УДК 519.217

Б. В. Бондарев

Об усреднении в стохастических системах с зависимостью от всего прошлого

Для стохастических систем, подверженных слабо зависимым случайным воздействиям, обоснован принцип усреднения. Для нормированных флуктуаций решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения построены экспоненциальные оценки типа неравенств С. Н. Бернштейна для сумм независимых случайных величин.

Для стохастичних систем, підданих слабко залежним випадковим діянням, обгрунтований принцип усереднення. Для нормованих флуктуацій розв'язку вихідного рівняння відносно розв'язку усередненого рівняння побудовані експоненціальні оцінки типу нерівностей С. Н. Бернштейна для сум незалежних випадкових величин.

Введение. Пусть R — одномерное евклидово пространство, Φ — множество ограниченных функций $\varphi(s)$, $s \in (-\infty, 0]$, со значениями в R и полунормой

$$\| \varphi \| = \left\{ \int_{-\infty}^{0} |\varphi(s)|^2 K(ds) \right\}^{1/2},$$

где $K(A)$ — некоторая счетно-аддитивная мера борелевских множеств полуоси $(-\infty, 0]$, $K(-\infty, 0] = K^2 < +\infty$.

Пусть $\xi_\varepsilon(t)$ — некоторый случайный процесс со значениями в R, зависящий от параметра $\varepsilon > 0$, определенный на $(-\infty, +\infty)$. Пусть θ_t — оператор, ставящий в соответствие траектории процесса $\xi_\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$, траекторию $\xi_t^\varepsilon(\cdot) = \xi_\varepsilon(t+s)$, $s \leqslant 0$, $t \in [0, +\infty)$, т. е. отрезок траектории на промежутке от $-\infty$ до $t \in [0\ +\infty)$.

Предположим, что $\xi_\varepsilon(t)$ является решением уравнения

$$d\xi_\varepsilon(t)/dt = \varepsilon F(t, \theta_t \xi_\varepsilon(\cdot), \omega), \tag{1}$$

$\xi_\varepsilon(s) = \varphi_0(s)$, $s \leqslant 0$, $\sup\limits_{s \in (-\infty, 0]} |\varphi_0(s)| \leqslant C_0 < +\infty$, $\varphi_0(s)$ — неслучайная функция, где $F(t, \varphi, \omega)$ при фиксированном $\varphi \in \Phi$ — случайная функция, удовлетворяющая условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) [1]; при фиксированных $t \in [0, +\infty)$, $\omega \in \Omega$ $F(t, \varphi, \omega)$ — функционал, определенный на множестве функций Φ.

В дальнейшем предполагаем, что с вероятностью 1

$$|F(t, \varphi, \omega)| \leqslant C(1 + \|\varphi\|), \tag{2}$$

$$|F(t, \varphi, \omega) - F(t, \psi, \omega)| \leqslant L\|\varphi - \psi\|. \tag{3}$$

Как показано в [2], решение уравнения (1) при выполнении условий (2), (3) существует и единственно.

Известно [3—8], что представляет большой интерес обоснование принципа усреднения для систем вида (1) и изучение флуктуаций решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения.

В настоящей статье принцип усреднения обосновывается для задачи (1). Показано, что при некоторых требованиях усреднение стохастического уравнения с зависимостью от всего прошлого приводит к детерминированному уравнению без зависимости от прошлого; в равномерной метрике можно построить доверительный интервал для решения (1) с границами, определяемыми решением усредненного уравнения. Основой для построения упомянутой доверительной полосы являются установленные экспоненциальные неравенства больших уклонений типа известных неравенств С. Н. Бернштейна для сумм независимых величин [1].

1. Используя стандартные для данной схемы усреднения приемы [3], [5], нетрудно установить следующий факт.

Теорема 1. *Пусть процесс $F(t, \varphi, \omega)$ удовлетворяет закону больших чисел в следующей форме:*

$$\sup_{\varphi\in\Phi, t\in[0,+\infty)} \left| \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(s, \varphi, \omega)\, ds - F_0(\varphi)\right| \to 0, \qquad T \to \infty, \tag{4}$$

по вероятности. Тогда

$$\sup_{t\in[0, T/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{5}$$

по вероятности, где $X_0^\varepsilon(t)$ — решение усредненной задачи

$$dX_0^\varepsilon/dt = \varepsilon F_0(\theta_t X_0^\varepsilon(\cdot)), \quad X_0^\varepsilon(s) = \varphi_0(s), \quad s \leqslant 0. \tag{6}$$

Доказательство. Справедливо неравенство

$$\sup_{t\in[0,\tau/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)| \leqslant L\int_0^\tau \|\theta_{s/\varepsilon}[\xi_\varepsilon(\cdot) - X_0^\varepsilon(\cdot)]\|\, ds +$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^T [F(\tau/\varepsilon, \theta_{\tau/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - F_0(\theta_{\tau/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\, d\tau\right|. \tag{7}$$

Используя неравенство Гроноулла, из (7) с учетом того, что

$$\sup_{t\in[0,\tau]} \|\theta_{t/\varepsilon}[\xi_\varepsilon(\cdot) - X_0^\varepsilon(\cdot)]\| \leqslant K \sup_{t\in[0,\tau/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)|, \tag{8}$$

имеем

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t [F(\tau/\varepsilon, \theta_{\tau/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - F_0(\theta_{\tau/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\, d\tau\right| \exp\{LT\}. \tag{9}$$

Покажем, что правая часть (9) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ — некоторое δ-разбиение отрезка $[0, T]$, $\delta = t_{k+1} - t_k$. Имеют место соотношения

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]} |X_0^\varepsilon(t)| \leqslant C_1(C_0, C, K, T).$$

$$C_1(C_0, C, K, T) = [C_0 + C + C_0K]\exp\{KCT\}, \tag{10}$$

$$\sup_{\substack{|t-s|\leqslant h\\ 0<s<t\leqslant T}} |X_0^\varepsilon(t/\varepsilon) - X_0^\varepsilon(s/\varepsilon)| \leqslant C_2(C_0, C, K, T)\,h,$$

$$C_2(C_0, C, K, T) = C + C_0CK + CK[C_0 + C + + C_0K]\exp\{KCT\}. \tag{11}$$

Действительно, с учетом (8) имеем

$$\sup_{\tau\in[0,t/\varepsilon]} |X_0^\varepsilon(\tau)| \leqslant C_0 + \int_0^t C(1 + \|\theta_{s/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot)\|)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C_0 + \int_0^t C\big(1 + C_0K + K\sup_{\tau\in[0,s/\varepsilon]}|X_0^\varepsilon(\tau)|\big)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C_0 + C(1 + C_0K)T + CK\int_0^t \sup_{\tau\in[0,s/\varepsilon]}|X_0^\varepsilon(\tau)|\,ds.$$

Использовав лемму Гронуолла, получим (10). Оценка (11) также очевидна.

Покажем, что для $k = \overline{1, n-1}$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t_k\leqslant t\leqslant t_k+\delta(\varepsilon)} \|\theta_{t_k/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot) - \theta_{t/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot)\| \leqslant \rho(\varepsilon) \to 0,$$

если $\delta(\varepsilon) \to 0$ так, что $\delta(\varepsilon)/\varepsilon \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$. В самом деле,

$$\|\theta_{t_k/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot) - \theta_{t/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot)\|^2 = \int_{-\infty}^0 |X_0^\varepsilon(t_k/\varepsilon + s) - X_0^\varepsilon(t/\varepsilon + s)|^2 K(ds) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-t/\varepsilon} |\varphi_0(t_k/\varepsilon + s) - \varphi_0(t/\varepsilon + s)|^2 K(ds) + \int_{-t/\varepsilon}^{-t_k/\varepsilon} |\varphi_0(t_k/\varepsilon + s) -$$

$$- X_0^\varepsilon(t/\varepsilon + s)|^2 K(ds) + \int_{-t_k/\varepsilon}^0 |X_0^\varepsilon(t/\varepsilon + s) - X_0^\varepsilon(t_k/\varepsilon + s)|^2 K(ds) \leqslant$$

$$\leqslant 4C_0^2 \int_{-\infty}^{-\delta(\varepsilon)/\varepsilon} K(ds) + 2C_1^2(C_0, C, T, K)\int_{-\infty}^{-\delta(\varepsilon)/\varepsilon} K(ds) +$$

$$+ C_2^2(C_0, C, T, K)\,\delta^2(\varepsilon)K = \rho(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{12}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \varepsilon\left|\int_0^{t/\varepsilon} [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - F_0(\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant n-1} \varepsilon\left|\sum_{i=1}^k \int_{t_i/\varepsilon}^{(t_i+\delta(\varepsilon))/\varepsilon} [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - F_0(\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right| +$$

$$+ 4C(1 + C_1(C_0, C, T, K))\,\delta(\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left|\sum_{i=1}^k \delta(\varepsilon)\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\int_{t_i/\varepsilon}^{(t_i+\delta(\varepsilon))/\varepsilon} [F(\tau, \theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - F_0(\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right| +$$

$$+\sup_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\int\limits_{t_k/\varepsilon}^{(t_k+\delta(\varepsilon))/\varepsilon}[F(\tau,\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-F(\tau,\theta_{t_k/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)]\,d\tau\right|+$$

$$+\sup_{1\leqslant k<n}\left|\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\int\limits_{t_k/\varepsilon}^{(t_k+\delta(\varepsilon))/\varepsilon}[F_0(\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot))-F_0(\theta_{t_k/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right|+$$

$$+4C(1+C_1(C_0,C,T,K))\,\delta(\varepsilon)\leqslant 2TL\rho(\varepsilon)+4C(1+C_1(C_0,C,T,K))\,\delta(\varepsilon)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\delta(\varepsilon)\left|\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\int\limits_{t_i/\varepsilon}^{(t_i+\delta(\varepsilon))/\varepsilon}[F(\tau,\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-F_0(\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right|. \qquad (13)$$

Последнее слагаемое в (13) по вероятности стремится к нулю, если $\delta(\varepsilon)\to\to 0$ так, что $\delta(\varepsilon)/\varepsilon\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\delta(\varepsilon)\left|\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\int\limits_{t_i/\varepsilon}^{(t_i+\delta(\varepsilon))/\varepsilon}[F(\tau;\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-F_0(\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant T\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\int\limits_{t_i/\varepsilon}^{(t_i+\delta)/\varepsilon}[F(\tau,\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot),\omega)-F_0(\theta_{t_i/\varepsilon}X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$ по вероятности. Отсюда и из (13) получаем с учетом (9) утверждение теоремы 1.

Замечание. В случае, когда

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{0}s^2K(ds)=0, \qquad (14)$$

тогда уравнение (6) примет вид

$$dx_0^\varepsilon/dt=\varepsilon F_0(\overline{\theta}_t X_0^\varepsilon(\cdot)),\quad X_0^\varepsilon(0)=\varphi(0), \qquad (15)$$

где

$$\overline{\theta}_t X(\cdot)=\begin{cases}X(t), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ \varphi(s), & s<0,\end{cases}$$

т. е. усредненное уравнение в данном случае не имеет зависимости от прошлого. В самом деле, пусть $Z_0^\varepsilon(t)$ — решение задачи (6), $X_0^\varepsilon(t)$ — решение задачи (15); тогда, учитывая (11), имеем

$$\sup_{t\in[0,\tau/\varepsilon]}|X_0^\varepsilon(t)-Z_0^\varepsilon(t)|\leqslant LK\int\limits_0^\tau\sup_{s\in[0,t/\varepsilon]}|X_0^\varepsilon(s)-Z_0^\varepsilon(s)|\,dt+$$

$$+L\int\limits_0^T\left(\int\limits_{-t/\varepsilon}^{0}|Z_0^\varepsilon(t/\varepsilon)-Z_0^\varepsilon(t/\varepsilon+s)|^2K(ds)\right)^{1/2}dt\leqslant$$

$$\leqslant LK\int\limits_0^\tau\sup_{s\in[0,t/\varepsilon]}|X_0^\varepsilon(s)-Z_0^\varepsilon(s)|\,dt+LC(C+C_1(C_0,C,T,K))\times$$

$$\times T^2\left(\frac{\varepsilon^2}{T^2}\int\limits_{-T/\varepsilon}^{0}s^2K(ds)\right)^{1/2}.$$

Отсюда, используя лемму Гронуолла, имеем в силу условия (14)

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}|Z_0^\varepsilon(t)-X_0^\varepsilon(t)|\to 0,\qquad \varepsilon\to 0, \qquad (16)$$

а в силу (5) —

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}|\xi_\varepsilon(t)-Z_0^\varepsilon(t)|\to 0,\qquad \varepsilon\to 0,$$

по вероятности.

2. Как известно [3—8], специфика вероятностного случая метода усреднения проявляется при исследовании флуктуаций решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения. В этом пункте построим экспоненциальные оценки сверху для вероятности уклонения в равномерной метрике флуктуаций за уровень. В случае независимых случайных величин неравенства подобного типа известны как неравенства С. Н. Бернштейна [1].

Введем некоторые определения и понятия. Будем говорить, что при фиксированном $\varphi \in \Phi$ случайная функция $F(t, \varphi, \omega)$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (перемешивание по Ибрагимову), если [1, 8]

$$\sup_{s\geqslant 0}\sup_{A\in\mathfrak{F}_0^s,\ B\in\mathfrak{F}_{s+\tau}^{+\infty}} |P(B/A) - P(B)| = \psi(\tau) \to 0, \qquad \tau \to +\infty, \tag{17}$$

где $\mathfrak{F}_0^s$ — σ-алгебра, порожденная на основании вероятностного пространства Ω процессом $F(t, \varphi, \omega)$, $\mathfrak{F}_{s+\tau}^{+\infty}$ — σ-алгебра, порожденная на Ω процессом $F(t, \varphi, \omega)$, $\tau + s \leqslant t < +\infty$.

Пусть $\xi_\varepsilon(t) = [\xi(t/\varepsilon) - X_0^\varepsilon(t/\varepsilon)]\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ — флуктуация решения $\xi_\varepsilon(t)$ относительно решения усредненного уравнения (6).

Теорема 2. *Пусть* 1) *выполнены условия теоремы* 1; 2) *коэффициент равномерно сильного перемешивания* $\psi(\tau)$ *такой, что а)* $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) \leqslant D < +\infty$; *б) для некоторой целочисленной последовательности* $r_n \to \infty$, $0 < r_n < n$, *такой, что* $r_n/\sqrt{n} \to 0$ *при* $n \to \infty$, $n\psi(r_n)/r_n \to 0$ *при* $n \to \infty$; 3) *величина*

$$\rho_\varepsilon(T) = \sup_{t\in[0,T]}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}[MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - F_0(\theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot))]\,d\tau\right| \to 0 \ \textit{при} \ \varepsilon \to 0.$$

Тогда

$$P\{\sup_{t\in[0,T]}|\xi_\varepsilon(t/\varepsilon) - X_0(t/\varepsilon)| > \sqrt{\varepsilon}r\} \leqslant \max(2N_0, 3^{\alpha/(1-\alpha)}) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{r^2C^2(\varepsilon, r)}{4TC_4^2(1+2D)}\left[1 - \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^2\alpha\right\},$$

где

$$N_0 = \exp\{\sup_{1\leqslant n<\infty}\sqrt{l}[n\psi(r_n)/r_n + \psi(r_n)] + 2C_4^2(1+2D)r_n/n\},$$

$$C(\varepsilon, r) = \exp\{-LKT\} - \rho_\varepsilon(T)/r - \frac{1}{r}\sqrt{\varepsilon}C_4 > 0,$$

$$C_4 = 2C[1 + C_1(C_0, C, K, T)], \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1,$$

α — *любое*.

Постоянные C_0, C, K *определены во введении,* $C_1(C_0, C, K, T) = [C_0 + C(1 + C_0K)]\exp\{KCT\}$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\sup_{s\in[0,t/\varepsilon]}|\zeta_\varepsilon(s)| \leqslant LK\int_0^t \sup_{s\in[0,\tau/\varepsilon]}|\zeta_\varepsilon(s)|\,d\tau + \rho_\varepsilon(T) +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon}\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]}\left|\int_0^t F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\,d\tau\right|.$$

Отсюда по лемме Гронуолла имеем

$$\sup_{t\in[0,T/\varepsilon]} |\zeta_\varepsilon(t)| \leqslant \exp\{LKT\}[\rho_\varepsilon(T) + \sqrt{\varepsilon} \sup_{t\in[0,T/\varepsilon]} \Big| \int_0^t F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) -$$

$$- MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau \Big|. \qquad (19)$$

Пусть $n = [T/\varepsilon]$ — целая часть T/ε,

$$\eta_i = \int_i^{i+1} [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

тогда $|\eta_i| \leqslant C_4$, где $C_4 = 2C[1 + C_1(C_0, C, K, T)]$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [F(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega) - MF(\tau, \theta_\tau X_0^\varepsilon(\cdot), \omega)]\, d\tau \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{n}} \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} \Big| \sum_{i=0}^{k} \eta_i \Big| + \sqrt{\varepsilon} C_4. \qquad (20)$$

Из (19) с учетом (20) получаем

$$P\{\sup_{t\in[0,T]} |\xi_\varepsilon(t) - X_0^\varepsilon(t/\varepsilon)| > \sqrt{\varepsilon} r\} = P\{\sup_{t\in[0,T]} |\zeta_\varepsilon(t)) > r\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0\leqslant k\leqslant n-1} \Big| \sum_{i=1}^{k} \eta_i \Big| > rC(\varepsilon, r)/\sqrt{T}\right\}. \qquad (21)$$

Для оценки последней вероятности используем результат из [9], предварительно установив экспоненциальное неравенство

$$P\left\{\Big| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \Big| > \lambda\right\} \leqslant 2N_0 \exp\{-\lambda^2/4C_4^2(1 + 2D)\}. \qquad (22)$$

Действительно, если $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$ так, что $l_n = [n/2r_n] \to \infty$ при $n \to \infty$, то, вводя величины

$$\xi_j = \sum_{k=2r_nj+1}^{2r_nj+r_n} \eta_k, \quad j = 0, \dots, l_n,$$

$$\varkappa_j = \sum_{k=2r_nj+r_n+1}^{2r_nj+2r_n} \eta_k, \quad j = 0, \dots, l_{n-1}, \quad \varkappa_{l_n} = \sum_{k=2r_nl_n+r_n+1}^{n} \eta_k$$

(подразумевалось, что число элементов в остатке от деления n на $2r_n$ больше r_n; в противном случае среди случайных величин ξ_j будет отсутствовать ξ_{l_n}), получаем

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n} \eta_i > \lambda\right\} = P\left\{\sum_{j=0}^{l_n} \frac{\xi_i}{\sqrt{n}} + \sum_{j=0}^{l_n-1} \frac{\varkappa_j}{\sqrt{n}} + \frac{\varkappa_{l_n}}{\sqrt{n}} > \lambda\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-z\lambda\}\left(M \exp\left\{\frac{2z}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{l_n} \xi_i\right\}\right)^{1/2} M \exp\left\{\frac{2z}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{l_n-1} \varkappa_j + \frac{2z}{\sqrt{n}} \varkappa_{l_n}\right\}\Bigg)^{1/2}. \qquad (23)$$

Заметим, что $|\xi_j| \leqslant C_4 r_n$, $|\varkappa_j| \leqslant C_4 r_n$. Используя свойства условного математического ожидания и тот факт [10], что для любой $\mathfrak{F}_{2r_nl_n}^{+\infty}$-измеримой случайной величины ξ такой, что $|\xi| < L < +\infty$

$$|M\{\xi/\mathfrak{F}_0^{2l_nr_n-r_n}\} - M\xi| \leqslant 2L\varphi(r_n),$$

имеем

$$M\exp\left\{\frac{2z}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{l_n}\xi_j\right\}=M\exp\left\{\frac{2z}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{l_n-1}\xi_j\right\}\times$$

$$\times M\left[\exp\left\{\frac{2z\xi_{l_n}}{\sqrt{n}}/\mathfrak{F}_0^{2l_nr_n-r_n}\right\}\right]\leqslant M\exp\left\{\frac{2z}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{l_n-1}\xi_j\right\}\times$$

$$\times[M\exp\{2z\xi_{l_n}/\sqrt{n}\}+2\exp\{2zr_nC_4/\sqrt{n}\}\psi(r_n)]\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{i=0}^{l_n}[M\exp\{2z\xi_i/\sqrt{n}\}+2\psi(r_n)\exp\{2zr_nC_4/\sqrt{n}\}].\tag{24}$$

Аналогично,

$$M\exp\left\{\frac{2z}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{l_n-1}\varkappa_j+\varkappa_{l_n}2z/\sqrt{n}\right\}\leqslant\prod_{i=0}^{l_n}[M\exp\{2z\varkappa_i/\sqrt{n}+$$

$$+2\psi(r_n)\exp\{2zr_nC_4/\sqrt{n}\}].\tag{25}$$

Далее нетрудно убедиться в том, что [1]

$$M\xi_j^2\leqslant\sum_{k=0}^{r_n}M\eta_k^2+2\sum_{k=0}^{r_n-1}\sum_{j=k+1}^{r_n}|M\eta_k\eta_j|\leqslant C_4^2r_n+$$

$$+2C_4^2r_n\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\leqslant C_4^2r_n(1+2D).\tag{26}$$

Аналогично,

$$M\varkappa_j^2\leqslant C_4^2r_n(1+2D),\quad j=0,\ldots,l_n.$$

С учетом (26) для $0\leqslant z\leqslant\sqrt{n}/4C_4r_n$ получаем

$$M\exp\{2z\xi_i/\sqrt{n}\}=1+M\sum_{m=2}^{\infty}(2z\xi_i/\sqrt{n})^m\frac{1}{m!}\leqslant$$

$$\leqslant1+4z^2M\xi_i^2/n\sum_{m=2}^{\infty}(1/2)^{m-2}\frac{1}{m!}\leqslant1+4z^2C_4^2(1+2D)r_n/n.\tag{27}$$

Подставляя (27) в (24), (25) и затем в (23), имеем

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=0}^{n}\eta_i\right|>\lambda\,|\right\}\leqslant2\exp\{-z\lambda\}\exp\{z^2C_n^2(1+2D)\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sqrt{l}\left[\frac{n\psi(r_n)}{2r_n}+\psi(r_n)\right]\dot{+}2C_4^2(1+2D)r_n/n\right\}.\tag{28}$$

Минимизируя правую часть (28) по z, имеем при $z^*=\lambda/2C_4^2(1+2D)$ правую часть (22). Из оценки (22) для всех $1\leqslant k\leqslant n$ получаем

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right|>\lambda\right\}\leqslant2N_0\exp\{-\lambda^2/4C_4^2(1+2D)K\},\tag{29}$$

и в силу результата из [9] для любого α, $1/2<\alpha<1$,

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}\eta_i\right|>\lambda\right\}\leqslant\max(2N_0,3^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})\times$$

$$\times\exp\left\{-\lambda^2/4C_4^2(1+2D)\left[1-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^2\alpha\right\}.\tag{30}$$

Действительно, в силу основного результата [9] из (29) при $1/2 < \alpha < 1$, $a > 0$, следует $P\left\{\sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum\limits_{i=1}^{k}\eta_i\right| > a\right\} \leqslant \max\left(2N_0,\ 3^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}\right)\exp\left\{-a^2/4C_4^2(1+ 2D)\,n\left[1-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^2\alpha\right\}$, откуда при $a = \lambda\sqrt{n}$ имеем (30). Положив $\lambda = r\sqrt{n}C(\varepsilon, r)/\sqrt{T}$, будем иметь

$$P\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{\eta_i}{\sqrt{n}}\right| > \frac{rC(\varepsilon, r)}{\sqrt{T}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(2N_0,\ 3^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)\exp\left\{-\frac{\alpha r^2C^2(\varepsilon, r)}{4TC_4^2(1+2D)}\left[1-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]^2\right\}. \qquad (31)$$

Из (31) с учетом (21) получаем искомое соотношение (18). Теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием

$$d\xi_\varepsilon/dt = \varepsilon\,[\sin^2(t + \xi_\varepsilon(t-h)) + \eta(t)], \qquad \xi_\varepsilon(s) \equiv 0, \qquad -h \leqslant s \leqslant 0,$$

где $\eta(t)$ — ступенчатый марковский процесс, изменяющий свои состояния в моменты 0, 1, 2, ... со значениями из $[-d, d]$, $0 < d < +\infty$. Предполагаем, что цепь $\eta(k)$ имеет только один эргодический класс, не имеющий подклассов, плотность вероятности перехода за один шаг $\rho(x, y)$ равновмерно (относительно x) интегрируема. Тогда [1] существует $\pi(B)$, $C > 0$, $0 < \gamma < 1$ такие, что

$$\sup_{x, B}|P^{(n)}(x, B) - \pi(B)| \leqslant C\gamma^n,$$

цепь $\eta(k)$ удовлетворяет перемешиванию по Ибрагимову с $\psi(k) = 2C\gamma^k$.

Очевидно, $D = \dfrac{2C\gamma}{1-\gamma}$, $L = 1$, $C = 1 + \alpha$,

$$K(A) = \begin{cases}1, & -h \in A \subset (-\infty, 0],\\ 0, & -h \bar{\in} A \subset (-\infty, 0].\end{cases}$$

Тогда, очевидно, $F_0(x) \equiv 1/2$, $X_0^\varepsilon(t) = \varepsilon t/2$, $\rho_\varepsilon(T) \leqslant \sqrt{\varepsilon}/(2+\varepsilon)$,

В заключение остановимся на следующих двух моментах, касающихся обоснования принципа усреднения для систем с зависимостью от прошлого. Известно [11, 12], что в случае отсутствия зависимости от прошлого (мера $K(A)$ сосредоточена в нуле) принцип усреднения является следствием соответствующих теорем о непрерывной зависимости решения уравнения от параметров. В этом нетрудно убедиться, сделав соответствующую замену в уравнении (1) и проверив условие «интегральной непрерывности» правой части (1). И. И. Гихман обратил внимание автора на следующий факт: несмотря на то, что в ряде случаев теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра сравнительно легко устанавливаются и в случае зависимости правой части (1) от всего прошлого применение их для обоснования принципа усреднения в данной ситуации затруднено в силу того, что равенство

$$F(t/\varepsilon,\ \theta_{t/\varepsilon}X(\cdot)) = F(t/\varepsilon,\ \theta_t X_\varepsilon(\cdot)),\ X_\varepsilon(t) = X(t/\varepsilon),\ t \geqslant 0,$$

в общем случае несправедливо и, пользуясь «интегральной непрерывностью», выписать предельное значение правой части не представляется возможным. Таким образом, в случае зависимости от прошлого принцип усреднения необходимо обосновать по классической схеме, не ссылаясь на теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра.

Ввиду того, что регулярно появляются публикации, посвященные обоснованию принципа усреднения для систем с конечной зависимостью от прошлого (мера $K(A)$ сосредоточена на конечном отрезке $[-h, 0]$), следует обратить внимание на то, что в рассмотренном случае (см. замечание к теореме 1) усредненные уравнения всегда не зависят от прошлого. Этот результат анонсирован в [5], на него же указывалось в [13].

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М. : Наука, 1965.— 324 с.
2. *Гихман И. И., Кадырова И. А.* Некоторые результаты исследования стохастических дифференциальных уравнений // Теория случайн. процессов.— К. : Наук. думка, 1972, вып. 1.— С. 57—68.
3. *Хасьминский Р. З.* О случайных процессах, определяемых уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— **11**, № 2.— С. 240—259.
4. *Хасьминский Р. З.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Там же.— 1966.— **11**, № 3.— С. 444—462.
5. *Бондарев Б. В.* Предельные теоремы для стохастических дифференциальных уравнений и некоторые их применения: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1974.— 13 с.
6. *Бородин А. И.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения.— 1977.— **22**, № 3.— С. 498—512.
7. *Бродский Я. С., Лукачер Б. Я.* Предельные теоремы для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 5.— С. 3—6.
8. *Watanabe H.* Fluctuations in certain dinamical systems // Stochast. Process. and Appl.— 1985.— **21**, N 1.— P. 147—157.
9. *Mo'ricz F.* Exponential estimates for maximum of partial sums // Acta math. Acad. sci. hung.— 1979.— **33**, N 1—2.— P. 159—167.
10. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
11. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн.— 1952.— 4, № 2.— С. 215—219.
12. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы // Шестая лет. мат. шк. по теории вероятностей и мат. статистике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1969.— С. 5—58.
13. *Голец О. Б., Царьков Е. Ф.* Об усреднении в дифференциально-функциональных уравнениях со случайными параметрами.— Киев, 1988.— С. 11—17.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.19).

Донец. ун-т Получено 16.12.88