УДК 517.926

Нгуен Ван Минь

О топологической классификации неоднородных дифференциальных уравнений

Для топологической классификации неоднородных уравнений введено новое определение топологической эквивалентности неавтономных уравнений. Доказано, что неоднородное уравнение топологически эквивалентно стандартному уравнению $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ при условии э-дихотомии однородного уравнения.

Для топологічної класифікації неоднорідних рівнянь введено нове визначення топологічної еквівалентності неавтономних рівнянь. Доведено, що неоднорідне рівняння топологічно еквівалентне стандартному рівнянню $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ при умові е-дихотомії однорідного рівняння.

В настоящей работе рассматривается неоднородное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная ограниченная матричная функция, $f(t)$ — непрерывная ограниченная векторная функция.

В работах [1, 2] исследована топологическая эквивалентность линейных неавтономных уравнений и нелинейных неавтономных уравнений в окрестности стационарного решения. Для топологической классификации уравнений (1) введем новое определение топологической эквивалентности неавтономных уравнений. Докажем, что уравнение (1) топологически эквивалентно стандартному уравнению $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ при условии э-дихотомии однородного уравнения.

О п р е д е л е н и е. *Пусть даны уравнения*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2}$$

и

$$\dot{y} = g(t, y), \tag{3}$$

удовлетворяющие условиям теоремы существования и единственности и имеющие продолжимые на R решения. Уравнение (2) *топологически эквивалентно уравнению* (3), *если существует гомеоморфизм* $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющий следующим условиям*:

1) $H(t, x) = (t, h_t(x))$, *где* h_t — *гомеоморфизм* : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

2) *Если* $x(t)$ — *решение уравнения* (2), *то* $h_t(x(t))$ — *решение уравнения* (3). *Обратно, если* $y(t)$ — *решение уравнения* (3), *то* $h_t^{-1}(y(t))$ — *решение уравнения* (2);

3) $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|h_t(x)\| = \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|h_t^{-1}(x)\| = +\infty$ *равномерно относительно* $t \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а. *Если уравнение* $\dot{x} = A(t)x$, *где* A — *непрерывная ограниченная матричная функция*, $t \in \mathbb{R}$, *э-дихотомично, то оно топологически эквивалентно стандартному уравнению* $\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [3, 4] вытекает, что существует преобразование Ляпунова $x = L(t)y$, которое переводит уравнение $\dot{x} = A(t)$ в систему уравнений

$$\dot{y}_1 = A_1(t)y_1, \quad y_1 \in \mathbb{R}^k,$$

$$\dot{y}_2 = A_2(t)y_2, \quad y_2 \in \mathbb{R}^{n-k},$$

и постоянные K, $\alpha > 0$ такие, что

$$\|Y_1(t)\ Y_1^{-1}(s)\| \leqslant K \exp(-\alpha(t-s)), \quad t \geqslant s,$$

$$\|Y_2(t)\ Y_2^{-1}(s)\| \leqslant K \exp(-\alpha(s-t)), \quad s \geqslant t,$$

где $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ — соответственные фундаментальные матрицы $\dot{y}_1 = A_1(t)y_1$, $\dot{y}_2 = A_2(t)y_2$. Теперь докажем, что уравнение $\dot{y}_2 = A_2(t)y_2$ топологически эквивалентно уравнению $\dot{x}_2 = x_2$ (аналогично уравнение $\dot{y}_1 = A_1(t)y_1$ — уравнению $\dot{x}_1 = -x_1$).

Из [3—5] следует, что существует квадратичная форма $V(t, x) = \langle S(t)x, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая следующим условиям : существуют постоянные a, $b > 0$ и выполняются соотношения

$$a\|x\|^2 \geqslant \langle S(t)x, x\rangle \geqslant \|x\|^2,$$

$$b\|x\|^2 \geqslant \langle(\dot{S}(t) + S(t)A_2(t) + A_2^T(t)S(t))x, x\rangle \geqslant \|x\|^2.$$

Обозначим $Y(t, s) = Y_2(t)Y_2^{-1}(s)$. Рассмотрим функцию $f(t, s, y) = V(t, Y(t, s)y)$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Легко видеть, что

$$b\|Y(t, s)y\| \geqslant \frac{\partial f}{\partial t}(t, s, y) \geqslant \|Y(t, s)y\|^2.$$

Отсюда вытекает, что $f(., s, y)$ — гомеоморфизм : $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ при $y \neq 0$. Кроме того, при $y \neq 0$ существует функция $t = t(s, y)$, удовлетворяющая уравнению $f(t(s, y), s, y) = 1$. Имеем

$$V(s, y) - 1 = \int\limits_{t(s,y)}^{s} \frac{d}{du} V(u, Y(u, s)y)\, du.$$

Следовательно,

$$|s - t(s, y)| \leqslant |\langle S(s)y, y\rangle - 1| / \inf_{u \in [t(s,y), s]} \frac{d}{du} V(u, Y(u, s)y).$$

Если $V(s, y) \geqslant 1$, то имеем $t(s, y) \leqslant s$. Тогда $1 \leqslant V(u, Y(u, s)y) \leqslant \leqslant a \| Y(u, s)y\|^2$ при $u \in [t(s, y), s]$. С другой стороны,

$$\frac{d}{du} V(u, Y(u, s)y) \geqslant \| Y(u, s)y\|^2 \geqslant \frac{1}{a} > 0 \text{ при } u \in [t(s, y), s].$$

Тогда

$$0 \leqslant s - t(s, y) \leqslant a(a\| x\|^2 - 1). \tag{4}$$

Если $\| x\| \leqslant 1/\sqrt{a}$, то имеем

$$0 \leqslant 1 - V(s, y) \leqslant b \int_s^{t(s,y)} \| Y(u, s)y\|^2 du \leqslant$$

$$\leqslant b \int_s^{t(s,y)} \| y\|^2 \exp(2M(u - s))\, du,$$

где $M = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \| A(t)\|$. Поэтому

$$0 \leqslant \frac{1 - a\| y\|^2}{b\| y\|^2} \leqslant \frac{1}{2M}(\exp(2M(t(s, y) - s)) - 1),$$

$$0 < 2M\,\frac{1 - a\| y\|^2}{b\| y\|^2} + 1 \leqslant \exp(2M(t(s, y) - s)), \tag{5}$$

$$\frac{1}{2M} \ln\left(2M\,\frac{1 - a\| y\|^2}{b\| y\|^2} + 1\right) \leqslant t(s, y) - s.$$

Определим гомеоморфизм H следующим образом:

$$H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad H(s, y) = (s, h_1(y)),$$

где $h_s(y) = \exp(s - t(s, y))\| Y(t(s, y), s)y\|^{-1} Y(t(s, y), s)y$ при $y \neq 0$, $h_s(0) = 0$.

Покажем, что H — непрерывное отображение. Действительно, при $y \neq 0$ из определения функции $t = t(s, y)$ вытекает, что H непрерывно зависит от (s, y) (даже дифференцируемо). При $y \neq 0$ имеем

$$\| h_s(y)\| = \exp(s - t(s, y)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Из (4), (5) следует, что существует неубывающая на $[0, +\infty)$, непрерывная при $x = 0$ функция L' такая, что $L'(0) = 0$ и имеет место

$$\| h_s(y)\| \leqslant L'(\| y\|) \quad \forall\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Ясно, что

$$h_s^{-1}(x) = [V(u, x)]^{-1/2} Y(s, u)x \text{ при } x \neq 0,$$

$$h_s^{-1}(x) = 0 \text{ при } x = 0,$$

где $u = s - \ln\| x\|$. Получаем

$$\| h_s^{-1}(x)\| \leqslant K\| x\| [V(u, x)]^{-1/2} \exp(-\alpha(u - s)) \text{ при } \| x\| \leqslant 1,$$

$$\| h_s^{-1}(x)\| \leqslant K\| x\|^{\alpha} \text{ при } \| x\| \leqslant 1.$$

При $\| x\| > 1$ имеем

$$\| h_s^{-1}(x)\| \leqslant \| x\| [V(u, x)]^{-1/2} \exp(M \ln\| x\|) \leqslant \| x\|^M.$$

Положив $L''(u) = \max(Ku^{\alpha}, u^M)$, $u \geqslant 0$, получим

$$\| h_s^{-1}(x)\| \leqslant L''(\| x\|). \tag{7}$$

Из (6), (7) следует, что существует неубывающая, непрерывная при $x = 0$ функция $L: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $L(0) = 0$ такая, что $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \max(\| h_t(x)\|, \| h_t^{-1}(x)\|) \leqslant L(\| x\|)$.

Отсюда следует

$$\lim_{x\to 0}\|h_t(x)\| = \lim_{x\to 0}\|h_t^{-1}(x)\| = 0,$$

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\|h_t(x)\| = \lim_{\|x\|\to+\infty}\|h_t^{-1}(x)\| = +\infty$$

равномерно относительно $t\in\mathbb{R}$. Таким образом, H — непрерывное отображение. Теперь проверим, что H удовлетворяет условию 2 определения. Действительно, если $y(t)$ — решение уравнения $\dot{y}_2 = A_2(t)y_2$, то $y(t) = Y(t, 0)y_0$ при $y_0\in\mathbb{R}^{n-k}$. По определению $t = t(s, y(s))$. Имеем

$$\langle S(t)Y(t, s)y(s),\ Y(t, s)y(s)\rangle = 1.$$

Следовательно,

$$\langle S(t)Y(t, s)Y(s, 0)y_0,\ Y(t, s)Y(s, 0)y_0\rangle = 1,$$

$$\langle S(t)Y(t, 0)y_0,\ Y(t, 0)y_0\rangle = 1.$$

Тогда получим $t(s, y(s)) = t(0, y_0) = \mathrm{const}$.
По определению h_s имеем

$$h_s(y(s)) = \exp(s - t(0, y_0))\frac{Y(t(0, y_0), s)Y(s, 0)y_0}{\|Y(t(0, y_0), s)Y(s, 0)y_0\|} =$$

$$= \exp(s)\frac{\exp(-t(0, y_0))}{\|Y(t(0, y_0), s)y_0\|}Y(t(0, y_0), 0)y_0.$$

Следовательно, $h_s(y(s))$ — решение стандартного уравнения $\dot{x} = x$, $x\in\mathbb{R}^{n-k}$. Аналогично можно показать, что h_s^{-1} имеет такое же свойство. Теорема доказана.

Наконец, из доказанной теоремы и результатов работы [6] вытекает следующий результат.

Следствие. *Пусть $A(\cdot)$ — непрерывная ограниченная матричная функция, $f(\cdot)$ — непрерывная ограниченная функция, а однородное уравнение — э-дихотомично. Тогда неоднородное уравнение $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ топологически эквивалентно одному из $n+1$ стандартных уравнений $\dot{x}_1 = -x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$, $(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^n$, $x_1\in\mathbb{R}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, имеющих различные топологические типы.*

1. *Palmer K. J.* The Structurally Stable Linear Systems on the half—line are those with exponential dichotomy // J. Diff. Eq.— 1979.— **1**.— P. 16—25.
2. *Бронштейн И. У., Главан В. А.* Теорема Гробман — Хартман для расширений динамических систем // Дифференц. уравнения.— 1978.— **14**, № 8.— С. 1504—1506.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
4. *Coppel W. A.* Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics.— Berlin etc.: Springer, 1978.— V. 629.— 98 p.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 5.— С. 776—788.
6. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука, 1984.— 272 с.

Ханой. ун-т, Вьетнам

Получено 13.09.88