УДК 512.546

И. В. Протасов, А. Чарыев

Пространства Бурбаки топологических групп

Изучается взаимосвязь между топологическими и равномерностными свойствами группы G и пространств $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ всех непустых замкнутых подмножеств и замкнутых подгрупп группы G. Базу окрестностей замкнутого подмножества X из G образуют множества $S(X, U) = \{Y : Y \subseteq XU,\ X \subseteq YU\}$, где U пробегает все окрестности единицы группы G. Получены критерии вполне ограниченности и локальной вполне ограниченности пространства $\mathcal{F}(G)$ и некоторых его подпространств. Описаны некоторые классы групп с компактным пространством $\mathcal{L}(G)$. Доказана полнота пространств $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ для проективно метризуемых групп G.

Вивчається взаємозв'язок між топологічними і рівномірносними властивостями групи G і просторів $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ усіх замкнених підмножин і замкнених підгруп групи G. Базу околів замкненої підмножини X із G утворюють множини $S(X, U) = \{Y : Y \subseteq XU,\ X \subseteq YU\}$, де U перебігає усі околи одиниці групи G. Одержано критерії цілком обмеженості і локальної цілком обмеженості просторів $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ і деяких їх підпросторів. Описано деякі класи груп з компактними просторами $\mathcal{L}(G)$. Доведено повноту просторів $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ для проективно метризованих груп G.

Пусть G — топологическая группа, $\mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{L}(G)$ — семейства всех непустых замкнутых подмножеств и замкнутых подгрупп группы G. Левая равномерность группы G индуцирует соответствующую равномерность на пространствах $\mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{L}(G)$ [1, с. 208], которая называется равномерностью Бурбаки. В свою очередь, равномерность Бурбаки порождает топологию Бурбаки на пространствах $\mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{L}(G)$, принадлежащую классу (Σ, Θ)-топологий [2]. Базу окрестностей элемента $X \in \mathcal{F}(G)$ в топологии Бурбаки образуют множества $S(X, U) = \{Y \in \mathcal{F}(G) : Y \subseteq XU,\ X \subseteq YU\}$, где U пробегает все окрестности единицы группы G.

В настоящей статье изучается взаимосвязь между топологическими и равномерностными свойствами пространства группы G и ее пространств Бурбаки $\mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{L}(G)$. В п. 1 приведены простейшие утверждения о пространстве $\mathcal{F}(G)$. Основное в теории равномерных пространств понятие вполне ограниченности (см., например, [3, глава 8]) рассматривается применительно к пространству $\mathcal{F}(G)$ и его подпространствам в п. 2. Там же получена характеризация топологических групп G, для которых топология Бурбаки на пространстве $\mathcal{F}(G)$ совпадает с топологией Вьеториса. Некоторые классы топологических групп с компактным пространством $\mathcal{L}(G)$ описаны в п. 3. В частности, оказалось, что компактность пространства $\mathcal{L}(G)$ влечет минимальность топологии группы G, если G обладает базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп. В п. 4 доказана полнота пространств Бурбаки для широкого класса топологических групп.

1. Обозначения, определения, технические результаты. 1. Пусть n — натуральное число, $\mathcal{K}_n(G)$ — семейство всех непустых подмножеств группы G, содержащих не более чем n элементов, $\mathcal{K}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n(G)$, $\mathcal{B}(G)$ — семейство всех вполне ограниченных непустых замкнутых подмножеств группы G. Тогда подпространство $\mathcal{K}_n(G)$ замкнуто в $\mathcal{F}(G)$ для любого n, $\overline{\mathcal{K}(G)} = \mathcal{B}(G)$ и $\mathcal{B}(G)$ — замкнутое подпространство пространства $\mathcal{F}(G)$.

2. Пусть τ — бесконечный кардинал, $\mathcal{K}_\tau(G)$ — семейство всех непустых замкнутых подмножеств группы G плотности $\leqslant \tau$. Следуя И. И. Гурану [4], подмножество A топологической группы G назовем τ-ограниченным, если для любой окрестности U единицы группы G найдется такое подмножество $X \subseteq U$ мощности $\leqslant \tau$, что $A \subseteq XU$. Семейство всех непустых τ-ограниченных замкнутых подмножеств группы G обозначим $\mathcal{B}_\tau(G)$. Тогда $\overline{\mathcal{K}_\tau(G)} = \mathcal{B}_\tau(G)$, в частности, подпространство $\mathcal{B}_\tau(G)$ замкнуто в $\mathcal{F}(G)$.

3. Для любого натурального числа n отображение $i_n : G^n \to \mathcal{K}_n(G)$,

определенное формулой $i_n(x_1, \dots, x_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, равномерно непрерывно, а $i_1 : G \to \mathcal{K}_1(G)$ — равномерный гомеоморфизм. Таким образом, пространство группы G равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству $\mathcal{K}_1(G)$ из $\mathcal{F}(G)$.

Пусть группа G связна. Так как отображение i_n непрерывно, то подпространство $\mathcal{K}_n(G)$ также связно. Поскольку $\mathcal{K}_1(G) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{K}_n(G) \subseteq \dots$, то $\mathcal{K}(G)$ также связно и, учитывая утверждение 1, получаем связность $\mathcal{B}(G)$. Значит, для связной вполне ограниченной группы G пространство $\mathcal{F}(G)$ связно.

4. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(G)$, $P = \cup\{F : F \in \mathcal{F}\}$. Если P вполне ограничено в G, то $\mathcal{F}$ вполне ограничено в $\mathcal{F}(G)$. Если $\mathcal{F}$ вполне ограничено в $\mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(G)$, то P вполне ограничено в G.

5. Подпространство $\mathcal{B}(G)$ открыто в $\mathcal{F}(G)$ тогда и только тогда, когда группа G локально вполне ограничена. Применяя утверждение 1, заключаем, что связность пространства $\mathcal{F}(G)$ для локально вполне ограниченной группы G влечет вполне ограниченность G. Можно доказать, что локально вполне ограниченная группа G со связным пространством $\mathcal{L}(G)$ тривиальна.

6. Пространство $\mathcal{F}(G)$ определяет естественную структуру полугруппы относительно операции $(A, B) \to \overline{AB}$, где $AB = \{ab : a \in A, \ b \in B\}$. При этом $\mathcal{B}(G)$ будет подполугруппой. Следуя рассуждениям [5], нетрудно проверить, что полугруппа $\mathcal{F}(G)$ топологическая (т. е. полугрупповая операция непрерывна в топологии Бурбаки) тогда и только тогда, когда группа G F-уравновешена. Последнее означает, что любая ограниченная вещественная функция на группе G, равномерно непрерывная слева, равномерно непрерывна и справа. В то же время подполугруппа $\mathcal{B}(G)$ является топологической для произвольной группы G.

7. Если группа G дискретна, то, очевидно, пространство $\mathcal{F}(G)$ также дискретно. Если G метризуема, то пространство $\mathcal{F}(G)$ метризуемо. Действительно, метризуемость равномерного пространства равносильна наличию счетной базы равномерности. Если группа G метризуема ограниченной метрикой ρ, то пространство $\mathcal{F}(G)$ метризуемо метрикой Хаусдорфа ρ_H [3, с. 680].

8. Подпространство $\mathcal{L}(G)$ замкнуто в $\mathcal{F}(G)$ для любой топологической группы G. В свою очередь, в $\mathcal{L}(G)$ замкнуты подпространство $\mathfrak{N}(G)$ замкнутых нормальных делителей и подпространство замкнутых подгрупп, удовлетворяющих фиксированному тождественному соотношению.

9. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(G)$, $A \subseteq B$, $[A, B] = \{X \in \mathcal{L}(G) : A \subseteq X \subseteq B\}$, e — единица группы G. Отрезок $[A, B]$ замкнут в $\mathcal{L}(G)$, отрезок $[\{e\}, A]$ равномерно гомеоморфен $\mathcal{L}(A)$. Если $A \in \mathfrak{N}(G)$, то отрезок $[A, G]$ равномерно гомеоморфен $\mathcal{L}(G/A)$.

10. Монотетичной называется топологическая группа с плотной циклической подгруппой. Обозначим через $\mathfrak{M}(G)$ семейство всех замкнутых монотетичных подгрупп топологической группы G. Если $\mathfrak{M}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)$, то группу G назовем моноограниченной.

11. Всякую вполне ограниченную (локально вполне ограниченную) группу G можно рассматривать как плотную подгруппу некоторой компактной (локально компактной) группы $W(G)$. Из леммы Понтрягина [6, с. 273] вытекает, что если локально вполне ограниченная группа не является моноограниченной, то она содержит подгруппу, топологически изоморфную дискретной группе целых чисел Z.

12. Топологическую группу G, обладающую базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп, условимся называть 0 - мерной. Очевидно, всякая подгруппа из $\mathfrak{M}(G)$ вполне ограничена, либо топологически изоморфна Z. Отметим также, что для вполне ограниченной 0-мерной группы G $W(G)$ — проконечная группа.

13. Минимальной называется топологическая группа с неослабляемой топологией. Точнее, группа G минимальна, если любой непрерывный изоморфизм группы G на произвольную топологическую группу H открыт.

Если любая фактор-группа группы G минимальна, то G называется тотально минимальной. Из теоремы Стефенсона [7] следует, что вполне ограниченная группа G минимальна в том и только в том случае, если $N \cap \cap G \neq \{e\}$ для любого нетривиального замкнутого нормального делителя N из $W(G)$. Аналогично, вполне ограниченная группа G тотально минимальна, если для любого замкнутого нормального делителя N из $W(G)$ подмножество $G \cap N$ плотно в N.

2. Вполне ограниченность в пространстве $\mathcal{F}(G)$. Вначале сформулируем два практически известных результата (см., например, [3, с. 680]).

Теорема 1. *Вполне ограниченность пространств G, $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{B}(G)$ равносильна.*

Доказательство непосредственно следует из утверждений 3, 4 п. 1.

Теорема 2. *Компактность пространств G, $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ равносильна.*

Доказательство. Поскольку для компактной группы G топология Бурбаки на $\mathcal{F}(G)$ равносильна топологии Вьеториса, то компактность $\mathcal{F}(G)$ следует из компактности группы G по классической теореме Вьеториса. Остальные импликации вытекают из утверждений 1, 3.

Из теорем 1, 2 и утверждения 8 вытекает, что вполне ограниченность (компактность) группы G влечет вполне ограниченность (компактность) $\mathcal{L}(G)$. Обратное, вообще говоря, неверно, поскольку топологическая группа G с конечным $\mathcal{L}(G)$ необязательно вполне ограничена.

Теорема 3. *Если G — моноограниченная группа, то вполне ограниченность пространства $\mathcal{L}(G)$ влечет вполне ограниченность группы G.*

Доказательство. Так как $G = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{M}(G)\}$ и $\mathfrak{M}(G)$ вполне ограничено, то вполне ограниченность $\mathcal{L}(G)$ вытекает непосредственно из утверждения 4.

Следствие 1. *Если группа G локально вполне ограничена, либо 0-мерна, то вполне ограниченность пространства $\mathcal{L}(G)$ влечет вполне ограниченность группы G.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3 достаточно показать, что группа G моноограничена. Допустим от противного, что G не моноограничена. Тогда по утверждениям 11, 12 G содержит замкнутую подгруппу A, топологически изоморфную Z. Поскольку $\mathcal{L}(\mathrm{Z})$ бесконечно, дискретно и равномерно гомеоморфно замкнутому отрезку $[\{e\}, A]$, то $\mathcal{L}(G)$ не является вполне ограниченным.

Следствие 2. *Если группа G локально компактна, то компактность G равносильна компактности $\mathcal{L}(G)$.*

Замечание 1. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что вполне ограниченность $\mathcal{L}(G)$ следует из вполне ограниченности $\mathfrak{M}(G)$ для любой моноограниченной группы G. Неизвестно, верно ли это утверждение для произвольной топологической группы G.

Замечание 2. Если группа G τ-ограничена, то пространства $\mathcal{F}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ необязательно τ-ограничены. Простейший контрпример — группа вещественных чисел с естественной топологией. Этот же пример показывает, что такие кардинальные инварианты как вес, плотность, число Суслина не сохраняются, вообще говоря, при переходе от пространства группы G к пространствам $\mathcal{F}(G)$ и $\mathcal{L}(G)$. Однако для τ-ограниченной группы G $\mathcal{B}(G)$ является τ-ограниченным. Действительно, если U — произвольная окрестность единицы группы G, $G = AU$, $|A| \leqslant \tau$, то $\mathcal{B}(G) \subseteq \subseteq \bigcup \{S(K, U) : K \in \mathcal{K}\}$, где $\mathcal{K}$ — семейство всех непустых конечных подмножеств из A.

Теорема 4. *Пространство $\mathcal{F}(G)$ локально вполне ограничено тогда и только тогда, когда группа G вполне ограничена либо дискретна.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что группа G недискретна и не вполне ограничена. Выберем такие последовательность $\{x_n\}$ элементов группы G и окрестность единицы V, что $x_iV \cap x_jV = \varnothing$ при $i \neq j$. Рассмотрим вполне ограниченную окрестность $S(F, U)$ замкнутого подмножества $F = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Можно считать, что окрестность единицы U симметрична и $U \subseteq V$. Так как группа G недискретна, в U найдется неединичный элемент y. Положим $F_n = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n y, x_{n+1}, \ldots\}$.

Очевидно, $F_n \in S(F, U)$. Поскольку окрестность $S(F, U)$ вполне ограничена, подмножество $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n, \ldots\}$ вполне ограничено в $\mathcal{F}(G)$. Возьмем такую симметричную окрестность единицы W, что $y \notin W$. Тогда найдется такое натуральное число m, что $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S(F_i, W)$. Значит, $F_{m+1} \in S(F_i, W)$ для некоторого $i \leqslant m$. Поскольку $x_{m+1} \notin x_{m+1} y W$, $x_{m+1} \in F_i$ и $x_{m+1} \notin x_j W$ для всех $j \neq m+1$, то $F_i \not\subseteq F_{m+1} W$. Получено противоречие с условием $F_{m+1} \in S(F_i, W)$.

Достаточность вытекает из теоремы 1 и утверждения 7.

Следствие. *Пространство $\mathcal{F}(G)$ локально компактно тогда и только тогда, когда группа G компактна либо дискретна.*

Замечание 3. В отличие от $\mathcal{F}(G)$, пространство $\mathcal{B}(G)$ локально вполне ограничено для любой локально вполне ограниченной группы G. Действительно, пусть $F \in \mathcal{B}(G)$, U — вполне ограниченная окрестность единицы группы G. Тогда подмножество FU вполне ограничено. Так как $\bigcup \{X : X \in S(F, U)\} \subseteq FU$, то по утверждению 4 $S(F, U)$ — вполне ограниченная окрестность элемента F.

Сравним топологии Бурбаки и Вьеториса на пространстве $\mathcal{F}(G)$. Напомним, что открытую предбазу топологии Вьеториса на $\mathcal{F}(G)$ образуют множества

$$D_1(U) = \{X \in \mathcal{F}(G) : X \subseteq U\}, \quad D_2(V) = \{X \in \mathcal{F}(G) : X \cap V \neq \varnothing\},$$

где U, V пробегают все открытые подмножества группы G. Для краткости топологии Бурбаки и Вьеториса на $\mathcal{F}(G)$ обозначим соответственно B и V.

Лемма 1. *Топология $B \leqslant V$ тогда и только тогда, когда группа G вполне ограничена.*

Доказательство. Допустим, что $B \leqslant V$. Заметим, что $\mathcal{B}(G)$ (и даже $\mathcal{K}(G)$) плотно в $\mathcal{F}(G)$ в топологии V. По утверждению 1 $\mathcal{B}(G)$ замкнуто в $\mathcal{F}(G)$ в топологии B. Значит, $\mathcal{B}(G) = \mathcal{F}(G)$ и группа G вполне ограничена.

Обратно, пусть группа G вполне ограничена, $S(X, U)$ — произвольная окрестность элемента $X \in \mathcal{F}(G)$ в топологии B. Выберем такую симметричную окрестность единицы W, что $W^2 \subseteq U$. Так как подмножество X вполне ограничено, найдутся такие элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$, что $X \subseteq (x_1 W \cup \ldots \cup x_n W)$. Тогда $D_1(XW) \cap D_2(x_1 W) \cap \ldots \cap D_2(x_n W) \subseteq S(X, U)$.

Лемма 2. *Топология $V \leqslant B$ тогда и только тогда, когда группа G равномерно нормальна, т. е. для любых непересекающихся замкнутых подмножеств X, Y из G найдется такая окрестность единицы U, что $XU \cap YU = \varnothing$.*

Доказательство. Допустим, что $V \leqslant B$, $X, Y \in \mathcal{F}(G)$, $X \cap Y = \varnothing$. Так как $D_1(G \setminus Y)$ — окрестность X в топологии V, $V \leqslant B$, то найдется такая окрестность единицы W, что $S(X, W) \subseteq D_1(G \setminus Y)$. Выберем окрестность единицы U так, чтобы $\overline{XU} \subseteq XW$. Тогда $\overline{XU} \in S(X, W)$ и, следовательно, $\overline{XU} \in D_1(G \setminus Y)$. Значит, $\overline{XU} \cap Y = \varnothing$.

Пусть группа G равномерно нормальна, $X \in \mathcal{F}(G)$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, $D_1(U) \cap D_2(x_1 W) \cap \ldots \cap D_2(x_n W)$ — окрестность элемента X в топологии V. Использовав равномерную нормальность G, подберем такую окрестность единицы U', что $XU' \subseteq U$, $U' \subseteq W$. Тогда $S(X, U') \subseteq D_1(U) \cap D_2(x_1 W) \ldots \cap D_2(x_n W)$.

Теорема 5. *Топология Бурбаки на пространстве $\mathcal{F}(G)$ совпадает с топологией Вьеториса тогда и только тогда, когда группа G псевдокомпактна и нормальна.*

Доказательство. Из лемм 1, 2 вытекает, что $V = B$ тогда и только тогда, когда группа G вполне ограничена и равномерно нормальна. Но эти условия ввиду результатов работы [5] равносильны псевдокомпактности и нормальности.

Замечание 4. Пусть группа G псевдокомпактна и нормальна, но некомпактна. По теореме [5] $B = V$ на пространстве $\mathscr{F}(G)$, а по теореме Величко [8] пространство $\mathscr{F}(G)$ ненормально в топологии Вьеториса. Следовательно, нормальность группы G не наследуется, вообще говоря, пространством $\mathscr{F}(G)$, снабженным топологией Бурбаки.

3. Группы с компактным пространством подгрупп. Лемма 3. *Если пространство $\mathscr{L}(G)$ компактно, то подмножество $G_n = \{g \in G : g^n = e\}$ компактно в G для любого натурального n.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную направленность $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in J$, элементов из G_n. Использовав компактность $\mathscr{L}(G)$, из направленности монотетичных подгрупп $\{\langle x_\alpha\rangle\}$, $\alpha \in J$, выделим поднаправленность $\{\langle x_\beta\rangle\}$, $\beta \in I$, сходящуюся к некоторой подгруппе $H \in \mathscr{L}(G)$. По утверждению 1 H — конечная подгруппа. Покажем, что некоторый элемент из H является предельной точкой направленности $\{x_\beta\}$, $\beta \in I$. Допустив противное, найдем такую окрестность единицы V и номер $\gamma \in I$, что $x_\beta \notin HV$ для всех $\beta > \gamma$. Значит, $\langle x_\beta\rangle \notin S(H, V)$ при $\beta > \gamma$, что противоречит выбору поднаправленности $\{\langle x_\beta\rangle\}$, $\beta \in I$.

Теорема 6. *Пусть G — топологическая группа с компактным пространством $\mathscr{L}(G)$. Если G — группа конечной экспоненты либо периодическая группа со свойством Бэра, то G компактна.*

Доказательство. Для групп конечной экспоненты справедливость теоремы вытекает непосредственно из леммы 3. Пусть G — периодическая группа со свойством Бэра. Так как $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ и $\overline{G}_n = G_n$, то найдется такое натуральное число m, что G_m имеет непустую внутренность. Применяя лемму 3, заключаем, что группа G локально компактна. Но тогда G компактна по следствию 2 из теоремы 3.

Лемма 4. *Пусть G — 0-мерная вполне ограниченная группа, $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$ — направленность подгрупп из $\mathscr{L}(G)$, K_α — замыкание H_α в $W(G)$. Если направленности подгрупп $\{H_\alpha\}$, $\{K_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходятся в $\mathscr{L}(G)$ и $\mathscr{L}(W(G))$ соответственно к подгруппам H и K, то K — замыкание H в $W(G)$.*

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность единицы группы $W(G)$. Тогда, начиная с некоторого номера, $K_\alpha \subseteq KU$ и, следовательно, $H_\alpha \subseteq KU$. Ввиду произвольности выбора U $H \subseteq K$. Предположим, что для некоторых элемента $x \in K$ и окрестности V единицы группы $W(G)$ $xV \cap HV = \varnothing$. Тогда, начиная с некоторого номера, $K_\alpha \cap xV \neq \varnothing$ и, следовательно, $H_\alpha \cap xV \neq \varnothing$. Однако это противоречит тому, что $H_\alpha \subseteq HV$ при достаточно больших α.

Теорема 7. *Пусть G — 0-мерная группа. Пространство $\mathscr{L}(G)$ компактно тогда и только тогда, когда G вполне ограничена и для любой замкнутой подгруппы K из $W(G)$ подгруппа $K \cap G$ плотна в K.*

Доказательство. Необходимость. По следствию 1 из теоремы 3 группа G вполне ограничена. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — семейство всех открытых нормальных делителей группы $W(G)$, направленное по включению. Положим $K_\alpha = KU_\alpha$, $H_\alpha = K_\alpha \cap G$. Так как подгруппа K_α открыта в $W(G)$, то $\overline{H}_\alpha = K_\alpha$. Очевидно, направленность подгрупп $\{K_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится в $\mathscr{L}(W(G))$ к подгруппе K. Ввиду компактности $\mathscr{L}(G)$ можно считать, что направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится в $\mathscr{L}(G)$ к некоторой подгруппе H. Но тогда по лемме 4 $\overline{H} = K$.

Достаточность. Пусть $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — произвольная направленность подгрупп из $\mathscr{L}(G)$, K_α — замыкание H_α в $W(G)$. Так как группа $W(G)$ компактна, по теореме 2 можно считать, переходя к поднаправленностям, что $\{K_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится в $\mathscr{L}(W(G))$ к некоторой подгруппе K. Покажем, что направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится в $\mathscr{L}(G)$ к подгруппе $H = K \cap G$. Зафиксируем произвольную окрестность U единицы группы $W(G)$ и обозначим $V = U \cap G$. Необходимо убедиться в том, что $H \in S(H, V)$ при достаточно больших α.

Пусть U_1 — такая симметричная окрестность единицы группы $W(G)$, что $U_1^2 \subseteq U$. Тогда, начиная с некоторого номера, $K_\alpha \subseteq KU_1$. По условию

$\overline{H} = K$, следовательно, $H_\alpha \subseteq HU_1$ и $K_\alpha \subseteq HU_1^2 \subseteq HU$. Так как $H_\alpha \subseteq K_\alpha$, то $H_\alpha \subseteq HU$ и по определению $V\ H_\alpha \subseteq K_\alpha$.

Далее, начиная с некоторого номера, $K \subseteq K_\alpha U_1$. Поскольку $\overline{H}_\alpha = K_\alpha$, то $K_\alpha \subseteq H_\alpha U_1$ и $K \subseteq H_\alpha U_1^2 \subseteq H_\alpha U$. Значит, $H \subseteq H_\alpha U$ и $H \subseteq H_\alpha V$. Теорема доказана.

Следствие. *Если G — 0-мерная группа с компактным пространством $\mathscr{L}(G)$, то G тотально минимальна.*

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы и утверждения 13 первого пункта.

Теорема 8. *Пусть G — вполне ограниченная 0-мерная группа. Пространство $\mathfrak{N}(G)$ компактно тогда и только тогда, когда группа G тотально минимальна.*

Доказательство аналогично, с учетом утверждения 13, доказательству теоремы 7.

Замечание 5. Рассмотрим квазициклическую группу с топологией, индуцированной окружностью. Из определения топологии Бурбаки следует, что $\mathscr{L}(G)$ — компакт. Значит, условие 0-мерности в теоремах 7, 8 существенно. Этот же пример показывает, что для периодических групп, не удовлетворяющих условию Бэра, теорема 6, вообще говоря, неверна.

Замечание 6. Используя рассуждения работы [9], можно доказать, что для вполне ограниченной группы G компактность пространства $\mathscr{L}(G)$ равносильна компактности подпространства $\mathfrak{M}(G)$. Неизвестно, верно ли это утверждение для произвольной группы G.

4. Разложение в проективный предел и полнота пространства $\mathscr{F}(G)$. Пусть $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — направленное по включению семейство компактных подгрупп группы G и $\bigcap\{H_\alpha, \alpha \in J\} = \{e\}$. Положим $\mathscr{F}_\alpha = \{A \in \mathscr{F}(G) : AH_\alpha = A\}$.

Для $\alpha > \beta$ определим отображение $f_{\alpha\beta} : \mathscr{F}_\alpha \to \mathscr{F}_\beta$, полагая $f_{\alpha\beta}(A) = AH_\beta$. Если $\beta < \alpha < \gamma$, то $f_{\alpha\beta} f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta}$. Кроме того, из компактности H_β следует равномерная непрерывность $f_{\alpha\beta}$ при $\alpha > \beta$. Таким образом, $\{\mathscr{F}_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ — проективная система равномерных пространств. Пусть $\mathscr{F} = \varprojlim\{\mathscr{F}_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$.

Рассмотрим произвольный элемент $(A_\alpha, \alpha \in J)$ из $\mathscr{F}$, зафиксируем $\beta \in J$ и элемент $x \in A_\beta$. Так как $A_\beta = A_\alpha H_\beta$ для всех $\alpha > \beta$, то $xH_\beta \cap \cap H_\alpha \neq \varnothing$. Поскольку семейство подмножеств $\{A_\alpha, \alpha \in J\}$ направлено по включению, а H_β — компакт, то для $A = \bigcap\{A_\alpha, \alpha \in J\}$ имеем $A \neq \varnothing$, $A_\beta \subseteq AH_\beta$. Значит, $A_\beta = AH_\beta$ для всех $\beta \in J$. Далее, если $A, B \in \mathscr{F}(G)$ и $AH_\alpha = BH_\alpha$ для всех $\alpha \in J$, то $A = B$. Поэтому всякий элемент из $\mathscr{F}$ однозначно представим в виде $(AH_\alpha, \alpha \in J)$, где $A \in \mathscr{F}(G)$. Определим отображение $f : \mathscr{F}(G) \to \mathscr{F}$, полагая $f(A) = (AH_\alpha, \alpha \in J)$. В силу изложенного выше отображение f взаимно однозначно, а из определения топологии Бурбаки и компактности подгрупп $\{H_\alpha, \alpha \in J\}$ следует, что f — равномерный гомеоморфизм.

Итак, пространство $\mathscr{F}(G)$ разложено в предел проективной системы подпространств $\{\mathscr{F}_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$. Если, кроме того, все подгруппы H_α инвариантны в группе G, то, учитывая утверждение 9, получаем разложение $\mathscr{L}(G)$ в проективный предел системы пространств $\{\mathscr{L}(G/H_\alpha), \alpha \in J\}$. Указанное представление будет использовано при доказательстве теоремы 10 о полноте пространства $\mathscr{F}(G)$.

Теорема 9. *Если группа G полна в левой равномерности, то пространство $\mathscr{B}(G)$ полно.*

Доказательство. Пусть $\{F_\alpha, \alpha \in J\}$ — фундаментальная направленность элементов из $\mathscr{B}(G)$. Обозначим через F множество всех элементов $x \in G$ таких, что для любой окрестности V_x элемента x найдется такое $\alpha \in J$, что $F_\beta \cap V_x \neq \varnothing$ при $\beta > \alpha$. Ясно, что F замкнуто. Докажем, что $F \neq \varnothing$ и $F = \lim F_\alpha$.

Зафиксируем все пары (α, V), где $\alpha \in J$, V — открытая окрестность единицы, такие, что $F_\beta \subseteq F_\alpha V$, $F_\alpha \subseteq F_\beta V$ для всех $\beta > \alpha$. Полученную систему открытых множеств $\{F_\alpha V\}$ обозначим через $\mathfrak{A}$. Пусть W — открытое подмножество из G и $W \cap F_\alpha V \neq \varnothing$, если $F_\alpha V \in \mathfrak{A}$. Убедимся в том, что $\overline{W} \cap F \neq \varnothing$.

Центрированную систему $\{W \cap F_\alpha V : F_\alpha V \in \mathfrak{A}\}$ дополним до максимальной центрированной системы открытых множеств $\mathfrak{A}' = \{W_\gamma, \gamma \in I\}$, причем множество индексов I будем считать направленным по включению индексируемых подмножеств. Выберем по одному элементу $x_\gamma \in W_\gamma$ и покажем фундаментальность направленности $\{x_\gamma, \gamma \in I\}$ в левой равномерности группы G. Пусть U — произвольная открытая симметричная окрестность единицы. В силу фундаментальности направленности $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, найдется такой индекс $\beta \in J$, что $F_\beta U \in \mathfrak{A}$. Так как группа G полна и $F_\beta \in \mathscr{B}(G)$, то F_β — компакт. Поэтому найдутся такие элементы $h_1, \ldots, h_n \in F_\beta$, что $F_\beta \subseteq$ $\subseteq (h_1 U \cup \ldots \cup h_n U)$. Но тогда $(F_\beta U \cap W) \subseteq (h_1 U^2 \cap W) \cup \ldots \cup (h_n U^2 \cap W)$ и в силу максимальности системы $\mathfrak{A}'$ $h_k U^2 \cap W \in \mathfrak{A}'$ для некоторого k. Значит, найдется такое $\gamma \in I$, что $W_\gamma = h_k U^2 \cap W$. Если теперь $\gamma_1, \gamma_2 > \gamma$, то $x_{\gamma_1}^{-1} x_{\gamma_2} \in U^4$. Поскольку группа G полна, направленность $\{x_\gamma\}$, $\gamma \in I$, сходится к некоторому элементу $x \in \overline{W}$. Далее, $x \in \overline{W}_\gamma$ для любого $\gamma \in I$. Ввиду максимальности системы $\mathfrak{A}'$ $xU \in \mathfrak{A}'$. Так как $F_\beta U \in \mathfrak{A}'$ и $F_\beta \subseteq F_\alpha U$ при $\alpha > \beta$, то $F_\alpha U^2 \cap xU \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x \in F$. Полагая $W = G$, получаем, что $F \neq \varnothing$.

Допустим, что направленность $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, не сходится к F. Можно считать, что $F_\alpha \notin S(F, U)$ для всех $\alpha \in J$ и фиксированной открытой окрестности единицы U. Переходя к поднаправленностям, получаем две возможности.

1) $F_\alpha \not\subseteq FU$ для всех $\alpha \in J$. Подберем замкнутую окрестность единицы V так, чтобы $FV \subseteq FU$ и положим $W = G \setminus FV$. В силу изложенного выше $\overline{W} \cap F \neq \varnothing$, и получаем противоречие.

2) $F \not\subseteq F_\alpha U$ для всех $\alpha \in J$. Открытую окрестность единицы V выберем так, чтобы $\overline{V} \subseteq U$. Используя фундаментальность направленности $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, зафиксируем такой индекс $\beta \in J$, что $F_\beta V \in \mathfrak{A}$. Тогда $F_\alpha \subseteq F_\beta V$ для всех $\alpha > \beta$. Значит, $F \subseteq F_\beta \overline{V} \subseteq F_\beta U$, теорема доказана.

Топологическая группа G называется проективно метризуемой (почти метризуемой в терминологии [10]), если в любой окрестности единицы найдется такая компактная подгруппа H, что фактор-пространство G/H левых смежных классов группы G по подгруппе H метризуемо. Заметим, что метризуемость G/H равносильна существованию такой убывающей счетной системы $\{V_n\}$ окрестностей единицы группы G, что для любой окрестности U единицы найдется такой номер m, что $HV_m \subseteq HU$. Такую систему $\{V_n\}$ назовем определяющей для H. Класс проективно метризуемых групп содержит, в частности, все метризуемые и локально компактные группы.

Теорема 10. *Если проективно метризуемая группа G полна в левой равномерности, то пространство $\mathscr{F}(G)$ полно.*

Доказательство. Пусть H — компактная подгруппа из G и фактор-пространство G/H метризуемо. Ввиду разложимости $\mathscr{F}(G)$ в проективный предел достаточно убедиться в полноте подпространства $\mathscr{F}_H = \{A \in$ $\in \mathscr{F}(G) : AH = A\}$. Поскольку $\mathscr{F}_H$ метризуемо, ограничимся рассмотрением фундаментальной последовательности $\{F_n\}$ элементов из $\mathscr{F}_H$. Обозначим через F множество всех элементов $x \in G$ таких, что для любой окрестности V_x элемента x найдется такой номер m, что $F_n \cap V_x \neq \varnothing$ для всех $n \geqslant m$. Докажем, что $F \neq \varnothing$ и $F = \lim F_n$.

Пусть $\{V_n\}$ — система окрестностей единицы, определяющая H. Построим такую последовательность окрестностей единицы $\{W_n\}$, что $W_n^{-1} =$ $= W_n$, $W_{n+1} H \subseteq HW_n$, $W_n W_n \subseteq W_{n-1} \subseteq V_n$. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $F_n \in S(F_{n+1}, W_{n+1})$.

Выберем произвольный элемент $x_1 \in F_1$. Так как $F \subseteq F_2 W_2$, то $x_1 \in$ $\in x_2 W_2$ для некоторого элемента $x_2 \in F_2$. Значит, $x_1 H \subseteq x_2 W_2 H \subseteq x_2 H W_1$, $x_2 H \subseteq x_1 H W_1$, т. е. $x_2 H \in S(x_1 H, W_1)$. Аналогично выбираем такой элемент

$x_3 \in F_3$, что $x_3H \in S\ (x_2H,\ W_2)$. Из выбора системы окрестностей $\{W_n\}$ $x_mH \in \in S\ (x_nH,\ V_n)$ для всех $m > n$ следует фундаментальность последовательности $\{x_nH\}$. Так как $x_nH \in \mathscr{B}\ (G)$, по теореме 9 последовательность $\{x_nH\}$ сходится к некоторому элементу K. Очевидно, $K \subseteq F$ и $F \neq \varnothing$.

Допустим, что последовательность $\{F_n\}$ не сходится к F. Можно считать, что $F_n \in S\ (F,\ U)$ для всех n и фиксированной окрестности единицы U. Переходя к подпоследовательностям, получаем две возможности.

1) $F_n \not\subseteq FU$ для всех n. Подберем симметричную окрестность единицы V_1 так, чтобы $\overline{V}_1H \subseteq HU$. Дополним V_1 до системы окрестностей $\{V_n\}$, определяющей H. Как и выше, построим сходящуюся последовательность $\{x_nH\}$, $x_n \in F_n$, причем $x_1 \in F_1 \setminus FU$. Если $K = \lim x_nH$, то $K \subseteq \subseteq x_1H\overline{V}_1$. Поскольку $K \subseteq F$, то $x_1 \in F\overline{V}H \subseteq FU$ — противоречие.

2) $F \not\subseteq F_nU$ для всех n. Пусть V — окрестность единицы и $VV^{-1} \subseteq U$. В силу фундаментальности $\{F_n\}$ найдется такой номер m, что $F_n \subseteq F_mV$ для всех $n > m$. Но тогда $F \subseteq \overline{F_mV} \subseteq F_mVV^{-1} \subseteq F_mU$. Теорема доказана.

Замечание 7. Покажем, что для произвольных полных групп теорема 10, вообще говоря, неверна. Пусть G — такая полная абелева группа, что фактор-группа G/H по некоторой замкнутой подгруппе H не является полной (см., например, [11, с. 107]). Так как подпространство $\{xH,\ x \in \in G\}$ замкнуто в $\mathscr{F}\ (G)$ и равномерно гомеоморфно G/H, то $\mathscr{F}\ (G)$ неполно. Если в качестве G взять группу экспоненты 2, то $\{xH,\ x \in G\}$ равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству $\{\langle x \rangle\ H,\ x \in G\}$ из $\mathscr{L}\ (G)$. Значит, для полной группы G пространство $\mathscr{L}\ (G)$ также может быть неполным.

1. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры.— М. : Наука, 1968.— 272 с.
2. *Протасов И. В.* О топологиях в решетке подгрупп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 2.— С. 29—32.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М. : Мир, 1986.— 751 с.
4. *Гуран И. И.* О топологических группах, близких к финально компактным // Докл. АН СССР.— 1981.— **256**, № 6.— С. 1305—1307.
5. *Протасов И. В., Сарыев А.* Полугруппа замкнутых подмножеств топологической группы // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-тех., хим. и геол. наук.— 1988.— № 3.— С. 21—25.
6. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М. : Наука, 1973.— 520 с.
7. *Stephenson R. M.* Minimal topological groups // Math. Ann.— 1971.— **192**, N 3.— P. 193—195.
8. *Величко Н. В.* О пространстве замкнутых подмножеств // Сиб. мат. журн.— 1975.— **16**, № 3.— С. 627—629.
9. *Комаров Ю. А., Протасов И. В.* Компактность в решетке подгрупп топологической группы // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 2.— С. 184—189.
10. *Пасынков Б. А.* Почти метризуемые топологические группы // Докл. АН СССР.— 1965.— **161**, № 2.— С. 281—284.
11. *Конструкции* топологических колец и модулей / В. И. Арнаутов, М. И. Водинчар, С. Т. Главацкий, А. В. Михалев.— Кишинев: Штиинца, 1988.— 170 с.

Киев. ун-т Получено 19.12.88