УДК 517.518.85

*А. В. Фоменко*

# Многомерная тригонометрическая интерполяция

Осуществляется исследование и построение тригонометрических интерполяционных многочленов в нестандартных областях, в том числе и многосвязных. Предложен способ граничного диффеоморфизма исходной области на каноническую область и исследован случай интерполяции на неравномерной сетке в исходной области.

Здійснюється дослідження і побудова тригонометричних інтерполяційних многочленів в нестандартних областях, в тому числі і багатозв'язних. Запропоновано спосіб граничного дифеоморфізму вихідної області на канонічну область і досліджено випадок інтерполяції на нерівномірній сітці в вихідній області.

Общие методы интерполяции функции $n$ переменных, заданной в произвольной области пространства $R^n$, находятся в стадии разработки [1]. В настоящей статье осуществляется исследование и построение тригонометрических интерполяционных полиномов в нестандартных областях. Предложен способ граничного диффеоморфизма области и исследован случай интерполяции на неравномерной сетке в исходной области.

1. Метод неопределенных коэффициентов. Пусть $G$ — многосвязная ограниченная область в $R^n$ с достаточно гладкой границей $\mathcal{G}$. Не умаляя общности, можно считать, что $\overline{G} \subset I$, где $I = \{-\pi \leqslant x_j \leqslant \pi,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ — $n$-мерный куб. Предположим, что на некоторой, не обязательно равномерной, сетке $\omega_+ = \{x^l,\ l = 1, 2, \ldots, N\}$, принадлежащей $\overline{G}$, задана сеточная функция $f(x)$. Ставится задача построения интерполяционного многочлена.

Для интерполяции тригонометрическими прямоугольными суммами воспользуемся многочленом вида [1]

$$T_N(x) = \sum_{\substack{|k_j| \leqslant m_j - 1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} c_k \exp(ikx) = \sum_{\substack{0 \leqslant k_j \leqslant m_j - 1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx),$$

где $c_k = a_k + ib_k$, $c_{-k} = a_k - ib_k$, $kx = \sum_{l=1}^{n} k_l x_l$; $N = \prod_{j=1}^{n} (2m_j - 1)$ — число коэффициентов $c_k$, определяющее сложность многочлена. Из условия интерполяции получим систему $N$ линейных алгебраических уравнений

$$T_N(x^l) = f(x^l),\ x^l \in \omega_+, \qquad l = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Условие разрешимости системы (1) заключается в невырожденности матрицы коэффициентов $A$ размером $N \times N$ вида (условная запись, в которой при суммировании по мультииндексу $k$ принят лексикографический порядок)

$$A = \begin{bmatrix} \cos(kx^1) & \sin(kx^1) \\ \cos(kx^2) & \sin(kx^2) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(kx^N) & \sin(kx^M) \end{bmatrix}, \quad k \in K \overset{\Delta}{=} \{k : k_j = 0, 1, 2, \ldots, m_j - 1,$$

$$j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Для $n = 1$ [2] $\det A = 2^{(m_1-1)^2} \prod\limits_{0 \leqslant p, q \leqslant 2m_1-2} \sin((x^q - x^p)/2) \neq 0$, если $-\pi \leqslant \leqslant x^p < \pi$. Для $n \geqslant 2$ геометрическое условие невырожденности для случая степенных многочленов сферического типа приведено в [1] (подстановка $z = \exp(ix)$ позволяет тригонометрические многочлены преобразовать в алгебраические). Грубое условие невырожденности можно получить, используя оценку меры обусловленности матрицы $A$. Ограничимся исследованием случая квадратичной нормы матрицы $A - \|A\|_2$. Меру обусловленности $A$ можно представить через наибольшее $\mu_N$ и наименьшее $\mu_1$ сингулярные числа $\mathrm{cond}_2 A = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \mu_N/\mu_1$.

Для оценки $\mu_1$, $\mu_N$ воспользуемся теоремой Гершгорина [1], в силу которой справедливы следующие условия:

$$|\mu - b_{mm}| \leqslant R_m, \; R_m = \sum_{l=1, l\neq m}^{N} |b_{ml}|, \qquad m = 1, 2, \ldots, N,$$

где $b_{ml}$ — элементы матрицы $AA^T$. Применяя основное тригонометрическое тождество, нетрудно показать, что диагональные элементы матрицы $AA^T$ равны $M = \prod\limits_{j=1}^{n} m_j + 1$. Поэтому $-R_* + M \leqslant \mu \leqslant R^* + M$, $R_* = \min\limits_{m\in\overline{1,N}} R_m$, $R^* = \max\limits_{m\in\overline{1,N}} R_m$. Следовательно,

$$\mathrm{cond}_2 A \leqslant (R^* + M)/(M - R^*) \tag{2}$$

и, если $R_* < M$, то матрица $AA^T$ невырождена, так как $\det AA^T = \prod\limits_{m=1}^{N} \mu_m > 0$ и $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_N$. Но $\det AA^T = \det A \det A^T$. Поэтому $\det A > 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для невырожденности матрицы $A$ коэффициентов системы* (1) *достаточно, чтобы* $\min\limits_{m\in\overline{1,N}} \sum\limits_{l=1, l\neq m}^{N} |b_{ml}| < M$, *где $b_{ml}$ — элементы матрицы $AA^T$ и* $M = \prod\limits_{j=1}^{n} m_j + 1$.

Полученная в ходе доказательства теоремы оценка сверху меры обусловленности (2) может быть использована для обоснования сходимости итерационного способа решения системы (1) и получения оценок погрешности решения этой системы при неточно заданных коэффициентах матрицы $A$ и правой части.

2. Граничный диффеоморфизм области. В качестве альтернативного способа решения задачи интерполяции в многомерной области используется способ отображения исходной области в некоторую каноническую область и проведения в ней интерполяции на равномерной сетке.

Пусть $G$ — ограниченная и односвязная область с границей $\mathcal{G}$, имеющей параметрическое описание $\rho = R(s)$, $\varphi = \Phi(s)$, $s \in \overline{U}$, $s = (s_1, s_2, \ldots s_{n-1})$, где $\rho$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ — координаты полярной системы с началом, лажащим строго внутри $G$; $U$ — открытый $(n-1)$-мерный интервал $\{0 < < s_j < S_j,\ j = 1, 2, \ldots, n-1\}$, для границ которого могут выполняться те или иные условия периодичности функций $R(s)$ и $\Phi(s)$; $R$, $\Phi$ — однозначные $\forall s \in U$, непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции и для отображения $\Phi$ из $U$ на $\mathcal{G}$ выполнено условие обратимости $\Phi'_s(s)$ $\forall s \in U$ (через $\mathcal{G}$ обозначена открытая часть границы $\overline{\mathcal{G}}$, из которой удалено многообразие размерности $n-2$, соответствующее граничным плоскостям области $\overline{U}$).

Лемма 1. *Отображение $L: Q = (0, 1) \times U \to G^*$ вида $\rho = \Theta R(s)$, $\varphi = \Phi(s)$, $\Theta \in (0, 1)$, $s \in U$, при перечисленных условиях является $C^1$-диффеоморфизмом. Здесь $G^*$ — область, полученная из $G$ удалением $(n-1)$-мерного многообразия, соответствующего удалению из $\overline{\mathcal{G}}$ при получении $\mathcal{G}$ многообразия размерности $n-2$.*

Доказательство. Покажем, что $([\Theta R, \Phi]^T)'_{(\Theta, s)}$ является обратимым элементом $\mathcal{L}(\vec{\Theta}, \vec{G^*})$ — пространства непрерывных линейных отображений, присоединенных к $Q$ и $G^*$ векторных пространств [3]. Отметим, что размерности пространств $Q$ и $G^*$ совпадают и равны $n$. Вычислим якобиан функции $[\Theta R, \Phi]^T$. Используя представление определителя по элементам столбца и применяя блочную запись соответствующей матрицы, получаем

$$\det([\Theta R, \Phi]^T)'_{(\Theta, s)} = \det \begin{bmatrix} R & \Theta \tilde{R}'_s \\ 0 & \Phi'_s \end{bmatrix} = R(s) \det \Phi'_s(s),$$

где $\tilde{R}'_s = [R'_{s_1}, R'_{s_2}, \ldots, R'_{s_{n-1}}]$.

По условию $\det \Phi'_s(s) \neq 0$ $\forall s \in U$, $R(s) \neq 0$, поскольку начало координат находится внутри $G$ ($\rho = R(s) \neq 0$). Следовательно, записанный якобиан отличен от нуля $\forall (\Theta, s) \in Q$. Из обратимости указанного элемента в соответствии с теоремой 29 главы III [3] получаем искомый результат.

Замечание. Переход к открытым областям $\mathcal{G}$, $G^*$ позволил установить диффеоморфизм области $G^*$ на каноническую область $Q$, избежав особых многообразий, на которых нарушается однозначность. Отметим, что при $\Theta = 1$ получаем $C^1$-диффеоморфизм $U$ на $\mathcal{G}$, а особой точке $\Theta = 0$ соответствует начало координат.

**3.** Равномерная интерполяция в канонической области. В общем случае область $Q$ представляет собой $n$-мерный интервал. Наиболее полно изучен случай, когда $Q$ — тор [1, 4]. В главе 5 [4] построение осуществляется с помощью дискретного преобразования Фурье для случая $n = 1, 2$. Обобщим эти результаты для $n \geqslant 3$. Пусть на торе задана сетка $\omega_0 = \{x : x_j^{k_j} = k_j h_j,\quad k \in K : k_j = -K_j + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, K_j, h_j = \pi/K_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$, а на ней— периодическая по всем компонентам с периодом $2\pi$ сеточная функция $v(x)$, которую можно продолжить периодически на все сеточное $n$-мерное пространство $\omega$.

Лемма 2. *При этих условиях $\forall x \in \omega_0$ справедлива формула обращения*

$$t(x) \stackrel{\Delta}{=} (1/(2\pi))^n \sum_{k \in K} \tilde{v}(k) \exp(-ikx) = v(x), \tag{3}$$

*где*

$$\tilde{v}(k) = \sum_{x \in \omega_0} v(x) \exp(ikx) \prod_{j=1}^{n} h_j, \qquad k \in K. \tag{4}$$

Доказательство. Подставляя равенство (4) в (3), имеем

$$t(x) = (1/(2\pi))^n \prod_{j=1}^{n} h_j \sum_{y \in \omega_0} v(y) \sum_{k \in K} \exp(ik(y - x)).$$

При $y = x$

$$V = \sum_{k \in K} \exp(ik(x - y)) = \prod_{j=1}^{n} 2K_j = (2\pi)^n / \prod_{j=1}^{n} h_j.$$

Покажем, что сумма $V$ обращается в нуль при $y \neq x$

$$V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=-K_j+1}^{K_j} \exp\left\{i \sum_{l=1}^{n} k_l (y_l - x_l)\right\}.$$

Так как $y_l - x_l = \mu_l h_l - \nu_l h_l$, где $\mu_l - \nu_l \stackrel{\Delta}{=} \xi_l$ — целое $\forall x, y \in \omega_0$, то $\exists \xi_j \neq 0$, $y \neq x$, и справедливо равенство

$$\sum_{k_j=K_j+1}^{K_j} \exp(ik_j\xi_j h_j) = \exp(i(1 - K_j)\xi_j h_j) \times$$
$$\times [\exp(i2K_j h_j) - 1]/[\exp(i\xi_j h_j) - 1]$$

(как сумма членов геометрической прогрессии). Но $\exp(i2N_j\xi_j h_j) = \exp(i2\pi\xi_j) = 1$, $\exp(i\xi_j h_j) \neq 1$, поскольку $\xi_j \neq 0$ по условию, а $\xi_j \neq 2K_j$ (максимальная разность составляет $K_j - (-K_j + 1) = 2K_j - 1 < 2K_j$). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда область $Q$ — шар $W^n$. Проведем исследование для $n = 2$ и укажем необходимые изменения для $n = 3$. Пусть в единичном круге $W^2$ задана функция $F(\Theta, s_1)$, удовлетворяющая на границе $\Theta = 1$ условию $F(1, s_1) = g(s_1)$. Введем в рассмотрение функцию $\Psi(\Theta, s_1) = F(\Theta, s_1) - [F(0, 0)(1 - \Theta) + \Theta g(s_1)]$, для которой $\Psi(0, s_1) = \Psi(1, s_1) = 0$, $\Psi(\Theta, s_1)$ может быть продолжена периодически (с периодом 1 по $\Theta$ и с периодом $2\pi$ по $s_1$) на все пространство $R^2$. На $W^2$ введем сетку $\omega_0 = \{\Theta = lh_0,\ l \in \overline{0, N},\ s_1 = jh_1,\ j \in \overline{1 - M, M}\}$ и соответствующую $\Psi$ сеточную функцию $\psi(\Theta, s_1)$. Применяя лемму 2, получаем представление исходной функции $F(\Theta, s_1)$ с использованием тригонометрической интерполяции

$$t(\Theta, s_1) = F(0, 0)(1 - \Theta) + \Theta g(s_1) + (1/(2\pi))^2 \sum_{\alpha=-N+1}^{N-1} \sum_{\beta=-M+1}^{M} \tilde{\psi}(\alpha, \beta) \times$$
$$\times \exp(-i(\alpha\pi\Theta + \beta s_1)),\quad \tilde{\psi}(\alpha, \beta) = 2h_0 h_1 \sum_{(\Theta, s_1) \in \omega_0} \psi(\Theta, s_1) \times$$
$$\times \exp(i(\alpha\pi\Theta + \beta s_1)),\ h_0 = 1/N,\ h_1 = \pi/M.$$

Для случая $n = 3$ функция $\Psi(\Theta, s_1, s_2)$ выражается через условие на границе $\Theta = 1$ исходной функции $F(1, s_1, s_2) = g(s_1, s_2)$ следующим образом:

$$\Psi(\Theta, s_1, s_2) = F(\Theta, s_1, s_2) - [F(0, 0, 0)(1 - \Theta) + \Theta g(s_1, s_2)].$$

Все остальные выкладки проводятся аналогично.


1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа.— М. : Наука, 1986.— 744 с.
2. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций.; М.; Л.: Гостехиздат, 1954.— 328 с.
3. *Шварц Л.* Анализ В 2-х т.— М. : Мир, 1972.— Т. 1.— 824 с.
4. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.— М. : Высш. школа, 1987.— 296 с.



Запорож. индустр. ин-т



Получено 07.12.87

Покажем, что сумма $V$ обращается в нуль при $y \neq x$

$$V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=-K_j+1}^{K_j} \exp\left\{ i \sum_{l=1}^{n} k_l (y_l - x_l) \right\}.$$

Так как $y_l - x_l = \mu_l h_l - \nu_l h_l$, где $\mu_l - \nu_l \overset{\Delta}{=} \xi_l$ — целое $\forall x, y \in \omega_0$, то $\exists \xi_j \neq 0$, $y \neq x$, и справедливо равенство

$$\sum_{k_j=-K_j+1}^{K_j} \exp(ik_j \xi_j h_j) = \exp(i(1 - K_j)\xi_j h_j) \times$$
$$\times [\exp(i2K_j h_j) - 1]/[\exp(i\xi_j h_j) - 1]$$

(как сумма членов геометрической прогрессии). Но $\exp(i2N_j \xi_j h_j) = \exp(i2\pi\xi_j) = 1$, $\exp(i\xi_j h_j) \neq 1$, поскольку $\xi_j \neq 0$ по условию, а $\xi_j \neq 2K_j$ (максимальная разность составляет $K_j - (-K_j + 1) = 2K_j - 1 < 2K_j$). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда область $Q$ — шар $W^n$. Проведем исследование для $n = 2$ и укажем необходимые изменения для $n = 3$. Пусть в единичном круге $W^2$ задана функция $F(\Theta, s_1)$, удовлетворяющая на границе $\Theta = 1$ условию $F(1, s_1) = g(s_1)$. Введем в рассмотрение функцию $\Psi(\Theta, s_1) = F(\Theta, s_1) - [F(0, 0)(1 - \Theta) + \Theta g(s_1)]$, для которой $\Psi(0, s_1) = \Psi(1, s_1) = 0$, $\Psi(\Theta, s_1)$ может быть продолжена периодически (с периодом 1 по $\Theta$ и с периодом $2\pi$ по $s_1$) на все пространство $R^2$. На $W^2$ введем сетку $\omega_0 = \{\Theta = lh_0,\ l \in \overline{0, N},\ s_1 = jh_1,\ j \in \overline{1 - M, M}\}$ и соответствующую $\Psi$ сеточную функцию $\psi(\Theta, s_1)$. Применяя лемму 2, получаем представление исходной функции $F(\Theta, s_1)$ с использованием тригонометрической интерполяции

$$t(\Theta, s_1) = F(0,0)(1 - \Theta) + \Theta g(s_1) + (1/(2\pi))^2 \sum_{\alpha=-N+1}^{N-1} \sum_{\beta=-M+1}^{M} \tilde{\psi}(\alpha, \beta) \times$$
$$\times \exp(-i(\alpha\pi\Theta + \beta s_1)),\quad \tilde{\psi}(\alpha, \beta) = 2h_0 h_1 \sum_{(\Theta, s_1) \in \omega_0} \psi(\Theta, s_1) \times$$
$$\times \exp(i(\alpha\pi\Theta + \beta s_1)),\ h_0 = 1/N,\ h_1 = \pi/M.$$

Для случая $n = 3$ функция $\Psi(\Theta, s_1, s_2)$ выражается через условие на границе $\Theta = 1$ исходной функции $F(1, s_1, s_2) = g(s_1, s_2)$ следующим образом:

$$\Psi(\Theta, s_1, s_2) = F(\Theta, s_1, s_2) - [F(0,0,0)(1 - \Theta) + \Theta g(s_1, s_2)].$$

Все остальные выкладки проводятся аналогично.


1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа.— М. : Наука, 1986.— 744 с.
2. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций.; М.; Л.: Гостехиздат, 1954.— 328 с.
3. *Шварц Л.* Анализ В 2-х т.— М. : Мир, 1972.— Т. 1.— 824 с.
4. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.— М. : Высш. школа, 1987.— 296 с.


Запорож. индустр. ин-т

Получено 07.12.87