)|^{p'}.$$

Изучим свойства функций $F_r$, $r \geqslant 1$. Из (2) и (4) следуют неравенства

$$(F_r(\xi))^{1/p'} \leqslant Ct^{-|\beta|} \Phi_{c-c_0}(t, x; 0, \xi)(\Psi_{-1}(t, k(1/\nu(r), a), x) + \Psi_{-1}(t, a, x)),$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad r \geqslant 1.$$

Поскольку

$$k_j(t, k_j(1/\nu(r), a)) \leqslant k_j(t, k_j(\mu, a)), \quad r \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \mu = 1/\nu(1), \tag{19}$$

то

$$(F_r(\xi))^{1/p'} \leqslant Ct^{-|\beta|} \Phi_{c-c_0}(t, x; 0, \xi)(\Psi_{-1}(t, k(\mu, a), x) +$$

$$+ \Psi_{-1}(t, a, x)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad r \geqslant 1,$$

откуда следует существование у последовательности $\{F_r, r \geqslant 1\}$ интегрируемой мажоранты. А так как для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\lim_{r\to\infty} F_r(\xi) = 0$, то в силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi) d\xi = 0.$$

Отсюда с учетом (18) получаем (17) для $j = 2$.

Докажем (17) для $j = 1$. Будем пользоваться вытекающей из (2) и (3) оценкой

$$|Z(t, x;\ \tau, \xi) - Z(t, x;\ 0, \xi)| \leqslant C\tau^{\gamma}(t-\tau)^{-|\beta|-\gamma}\Phi_c(t, x;\ 0, \xi),$$

$$0 < \tau < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \gamma \leqslant 1,$$

которая при $\tau = 1/\nu(r)$ с учетом того, что $1/\nu(r) \leqslant t/2$ имеет вид

$$|Z(t, x;\ 1/\nu(r), \xi) - Z(t, x;\ 0, \xi)| \leqslant C(1/\nu(r))^{\gamma}t^{-|\beta|-\gamma}\Phi_c(t, x;\ 0, \xi),$$

$$0 < t \leqslant T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad r \geqslant 1. \tag{20}$$

Используя (4), (7), (19) и (20), получаем

$$|I_1^{(r)}| \leqslant C(1/\nu(r))^{\gamma}t^{-|\beta|-\gamma}\Psi_{-1}(t, k(1/\nu(r), a), x)\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{c-c_0}(t, x;\ 0, \xi) \times$$

$$\times \Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\,|u(1/\nu(r), \xi)|\,d\xi \leqslant C(1/\nu(r))^{\gamma}t^{-|\beta|-\gamma}\Psi_{-1}(t, k(\mu, a), x) \times$$

$$\times \|u(1/\nu(r), \cdot)\|_p^{k(1/\nu(r), a)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_{(c-c_0)p'}(t, x;\ 0, \xi)\,d\xi\Big)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C(1/\nu(r))^{\gamma}t^{-|\beta|/p-\gamma}\Psi_{-1}(t, k(\mu, a), x) \to 0, \quad r \to \infty.$$

Пусть $p = 1$. Из условия (7) следует, что последовательность (8) ограничена в пространстве $L_1^{n,N}$. Это пространство не является сопряженным ни к какому другому банахову пространству, но оно вкладывается в пространство обобщенных мер $M^{n,N}$ : если $g \in L_1^{n,N}$, то равенством

$$\nu(A) = \int_A g(x)\,dx, \quad A \in \mathscr{B}_n,$$

определяется обобщенная мера $\nu \in M^{n,N}$, причем $\|\nu\| = \|g\|_{L_1^{n,N}}$. Как отмечалось, пространство $M^{n,N}$ изометрично пространству, сопряженному к $C_0^{n,N}$. Из ограниченности в $L_1^{n,N}$ последовательности (8) следует ограниченность соответствующей последовательности обобщенных мер в $M^{n,N}$ и, следовательно, слабая компактность последней. Поэтому существует подпоследовательность (9) и обобщенная мера $\nu \in M^{n,N}$ такие, что

$$\forall v \in C_0^{n,N}: \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\bar{v}'(\xi)\,\Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\,u(1/\nu(r), \xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\bar{v}'(\xi)\,d\nu(\xi). \tag{21}$$

Для ограниченных множеств $A \in \mathscr{B}_n$ положим

$$\mu(A) = \int_A \Psi_{-1}(0, a, x)\,d\nu(x),$$

и тогда

$$\int_A \Psi_1(0, a, x)\,d\mu(x) = \int_A \Psi_1(0, a, x)\,\Psi_{-1}(0, a, x)\,d\nu(x) = \nu(A).$$

Если $A$ — неограниченное множество из $\mathscr{B}_n$, то рассмотрим монотонно неубывающую последовательность ограниченных множеств $A_k \in \mathscr{B}_n$, $k \geqslant 1$, такую, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$ и положим

$$\int_A \Psi_1(0, a, x)\,d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k}\Psi_1(0, a, x)\,d\mu(x) = \lim_{k\to\infty}\nu(A_k) = \nu(A).$$

Таким образом, определенная функция $\mu$ принадлежит пространству $M^{k(0,a)}$ и равенство (21) записывается в виде

$$\forall v \in C_0^{n,N} : \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(\xi)\, \Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\, u(1/\nu(r), \xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(\xi)\, \Psi_1(0, a, \xi)\, d\mu(\xi). \tag{22}$$

Из оценок (13) следует, что функции (12) принадлежат пространству $C_0^{n,N}$ для любой фиксированной точки $(t, x) \in \Pi_0$. Поэтому в силу (3) и (22) получаем

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\, u(1/\nu(r), \xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi). \tag{23}$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в случае $p > 1$: с помощью (15) записываются равенства

$$u(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi) = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + \tilde{I}_3^{(r)}, \quad r \geqslant 1, \tag{24}$$

где $I_j^{(r)}$, $j = 1, 2$, те же, что и в (16), а

$$\tilde{I}_3^{(r)} = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, \Psi_{-1}(0, a, \xi)\, \Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\, u(1/\nu(r), \xi)\, d\xi -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi);$$

затем доказывается равенство (17) для $j = 1, 2$. Поскольку в силу (23) $\lim_{r\to\infty} \tilde{I}_3^{(r)} = 0$, то из (24) вытекает искомое представление (6).


1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
2. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функцион. анализу.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968.— № 1.— С. 3—175.
3. *Chabrowski J.* Representation theorems for parabolic systems // J. Austral. Math. Soc.— 1982.— A32, N 2.— P. 246—288.
4. *Ивасишен С. Д.* Об интегральных представлениях и свойстве Фату для решений параболических систем // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, вып. 4.— С. 173—174.



Киев. ун-т — Получено 11.07.88

Таким образом, определенная функция $\mu$ принадлежит пространству $M^{k(0,a)}$ и равенство (21) записывается в виде

$$\forall v \in C_0^{n,N} : \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(\xi)\,\Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\,u(1/\nu(r), \xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(\xi)\,\Psi_1(0, a, \xi)\,d\mu(\xi). \tag{22}$$

Из оценок (13) следует, что функции (12) принадлежат пространству $C_0^{n,N}$ для любой фиксированной точки $(t, x) \in \Pi_0$. Поэтому в силу (3) и (22) получаем

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\, 0, \xi)\,\Psi_{-1}(0, a, \xi)\,\Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\,u(1/\nu(r), \xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\, 0, \xi)\,d\mu(\xi). \tag{23}$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как в случае $p > 1$: с помощью (15) записываются равенства

$$u(t, x) - \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\, 0, \xi)\,d\mu(\xi) = I_1^{(r)} + I_2^{(r)} + \tilde{I}_3^{(r)}, \quad r \geqslant 1, \tag{24}$$

где $I_j^{(r)}$, $j = 1, 2$, те же, что и в (16), а

$$\tilde{I}_3^{(r)} = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\, 0, \xi)\,\Psi_{-1}(0, a, \xi)\,\Psi_1(1/\nu(r), a, \xi)\,u(1/\nu(r), \xi)\,d\xi -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x;\, 0, \xi)\,d\mu(\xi);$$

затем доказывается равенство (17) для $j = 1, 2$. Поскольку в силу (23) $\lim\limits_{r\to\infty} \tilde{I}_3^{(r)} = 0$, то из (24) вытекает искомое представление (6).


1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
2. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функцион. анализу.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968.— № 1.— С. 3—175.
3. *Chabrowski J.* Representation theorems for parabolic systems // J. Austral. Math. Soc.— 1982.— A32, N 2.— P. 246—288.
4. *Ивасишен С. Д.* Об интегральных представлениях и свойстве Фату для решений параболических систем // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, вып. 4.— С. 173—174.


Киев. ун-т
Получено 11.07.88