УДК 519.21

Н. С. Братийчук

Величина перескока и поведение абсолютного максимума для процессов с независимыми приращениями

Для процесса с независимыми приращениями и отрицательным средним изучается асимптотическое поведение распределения абсолютного максимума и величины перескока через положительный уровень. Найдены необходимые и достаточные условия существования собственного распределения величины перескока через бесконечный уровень.

Для процесу з незалежними приростами та від'ємним середнім вивчається асимптотична поведінка розподілу абсолютного максимуму та величини перескоку через додатній рівень. Знайдено необхідні та достатні умови існування власного розподілу величини перескоку через нескінченний рівень.

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, $\xi(0) = 0$ — однородный процесс с независимыми приращениями с кумулянтой $\mathrm{Re}\, s = 0$

$$k(s) = \ln M e^{-s\xi(1)} = bs^2/2 - as + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-sx} - 1 + sxI\{|x| \leqslant 1\}) \Pi\{dx\}, \tag{1}$$

где $I\{A\}$ — индикатор множества A. Положим $\xi^+(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$, $\xi^-(t) = \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$, $\xi^\pm = \xi^\pm(\infty)$ и при $x > 0$ обозначим $\tau(x) = \inf\{t : \xi(t) \geqslant x\}$, $\gamma(x) = \xi_{\tau(x)} - x$. Пусть θ_λ — показательно распределенная с параметром $\lambda > 0$ случайная величина, не зависящая от $\xi(t)$. В [1] доказано

$$\lambda(\lambda - k(s))^{-1} = M e^{-s\xi^+(\theta_\lambda)} M e^{-s\xi^-(\theta_\lambda)}, \ \mathrm{Re}\, s = 0. \tag{2}$$

Используя это тождество, в п. 1 настоящей статьи получены некоторые представления для функций $Me^{-s\xi^{\pm}(\theta_\lambda)}$, используемые в п. 3, где изучается поведение функции $P\{\xi^+ > x\}$ при $x \to \infty$. В п. 2 изучается распределение случайной величины $\gamma(x)$ при $x \to \infty$ в случае, когда $m = M\xi(1) < 0$.

1. Пусть $\mathfrak{R}_+(\varepsilon)$ $(\mathfrak{R}_-(\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$, — σ-алгебры борелевских множеств из $]\varepsilon, \infty]$ $([-\infty, -\varepsilon[)$. При $\lambda > 0$ положим

$$Q_\pm\{A, \lambda\} = \mp \lambda^{-1} \int\limits_{\pm 0}^{\mp\infty} \Pi\{A \mp y\} dP\{\xi^{\mp}(\theta_\lambda) \leqslant y\}, \ A \in \mathfrak{R}_\pm(0), \tag{3}$$

где $A \pm y = \{z : z = x \pm y, \ x \in A\}$. Очевидно, $Q_\pm\{\cdot, \lambda\}$ — меры, вообще говоря, неограниченные на $\mathfrak{R}_\pm(0)$, а если $A \in \mathfrak{R}_\pm(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то $Q_\pm\{A, \lambda\} < < \infty$.

Теорема 1. *Для всякого процесса с независимыми приращениями найдутся числа* $\pm\beta_\pm(\lambda) \geqslant 0$, $\beta_\pm(\lambda) < \infty$, *такие, что*

$$(Me^{-s\xi^{\pm}(Q_\lambda)})^{-1} = 1 \mp \int\limits_0^{\pm\infty} (e^{-sx} - 1) Q_\pm\{dx, \lambda\} + \beta_\pm(\lambda) s. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\xi(t)$ — обобщенный пуассоновский процесс с кумулянтой

$$k(s) = c \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{-sx} - 1) dF(x), \quad c > 0. \tag{5}$$

В этом случае из тождества (2) следует

$$(Me^{-s\xi^{+}(\theta_\lambda)})^{-1} + \int\limits_{+0}^{\infty} e^{-sx} dG(x, \lambda) = (\lambda + c) Me^{-s\xi^{-}(\theta_\lambda)} - \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{-sx} dG(x, \lambda), \tag{6}$$

где $G(x, \lambda) = c\lambda^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+0} F(x - y) dP\{\xi^-(\theta_\lambda) \leqslant y\}$. Обозначим функцию в левой части равенства (6) через $\Psi(s, \lambda)$. Поскольку для процесса с кумулянтой (5) функция $(Me^{-s\xi^{+}(\theta_\lambda)})^{-1}$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ [2], то же самое можно сказать и о функции $\Psi(s, \lambda)$. В силу равенства (6) функция $\Psi(s, \lambda)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость, оставаясь при этом ограниченной. По теореме Лиувилля $\Psi(s, \lambda) = c(\lambda)$, и при $s = 0$ имеем $c(\lambda) = 1 - G(0, \lambda)$. С учетом обозначений (3) (в данном случае $\Pi\{dx\} = cd F(x)$) равенство $\Psi(s, \lambda) = 1 - G(0, \lambda)$ можно переписать в виде

$$\int\limits_0^{\infty} (e^{-sx} - 1) Q_+\{dx, \lambda\} = 1 - (Me^{-s\xi^{+}(\theta_\lambda)})^{-1}. \tag{7}$$

Итак, для обобщенного пуассоновского процесса первое тождество в (4) доказано. (В данном случае $\beta_+(\lambda) = 0$.) Пусть теперь $\xi(t)$ — произвольный процесс, а $\xi_n(t)$, $n \geqslant 0$,— последовательность обобщенных пуассоновских процессов таких, что $M\exp(-s\xi_n(1)) \to M\exp(-s\xi(1))$ при $n \to \infty$, $\operatorname{Re} s = 0$. Запишем тождество (7) для процессов $\xi_n(t)$

$$\int\limits_0^{\infty} (e^{-sx} - 1) Q_+^{(n)}\{dx, \lambda\} = 1 - (Me^{-s\xi_n^{+}(Q_\lambda)})^{-1}.$$

Функция в правой части этого равенства сходится при $n \to \infty$ к функции $1 - (Me^{-s\xi^{+}(\theta_\lambda)})^{-1}$, непрерывной в точке $s = 0$ [3, с. 445]. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел функции в левой части указанного равенства, который в силу леммы 3 из [4, с. 43] будет кумулянтой некоторого процесса с независимыми приращениями без отрицательных скачков. Обозначим этот процесс $\tilde{\xi}(t)$, и пусть $\tilde{k}(s)$ — его кумулянта. Тогда

$$(Me^{-s\xi^+(\theta_\lambda)})^{-1} = 1 - \tilde{k}(s), \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0. \tag{8}$$

Если бы процесс $\tilde{\xi}(t)$ был не монотонный, то уравнение $1 - \tilde{k}(s) = 0$ имело бы решение в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ [3], а это противоречит равенству (8). Следовательно,

$$(Me^{-s\xi^+(\theta_\lambda)})^{-1} = 1 - \int_0^\infty (e^{-sx} - 1)\,\tilde{Q}_+\{dx, \lambda\} + \beta_+(\lambda)\, s,$$

где $\beta_+(\lambda) \in [0, \infty[$, а $\tilde{Q}_+\{\cdot, \lambda\}$ — спектральная мера, соответствующая $\tilde{\xi}(t)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $[a, b[\subset [\varepsilon, \infty[$, причем $\tilde{Q}_+\{[a], \lambda\} = \tilde{Q}_+\{[b], \lambda\} = 0$. Процессы $\xi_n(t)$ можно выбрать так, чтобы $\Pi_n\{A\} = \Pi\{A\}$, $n \geqslant 0$, для всякого $A \in \mathfrak{R}_+(\varepsilon)$, где $\Pi_n\{\cdot\}$ — спектральная мера для $\xi_n(t)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\xi_n^-(\theta_\lambda) \leqslant y\} = P\{\xi^-(\theta_\lambda) \leqslant y\}$, $y > 0$ [3, с. 445], то, опять используя лемму 3 из [4], получаем

$$\tilde{Q}_+\{[a, b[, \lambda\} = \lim_{n\to\infty} Q_+^{(n)}\{[a, b[, \lambda\} = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-1} \int_{-\infty}^{+0} \Pi\{[a, b[- y\}\, dP\{\xi_n^-(\theta_\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant y\} = \lambda^{-1} \int_{-\infty}^{+0} \Pi\{[a, b[- y\}\, dP\{\xi^-(\theta_\lambda) \leqslant y\} = Q_+\{[a, b[, \lambda\}.$$

Следовательно, $\tilde{Q}_+\{A, \lambda\} = Q_+\{A, \lambda\}$, $A \in \mathfrak{R}_+(\varepsilon)$, для всякого $\varepsilon > 0$, т. е. $\tilde{Q}_+\{A, \lambda\} = Q_+\{A, \lambda\}$, $A \in \mathfrak{R}_+(0)$, и тождество (4) для $\xi^+(\theta_\lambda)$ доказано. Записывая указанное тождество для процесса $-\xi(t)$, завершаем доказательство теоремы.

Следствие 1. *Для всякого процесса с независимыми приращениями*

$$\lim_{s\to\pm\infty} sMe^{-s\xi^\pm(\theta_\lambda)} = \beta_\pm^{-1}(\lambda).$$

В ряде случаев значение коэффициентов $\beta_\pm(\lambda)$ можно записать в терминах компонент канонической факторизации для функции $k(s) - \lambda$.

Положим $k_\pm(s, \lambda) = \pm \int_0^{\pm\infty} (e^{-sx} - 1)\, Q_\pm\{dx, \lambda\} - \beta_\pm(\lambda)\, s$, $\pm \operatorname{Re} s \geqslant 0$.

Из тождеств (2), (4) легко вытекает такой результат.

Следствие 2. *Справедлива факторизация*

$$k(s) - \lambda = -\lambda\,(k_+(s, \lambda) - 1)(k_-(s, \lambda) - 1), \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

2. Предположим, что $m = M\xi(1) < 0$. Обозначим $\rho = \inf\{s \leqslant 0 : k(s) \leqslant 0\}$, $\mu = \inf\{s \leqslant 0 : |k(s)| < \infty\}$. Очевидно, $\mu \leqslant \rho$, а если $\rho < 0$ и $k(\rho) < 0$, то $\mu = \rho$. Рассмотрим вопрос существования $\lim\limits_{x\to\infty} P\{\gamma(x) \leqslant y/\xi^+ \geqslant x\}$, $y \geqslant 0$, в каждой точке непрерывности предельной функции. Будем предполагать, что выполнено условие А) $P\{\xi^+ = 0\} > 1$, $P\{\xi^+ = x\} = 0$, $x > 0$. Случай, когда $P\{\xi^+ = 0\} = 1$ не интересен, а условие $P\{\xi^+ = x\} = 0$, $x > 0$, введено с целью упрощения доказательства.

Напомним (см., например, [5]), что положительная функция $g(x)$, определенная при $x > 0$, называется локально степенной (л. с.), если для всякого $y > 0$

$$\lim_{x\to\infty} g(x + y)/g(x) = 1.$$

Нетрудно показать, что если $g(x)$ — л. с. функция, то $g(x) = f(\exp x)$, где функция $f(x)$ медленно меняется при $x \to \infty$.

Теорема 2. 1. *Пусть*

$$\lim_{x\to\infty} P\{\gamma(x) \leqslant y/\xi^+ \geqslant x\} = G(y), \quad y \geqslant 0, \tag{9}$$

в каждой точке непрерывности функции $G(\cdot)$ *и* $G(x_0) \neq 0$ *для некоторого* $0 \leqslant x_0 < \infty$. *Тогда* $\rho < 0$,

$$P\{\xi^+ \geqslant x\} = e^{\rho x} g(x), \tag{10}$$

где $g(x)$ — *л. с. функция и*

$$\int_{-0}^{\infty} e^{-sx} dG(x) = \rho\left((s-\rho) Me^{-s\xi^+}\right)^{-1}, \quad \mathrm{Re}\, s > \rho. \tag{11}$$

Кроме того,

$$Б) \quad \int_0^\infty g(x)\,dx \begin{cases} < \infty, & k(\rho) < 0, \\ = \infty, & k(\rho) = 0. \end{cases}$$

2. *Пусть*

$$P\{\xi^+ \geqslant x\} = e^{-\alpha x} g(x), \quad x \geqslant 0,$$

где $\alpha > 0$, $g(x)$ — *л. с. функция. Тогда* $-\alpha = \rho$, *и справедливы соотношения* (9), (11). *Функция* $g(x)$ *удовлетворяет условиям Б*).

Доказательство. Используя строго марковское свойство процесса $\xi(t)$, нетрудно убедиться, что при $0 < x \leqslant y$ справедливо равенство

$$P\{\xi^+ \geqslant y\}/P\{\xi^+ \geqslant x\} = 1 - \int_{-0}^{(y-x)-0} P\{\xi^+ \leqslant y - x - z\}\, dP\{\gamma(x) \leqslant z/\xi^+ \geqslant x\}. \tag{12}$$

Пусть u — точка непрерывности функции $G(\cdot)$. Если (9) выполняется, то с учетом условия А) имеем

$$\lim_{x\to\infty} P\{\xi^+ \geqslant x + u\}/P\{\xi^+ \geqslant x\} = 1 - \int_{-0}^{u} P\{\xi^+ \leqslant u - z\}\, dG(z) \equiv \varphi(u), \ u > 0. \tag{13}$$

Из тождества $P\{\xi^+ \geqslant x + u + v\}/P\{\xi^+ \geqslant x\} = P\{\xi^+ \geqslant x + u\}/P\{\xi^+ \geqslant x\} \times$ $\times P\{\xi^+ \geqslant x + u + v\}/P\{\xi^+ \geqslant x + u\}$ следует, что равенство $\varphi(u+v) =$ $= \varphi(u)\varphi(v)$ выполнено для почти всех (относительно меры Лебега) $u, v > 0$. Поскольку $0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1$, то $\varphi(u) = \exp(-\alpha u)$ с $\alpha \geqslant 0$. Теперь из (13) имеем

$$P\{\xi^+ \leqslant x\} = e^{-\alpha x} g(x), \tag{14}$$

где $g(x)$ — л. с. функция. Если $\alpha = 0$, то

$$\int_{-0}^{u} P\{\xi^+ \leqslant u - z\}\, dG(z) \equiv 0, \quad u > 0,$$

и, учитывая условие А), имеем $G(z) \equiv 0$, $0 \leqslant z < \infty$. Следовательно, $\alpha > 0$. Покажем теперь, что $\mu < 0$. Имеем [3, с. 446]

$$P\{\gamma(x) \leqslant y/\xi^+ \geqslant x\} = 1 - \int_{-0}^{x+0} \int_{-\infty}^{} \Pi\{]\,y - z + u, \infty\,[\}\, dF_-(z) \times$$
$$\times\, d\left(P\{\xi^+ \geqslant x - u\}/P\{\xi^+ \geqslant x\}\right), \tag{15}$$

где $F_-(z) = -\int_0^\infty P\{\xi^-(t) > z\}\, dt$. Из (15) при $x \to \infty$, $y \downarrow 0$ с учетом (14) после несложных преобразований следует

$$\alpha \int_{-\infty}^{+0} e^{\alpha z} \int_{-z}^{\infty} e^{\alpha u} \Pi\{[u, \infty[\}\, du\, dF_-(z) \leqslant 1.$$

Последнее неравенство показывает, что для некоторого $z < 0$, $\int_{-z}^{\infty} e^{\alpha u} \times \Pi\{[u, \infty[\}\, du < \infty$ и, значит, $\mu \leqslant -\alpha < 0$.

Докажем теперь равенство $-\alpha = \rho$. Поскольку $g(x) = f(\exp x)$, где $f(x)$ — медленно меняющаяся при $x \to \infty$ функция, то [6] для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$e^{-\varepsilon x} \leqslant e^{\alpha x} P\{\xi^+ \geqslant x\} = g(x) = e^{\varepsilon x}, \quad x > x(\varepsilon).$$

Из этих неравенств вытекает

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} P\{\xi^+ \geqslant x\}\, dx \begin{cases} < \infty, & s > -\alpha, \\ = \infty, & s < -\alpha. \end{cases}$$

Так как $\mu \leqslant -\alpha < 0$, то для некоторого $\alpha_1 \in]-\alpha, 0[$ тождество (2) справедливо при $\alpha_1 < s < 0$ и при $\lambda \downarrow 0$ из него следует

$$-\left(k(s) \int_{-\infty}^{+0} e^{-sx} dF_-(x)\right)^{-1} = s \int_0^{\infty} e^{-sx} P\{\xi^+ \geqslant x\}\, dx - 1, \ \alpha_1 < s < 0. \tag{16}$$

Функция в левой части равенства (16) ограничена для $\rho < s < 0$, а функция в правой части — для $-\alpha < s < 0$. Следовательно, $-\alpha = \rho$. Из этого же равенства и соотношения (10) вытекает утверждение Б).

Формула (11) следует из равенства

$$\int_{-0}^{u} P\{\xi^+ \leqslant u - z\}\, dG(z) = 1 - e^{\rho u}, \ u \geqslant 0.$$

П. 1 теоремы доказан.

Пусть теперь выполнены условия п. 2. Так же, как и в п. 1 показываем, что $\rho = -\alpha$, и для функции $g(x)$ справедливо утверждение Б).

По теореме Хелли всегда можно указать последовательность $x_n \to \infty$, $n \to \infty$, и функцию распределения (возможно, несобственную) $G(\cdot)$ такую, что

$$\lim_{n \to \infty} P\{\gamma(x_n) \leqslant y / \xi^+ \geqslant x_n\} = G(y), \quad y \geqslant 0, \tag{17}$$

во всех точках непрерывности функции $G(\cdot)$. Из формулы (12) при $x = x_n$, $y = x_n + u$, $u \geqslant 0$, $n \to \infty$, получаем

$$e^{\rho u} = 1 - \int_{-0}^{u} P\{\xi^+ \leqslant u - z\}\, dG(z), \quad u \geqslant 0.$$

Поскольку это равенство определяет функцию $G(\cdot)$ однозначно, то предел в (17) не зависит от последовательности x_n. Формулу (11) получаем так же, как и в п. 1 теоремы. Теорема доказана.

3. Как показано в п. 2, распределение величины перескока через бесконечно удаленный уровень тесно связано с поведением функции $P\{\xi^+ \geqslant x\}$ при $x \to \infty$. Поэтому изучим распределение случайной величины ξ^+. Как и раньше, считаем, что $M\xi(1) < 0$.

Положим

$$Q_+\{A\} = \int_{-\infty}^{+0} \Pi\{A - y\}\, dF_-(y), \quad A \in \mathfrak{R}_+(0). \tag{18}$$

Поскольку $F_-(y) = -\int\limits_0^\infty P\{\xi^-(t) > y\}\, dt$ — монотонно возрастающая функция и [7] $y^{-1}F_-(y) \to -m^{-1}$, $y\to\infty$, то равенство (18) определяет меру $Q_+\{\cdot\}$ на $\Re_+(0)$. Указанная мера, вообще говоря, не ограничена, однако, если $A \in \Re_+(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то $Q_+\{A\} < \infty$. Из первого соотношения в (4) при $\lambda \downarrow 0$ следует

$$(Me^{-s\xi^+})^{-1} = 1 - \int\limits_0^\infty (e^{-sx} - 1)\, Q_+\{dx\} + \beta_+ s, \tag{19}$$

где $0 \leqslant \beta_+ < \infty$.

Пусть $\zeta(t)$, $t \geqslant 0$, $\zeta(0) = 0$ — однородный неубывающий процесс с независимыми приращениями с кумулянтой $k_+(s) = -\beta_+ s + \int\limits_0^\infty (e^{-sx} - 1)\, Q_+\{dx\}$. Если $\mu < 0$, то из (2) при $\lambda \downarrow 0$ вытекает

$$1 - k_+(s) = k(s) \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{-sx} dF_-(x),\ \mu < \operatorname{Re} s < 0. \tag{20}$$

При $x \geqslant 0$ обозначим

$$W(x) = e^{-\rho x} P\{\xi^+ \geqslant x\},\ N(x) = -e^{-\rho x}\int\limits_0^1 e^{-t} dP\{\zeta(t) \leqslant x\},$$

$$M(x) = e^{-1} \int\limits_{-0}^{x} e^{-\rho y}\, dP\{\zeta(1) \leqslant y\}.$$

Используя соотношение (19), убеждаемся в справедливости равенства

$$W(x) = N(x) + \int\limits_{-0}^{x} W(x-y)\, dM(y), \quad x \geqslant 0. \tag{21}$$

Из (20) следует, что $0 \leqslant k_+(s) \leqslant 1$ при $s > \rho$ и $k_+(\rho) = 1$ только тогда, когда $k(\rho) = 0$. Поскольку $M(\infty) = \exp(k_+(\rho) - 1) \leqslant 1$, то можно считать, что $M(\cdot)$ — функция распределения (вообще говоря, несобственная), сосредоточенная на положительной полуоси, и тогда (21) — уравнение восстановления для $W(\cdot)$. Функция распределения $P\{\zeta(1) \leqslant y\}$ может быть арифметической только тогда, когда $\beta_+ = 0$ и мера $Q_+\{\cdot\}$ сосредоточена на некоторой решетке в множестве $]0, \infty[$. Поскольку в принятых условиях функция $F_-(y)$ непрерывна при $y < 0$, то функция $P\{\zeta(1) \leqslant y\}$, а следовательно, и функция $M(\cdot)$ неарифметичны.

Обозначим $g(x) = \int\limits_0^x N(x-y)\, dU(y)$, где $U(\cdot)$ — функция восстановления, соответствующая $M(\cdot)$. Следующая теорема вытекает из основной теоремы восстановления.

Теорема 3. *Пусть* $\rho < 0$. *Тогда*

а) если $\mu < \rho$ $k(\rho) = 0$, *то для всякого* $\varepsilon \in]0, \rho - \mu[$ $P\{\xi^+ \geqslant x\} = ce^{\rho x} + o(e^{(\rho-\varepsilon)x})$, *где*

$$c = \left(-\rho k'(\rho) \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{\rho x} dF_-(x)\right)^{-1};$$

б) если $\rho = \mu$, $k(\rho) = 0$, $k'(\rho) > -\infty$, *то* $P\{\xi^+ \geqslant x\} = e^{\rho x}(c + 0(1))$;

в) если $\rho = \mu$, $k(\rho) = 0$, $k'(\rho) = -\infty$, то $P\{\xi^+ \geqslant x\} = e^{\rho x} g(x)$, *причем* $g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *и* $\int\limits_0^\infty g(y)\, dy = \infty$;

г) если $k(\rho) < 0$, *то* $P\{\xi^+ \geqslant x\} = e^{\rho x} g(x)$, *причем* $g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$ *и* $\int\limits_0^\infty g(y)\,dy < \infty$.

Рассмотрим более подробно случай в). Положим $u(x) = \int\limits_0^x g(y)\,dy = \int\limits_0^x e^{-\rho y} P\{\xi^+ \geqslant y\}\,dy$. Поскольку

$$1 - k_+(s + \rho) = -\hat{k}(s) \equiv \beta_+ s - \int\limits_0^\infty (e^{-sx} - 1) e^{-\rho x} Q_+\{dx\}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant 0,$$

то из (19) следует

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,du(x) = (1 + \hat{k}(s))/(s + \rho)\,\hat{k}(s)).$$

Предположим, что

$$\lim_{s \downarrow 0} \hat{k}(\tau s)/\hat{k}(s) = \gamma(\tau) \tag{22}$$

при $\tau > 0$ и функция $\gamma(\tau)$ конечна и положительна в некотором интервале. Тогда [6] $\gamma(\tau) = \tau^{-q}$, $0 \leqslant q < \infty$, и из (22) и тауберовой теоремы следует

$$u(x) = (-\rho \hat{k}(x^{-1})\,\Gamma(q + 1))^{-1} (1 + o(1)),$$

т. е., учитывая (20), имеем

$$u(x) = \Big(\rho \Gamma(q + 1)\, k(x^{-1} + \rho) \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{-\rho x} dF_-(x)\Big)^{-1} (1 + o(1)). \tag{23}$$

Из (20) вытекает, что условие (22) эквивалентно такому:

$$\lim_{s \downarrow 0} k(\tau s + \rho)/k(s + \rho) = \gamma(\tau), \ \ \tau > 0.$$

Используя правило Лопиталя, из (23) получаем

$$\lim_{x \to \infty} g(x + g)/g(x) = \lim_{x \to \infty} k((x + y)^{-1} + \rho)/k(x^{-1} + \rho) = 1.$$

Следовательно, $g(x)$ — л. с. функция. В этом случае, так же как и в условиях а), б) теоремы 3, справедливы соотношения (9), (11).

Если функция $\exp(-\rho y)\,P\{\xi^+ \geqslant y\}$ монотонна, начиная с некоторого y, то при выполнении условия (22) имеем

$$P\{\xi^+ \geqslant y\} = e^{\rho y} \Big(\rho \Gamma(q) \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{-\rho x} dF_-(x)\, y k(y^{-1} + \rho)\Big)^{-1} (1 + o(1)).$$

В заключение сделаем несколько замечаний. Распределение $P\{\xi^+ < x\}$ для процессов с кумулянтой (1) изучалось многими авторами. Отметим только работу [8], в которой получены представления для $P\{\xi^+ \geqslant x\}$ при $x \to \infty$ в различных предположениях на исходный процесс. Эти исследования основаны на канонической факторизации для функции $k(s) - \lambda$. П. а) теоремы 3 можно рассматривать как обобщение этих результатов.

Теоремы 2, 3 можно рассматривать как аналоги результатов для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин из работ [5, 9].

Уравнение восстановления для функции $P\{\xi^+ \geqslant x\}$ в случае, когда $\xi(t)$ — процесс со скачками одного знака получено в [10].

1. *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— **11**, вып. 4.— С. 656—670.
2. *Братийчук Н. С., Королюк В. С.* Резольвента однородного процесса с независимыми приращениями, обрывающегося на полуоси // Там же.— 1985.— **30**, вып. 2.— С. 368—372.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2.— 639 с.
4. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М. : Наука, 1972.— 414 с.
5. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М. : Наука, 1972.— 368 с.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т.— М. : Мир, 1984.— Т. 2.— 738 с.
7. *Братийчук Н. С.* Положение процесса с независимыми приращениями в момент выхода из интервала // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 5.— С. 660—663.
8. *Рогозин Б. А.* Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Сиб. мат. журн.— 1969.— **10**, № 6.— С. 1334—1363.
9. *Рогозин Б. А.* О распределении величины первого перескока // Теория вероятностей и ее применения.— 1964.— **9**, вып. 3.— С. 498—515.
10. *Королюк В. С., Супрун В. Н., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака // Там же.— 1976.— **21**, вып. 2.— С. 253—259.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 21.06.88