УДК 512.547

А. Л. Дворский

Представления параболических подгрупп симплектической группы

Доказано, что топологическое пространство неприводимых унитарных представлений параболической подгруппы комплексной симплектической группы содержит открытое, всюду плотное множество, гомеоморфное пространству неприводимых унитарных представлений некоторой редуктивной группы.

Доведено, що топологічний простір незвідних унітарних зображень параболічної підгрупи комплексної симплектичної групи містить відкриту, всюди щільну множину, яка гомеоморфна простору незвідних унітарних зображень деякої редуктивної групи.

В настоящей статье изучается пространство $\hat{P}$ неприводимых унитарных представлений группы P, где P — параболическая подгруппа группы $Sp\,(2m, \mathbb{C})$. Целью работы является доказательство следующей теоремы.

Основная теорема. *Пространство $\hat{P}$ содержит открытое и всюду плотное в смысле стандартной топологии на $\hat{P}$ множество, гомеоморфное пространству $\hat{G}$ неприводимых унитарных представлений некоторой редуктивной группы G.*

Приводятся также способ построения группы G по группе P и явные формулы для построения представления группы P, соответствующего данному неприводимому представлению группы G.

В дальнейшем для некоторой группы H открытое и всюду плотное множество $O_H \subset \hat{H}$ будем называть множеством представлений общего положения.

1. Обозначения и предварительные сведения. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

1) $Sp\,(2m) = Sp\,(2m, \mathbb{C})$ — комплексная симплектическая группа, реализованная как группа всех $X \in GL\,(2m, \mathbb{C})$, удовлетворяющих соотношению $X^T \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$, где E_m — единица группы $GL\,(m, \mathbb{C})$. Если $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$, то $X \in Sp\,(2m)$ тогда и только тогда, когда а) матрицы $X_1^T X_3$ и $X_2^T X_4$ симметричны; б) $X_1^T X_4 - X_3^T X_2 = E_m$;

2) $O\,(m) = O\,(m, \mathbb{C})$ — комплексная ортогональная группа, реализованная как группа всех $X \in GL\,(m, \mathbb{C})$ таких, что $X^T X = E_m$;

3) $M\,(m, n) = M\,(m, n, \mathbb{C})$ — векторное пространство комплексных матриц размера m на n;

4) $Sym\,(m) = Sym\,(m, \mathbb{C})$ — векторное пространство всех симметрических матриц из $M\,(m, m)$;

5) если G — группа, то под $\hat{G}$ понимаем топологическое пространство неприводимых унитарных представлений группы G [1, с. 56];

6) если $B \in Sym\,(m)$ $(M\,(m, n))$, то для $X \in Sym\,(m)$ $(M\,(n, m))$ полагаем $\chi_B\,(X) := \exp\,(i \operatorname{Re} \operatorname{tr} XB)$. Характерами χ_B исчерпываются все неприводимые представления группы $Sym\,(m)$ $(M\,(n, m))$.

Установим нумерацию параболических подгрупп группы $Sp\,(2m)$, воспользовавшись взаимно-однозначным соответствием между множеством параболических подгрупп, содержащих фиксированную борелевскую подгруппу и подмножествами базы корней группы $Sp\,(2m)$ [2, с. 291].

Пусть $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ — база системы корней группы $Sp\,(2m)$ относительно максимального тора, реализованного группой диагональных симплектических матриц, и соответствующая диаграмма Дынкина имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \circ\!-\!\!-\!\!-\! & \circ\!-\!\!-\!\!-\! & \circ \ldots & \circ\!-\!\!-\!\!-\!\!-\! & \circ \Leftarrow & \circ \end{array}.$$

В рассматриваемых подмножествах базы Δ индексы i при α_i упорядочены по возрастанию. Пусть $\Delta' = \{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_s}\}$, $k_s = m$. Построим следующий набор чисел: $j_1 = k_1$; $j_r = k_r - k_{r-1}$, $r = \overline{2, s-1}$; $j_s = m - k_{s-1}$, при $s = 1$, $j_1 = m$.

Зафиксируем борелевскую подгруппу $B = \left\{X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} : X \in Sp\,(2m),\right.$ $\left. X_1 \text{ — верхняя треугольная матрица}\right\}$.

Будем обозначать через $Q_{j_1,\ldots,j_s}$ стандартную (относительно B) параболическую подгруппу, соответствующую [2, с. 291] множеству $\Delta \diagdown \Delta'$. Например, сама подгруппа B будет обозначена $Q_{1,1,\ldots,1}$, а подгруппа $\left\{X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} : X \in Sp\,(2m)\right\}$ — Q_m.

Вообще говоря, $Q_{j_1,\ldots,j_s} = \left\{X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix} : X_1 \text{ — верхняя блочно-треугольная матрица с размерами блоков } j_1, \ldots, j_s\right\}$.

Пусть $\Delta'' = \{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_s}\}$, $k_s < m$. Строим набор $j_1 = k_1$; $j_r = k_r - k_{r-1}$, $r = \overline{2, s}$; $j_{s+1} = m - k_s$.

Обозначим $P_{j_1,\ldots,j_{s+1}}$ стандартную параболическую подгруппу, соответствующую множеству $\Delta \diagdown \Delta''$,

Можно считать $P_{j_1,\ldots,j_{s+1}} = \left\{X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} : X \in Sp\,(2m),\quad X_1\,(X_4) \text{ — верхняя (нижняя) блочно-треугольная матрица с размером блоков } j_1, \ldots, j_{s+1},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix},\ Y \in M\,(j_{s+1}, j_{s+1})\right\}$. Подгруппы Q_m и P_{j_1, j_2}, $j_1 = \overline{1, m-1}$ являются максимальными параболическими.

Определим дополнительно следующие подгруппы группы $Sp\,(2m)$:

$$U = \left\{\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} : A \in Sym\,(m)\right\},$$

$$V_{k,l} = \left\{\begin{pmatrix} E & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & E & A_{14}^T & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -A_{12}^T & E \end{pmatrix} : A_{13} - A_{12}A_{14}^T \in Sym\,(k)\right\}.$$

Запись произведена с помощью блочных матриц, соответствующих разбиению $2m = k + l + k + l$. Элементы групп U и V_{kl} действительно симплектические матрицы в силу условий а) и б).

Далее, $H_{j_1,\ldots,j_s} = \left\{\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_1^{T^{-1}} \end{pmatrix} : X_1 \text{ — верхняя блочно-треугольная матрица, соответствующая разбиению } m = j_1 + \ldots + j_s\right\}$,

$$K_{j_1,\ldots,j_{s+1}} = \left\{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{11}^{T^{-1}} & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A_{22} & A_{24} \\ A_{42} & A_{44} \end{pmatrix} \in Sp\,(2j_{s+1}),\right.$$

где A_{11} — верхняя блочно-треугольная матрица, соответствующая разбиению $m - j_{s+1} = j_1 + \ldots + j_s\}$.

Нетрудно убедиться, что

$$Q_{j_1,\ldots,j_s} = U \rightthreetimes H_{j_1,\ldots,j_s}, \tag{1}$$

$$P_{j_1,\ldots,j_{s+1}} = V_{j_1+\ldots+j_s, j_{s+1}} \rightthreetimes K_{j_1,\ldots,j_{s+1}}. \tag{2}$$

2. Представления общего положения групп U и $V_{k,l}$. Отметим, что $U \simeq Sym(m)$. Согласно условию 6 п. 1 представления группы U — характеры χ_B, $B \in Sym(m)$. Определим $Sym'(m) = Sym(m) \cap \cap GL(m, \mathbb{C})$. Очевидно, $Sym'(m)$ открыто и всюду плотно (в смысле евклидовой метрики) в $Sym(m)$. Определим $O_U = \{\chi_B : B \in Sym'(m)\}$. В силу изложенного выше (с учетом того, что $\hat{U}$ — группа [1, с. 56] и $\hat{U} \simeq U \simeq \simeq \mathbb{C}^{m(m+1)/2}$) справедлива лемма.

Лемма 1. *Пусть U_U — множество представлений общего положения группы U.*

Для построения представлений общего положения группы $V_{k,l}$ воспользуемся «малой» теоремой Макки [1, с. 61]. Определим группы

$$A_{k,l} = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & E & A_{14}^T & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} : A_{13} \in Sym(k) \right\},$$

$$B_{k,l} = \left\{ \begin{pmatrix} E & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -A_{12}^T & E \end{pmatrix} \right\},$$

$$V_{k,l} = A_{k,l} \rtimes B_{k,l}.$$

Пусть $C \in Sym(k)$, $D \in M(l, k)$. Полагаем $\chi_{C,D}(A_{13}, A_{14}) := \chi_C(A_{13}) \times \times \chi_D(A_{14})$. Характерами $\chi_{C,D}$ исчерпываются элементы $\hat{A}_{k,l}$. В дальнейшем будем отождествлять элементы $B_{k,l}$ с матрицами $A_{12} \in M(k, l)$. Пусть $O_A = = \{\chi_{C,D} : C \in Sym'(k)\}$. Это множество представлений общего положения группы $A_{k,l}$. На множество O_A сопряжениями действует $B_{k,l}$. После вычислений получаем

$$A_{12}\chi_{C,D} = \chi_{C, D+2A_{12}^T C}. \tag{3}$$

Отсюда ввиду невырожденности C получаем, что действие $B_{k,l}$ на множество O_A дает систему орбит с представителями $\chi_{C,0}$. Стабилизатором элемента $\chi_{C,0}$ в силу формулы (3) является единичная подгруппа. Определим представления

$$\pi_C = \mathrm{Ind}(\chi_{C,0}, A_{k,l}, V_{k,l}); \qquad C \in Sym'(k).$$

Согласно определению индуцированного представления операторы π_C действуют в $L_2(M(k, l))$.

Выполнив обычные вычисления, получим для $X \in M(k, l)$ и

$$a = \begin{pmatrix} E & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & E & A_{14}^T & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -A_{12}^T & E \end{pmatrix},$$

$$f \in L_2(M(k, l)),$$

$$[\pi_C(a) f](X) = \chi_C(A_{13} + A_{14}A_{12}^T + 2A_{14}X^T) f(X + A_{12}).$$

Из «малой» теоремы Макки и приведенных выше выкладок следует утверждение.

Лемма 2. *Множество $O_{V_{k,l}} = \{\pi_C : C \in Sym'(k)\}$ — множество представлений общего положения группы $V_{k,l}$.*

3. Представления общего положения групп $Q_{j_1,\dots,j_s}$. Для построения множества представлений общего положения групп $Q_{j_1,\dots,j_s}$ воспользуемся разложением (1) и «малой» теоремой Макки.

Обозначим $Q = Q_{j_1,\dots,j_s}$, $H = H_{j_1,\dots,j_s}$. Пусть $\chi_B \in O_U$, $a = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X^{T^{-1}} \end{pmatrix} \in H$. Тогда для $Y \in Sym(m)$ $a\chi_B(Y) = \chi_B(XYX^T) = \exp(i \operatorname{Re} \operatorname{tr} XYX^TB) = \exp(i \operatorname{Re} \operatorname{tr} Y(X^TBX)) = \chi_{X^TBX}(Y)$. Следовательно,

$$a\chi_B = \chi_{X^TBX}. \tag{4}$$

Поскольку множество верхних блочно-треугольных матриц содержит множество верхних треугольных матриц, то по известной теореме линейной алгебры получаем, что действие H на O_U имеет всюду плотную орбиту с представителем $\chi_E := \chi_{E_m}$. Далее, $a\chi_E = \chi_{X^TX}$. Таким образом, $a \in St_H(\chi_E) \Leftrightarrow X \in O(m)$. Но X — блочно-треугольная матрица. Нетрудно проверить, что все ее недиагональные блоки нулевые, а диагональные — ортогональные матрицы соответствующей размерности. Справедливо соотношение $H' = St_H(\chi_E) = \{\operatorname{diag}(X_{11}, \dots, X_{ss}) : X_{rr} \in O(j_r), r = \overline{1, s}\}$. Полагаем $Q' := U \rtimes H'$ и $O_Q := \{\operatorname{Ind}(\chi_E T, Q', Q) : T \in \hat{H}'\}$. Здесь χ_E и T понимаются продолженными на Q' с полупрямых сомножителей. Отображение

$$\hat{H}' = \prod_{i=1}^{s} \widehat{O(j_i)} \ni T \overset{\sigma}{\mapsto} \operatorname{Ind}(\chi_E T, Q', Q) \tag{5}$$

является взаимно-однозначным и взаимно-непрерывным отображением топологических пространств, т. е. гомеоморфизмом. В силу изложенного выше O_Q открыто как образ открытого множества при взаимно-непрерывном σ и всюду плотно в $\hat{Q}$, так как построено по всюду плотной орбите действия H на O_U. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\hat{O}_{j_1,\dots,j_s} \supset O_Q$ — множество представлений общего положения, причем* $O_Q \cong \prod_{i=1}^{s} \widehat{O(j_i)}$.

Замечание. Поскольку формулой (5) этот гомеоморфизм задан явно, то доказательство теоремы носит конструктивный характер, т. е. способ построения множества O_Q указан.

4. Представления общего положения групп $P_{j_1,\dots,j_{s+1}}$. Для этих групп задача является более сложной, так как фигурирующая в разложении (2) группа $V_{k,l}$ неабелева, что исключает возможность применения «малой» теоремы Макки. Воспользуемся ее обобщением на некоммутативный случай [3, с. 243]. Пусть $k = \sum_{i=1}^{s} j_i$, $l = j_{s+1}$. Обозначим $P = P_{j_1,\dots,j_{s+1}}$, $V = V_{k,l}$, $K = K_{j_1,\dots,j_{s+1}}$. Положим $\pi_G \in O_V$ и

$$a = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & X^{T^{-1}} & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \in K.$$

Заметим, что представление π_C полностью задается своим сужением на центр группы V, т. е. на подгруппу, характеризуемую условиями $A_{12} = A_{14} = 0$.

Проведя для этого сужения выкладки, аналогичные предшествующим формуле (4), получаем равенство $a\pi_C = \pi_{X^TCX}$.

Как и в п. 3, выделяем в O_V всюду плотную K-орбиту, т. е. орбиту с представителем $\pi_E = \pi_{E_k}$

$$a \in St_K(\pi_E) \Leftrightarrow X \in O(k) \Leftrightarrow X = \operatorname{diag}(X_{11} \dots X_{ss}), \text{ где } X_{ii} \in O(j_i), \quad i = \overline{1, s}.$$

Определим $K' = St_K(\pi_E)$. Теперь необходимо для $a \in K'$ найти оператор, сплетающий π_E и $a\pi_E$, т. е. оператор $W(a) \in \mathcal{L}(L_2(M(k, l)))$ такой, что

$$\forall b \in V, \quad \pi_E(aba^{-1}) = W(a)\pi_E(b)W(a)^{-1}.$$

Пусть $a_1 = \operatorname{diag}\{X, E, X, E\}$, $X \in O(k)$. Нетрудно убедиться, что можно положить

$$(W(a_1)f)(Z) = f(X^{-1}Z), \ f \in L_2(M(k, l))). \tag{6}$$

Пусть

$$a_2 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{24} \\ A_{42} & A_{44} \end{pmatrix} \in Sp(2l),$$

$$\pi_E(b\alpha^{-1}) = W(a_2)\pi_E(b)W(a_2)^{-1}.$$

Но такое задание оператора $W(a_2)$ полностью идентично конструкции представления Сигала — Шейла — Вейля группы $Sp(2l, \mathbb{C})$, т. е. сужения представления Шейла — Вейля группы $Sp(2lk, \mathbb{C})$ на $Sp(2l, \mathbb{C})$ [4, с. 9; 134].

Запишем $a \in K'$ в виде $a = a_1a_2$ и положим

$$W(a) = W(a_1)W(a_2), \tag{7}$$

где $W(a_1)$ задается формулой (6), $W(a_2)$ — оператор представления Сигала — Шейла — Вейля группы $Sp(2l)$, соответствующего группе $Sp(2lk)$, т. е. $W(a_2) = \overset{k}{\otimes} W_0(\alpha)$, где W_0 — представление Шейла — Вейля группы $Sp(2l)$ [4, с. 135]. Получим, что сплетающие операторы $W(a)$ образуют линейное (проективное с мультипликатором 1) представление группы K'. Определим $P' = V \rtimes K'$. Элемент $p \in P'$ запишем в виде $p = \eta v$, $v \in V$, $\eta \in K'$. Тогда формула

$$T(p) = S(\eta) \otimes W(\eta)\pi_E(v) \tag{8}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между неприводимыми представлениями T группы P', ограничение которых на V кратно π_E и неприводимыми представлениями S группы $K' \simeq \prod_{i=1}^{s} O(j_i) \times \mathrm{Sp}(2j_{s+1})$ [3, с. 243]. Отображение, задаваемое формулой (8), взаимно-непрерывно. Пусть $\overline{P}'$ — множество тех представлений из $\hat{P}'$, ограничение которых на V кратно π_E. Определим $O_P = \{\operatorname{Ind}(T, P', P) : T \in \overline{P}'\}$. Теперь построим отображения

$$\prod_{i=1}^{s} \widehat{O(j_i)} \times \widehat{\mathrm{Sp}(2j_{s+1})} + \hat{K}' \ni S \overset{\sigma_1}{\mapsto} T \in \overline{P}'. \tag{9}$$

Здесь T строится по S. Согласно формуле (8)

$$\overline{P}' \ni T \overset{\sigma_2}{\to} \operatorname{Ind}(T, P', P) \in O_P. \tag{10}$$

Известно, что такое построение дает неприводимые унитарные представления группы P, т. е. $O_P \subset \hat{P}$ [3, с. 218], σ_2 — гомеоморфизм. Таким образом, O_P открыто как образ $\hat{K}'$ при гомеоморфизме $\sigma = \sigma_2\sigma_1$ и всюду плотно, так как построено по всюду плотной орбите действия K на O_V.

Теорема 2. *Пусть $P_{j_1,\ldots,j_{s+1}} \supset O_P$ — множество представлений общего положения, причем*

$$O_P \cong \prod_{i=1}^{s} \widehat{O(j_i)} \times \widehat{\mathrm{Sp}(2j_{s+1})}.$$

Замечание. Этот гомеоморфизм задается явно формулами (8)—(10). Поскольку подгруппами $Q_{j_1,\ldots,j_s}$ и $P_{j_1,\ldots,j_{s+1}}$ исчерпываются стандартные параболические подгруппы группы $\mathrm{Sp}(2m)$, то основная теорема доказана.

1. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли.— М. : Наука, 1983.— 360 с.
2. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы.— М. : Наука, 1980.— 400 с.
3. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений.— М. : Наука, 1978.— 344 с.
4. *Лион Ж., Верны М.* Представление Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды.— М. : Мир, 1983.— 216 с.

Киев. ун-т

Получено 09.03.88