УДК 517.944:519.46

Р. З. Жданов, И. В. Ревенко

О точных решениях нелинейного уравнения Дирака в терминах функций Бесселя, Гаусса, Лежандра и полиномов Чебышева—Эрмита

Предложены подстановки, сводящие систему нелинейных уравнений Дирака к обыкновенным дифференциальным уравнениям, интегрируемым в специальных функциях. Установлено, что класс специальных функций, в которых записывается решение уравнения Дирака, существенно зависит от вида нелинейности.

Запропоновані підстановки, які зводять систему нелінійних рівнянь Дірака до звичайних диференціальних рівнянь, що інтегруються в спеціальних функціях. Установлено, що клас спеціальних функцій, в яких записується розв'язок рівняння Дірака, суттєво залежить від вигляду нелінійності.

В настоящей статье установлена тесная связь между решениями нелинейного уравнения Дирака

$$\{i\gamma_\mu \partial_{x_\mu} - F(\overline{\Psi}\Psi)\}\Psi(x) = 0 \tag{1}$$

и специальными функциями, описываемыми обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) второго порядка

$$a_1(\omega)U_{\omega\omega} + a_2(\omega)U_\omega + a_3(\omega)U = 0. \tag{2}$$

Кроме того, в явном виде построены точные решения уравнения (1) в терминах функций Бесселя, Гаусса и Лежандра, а также полиномов Чебышева—Эрмита.

В (1) $\Psi = \Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ — четырехкомпонентный дираковский спинор, γ_μ — четырехрядные матрицы вида

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \overline{1, 3},$$

σ_a — матрицы Паули (2×2); $\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma_0$, F — произвольная гладкая функция.

Решения уравнения (1) будем искать с помощью следующих анзацев (подстановок) [1]:

$$\Psi_1(x) = \exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}\varphi(x_0^2-x_1^2-x_3^2), \tag{3}$$

$$\Psi_2(x) = \exp\left\{\frac{1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)(\gamma_1x_1+\gamma_2x_2)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3\ln(x_0+x_3)\right\}\varphi(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2). \tag{4}$$

В анзацах (3), (4) $\varphi = \varphi(\omega)$ — новые неизвестные спиноры, для определения которых получается система нелинейных ОДУ вида

$$4\omega\dot{\varphi} = -\{N(1+\gamma_0\gamma_3) + iF(\overline{\varphi}\varphi)[\omega(\gamma_0+\gamma_3)+\gamma_0-\gamma_3]\}\varphi, \tag{5}$$

где случаи $N = 2, 3$ соответствуют анзацам (3) и (4). При этом уравнение для сопряженного спинора $\overline{\Psi}(x)$ имеет вид

$$4\omega\dot{\overline{\varphi}} = -\overline{\varphi}\{N(1-\gamma_0\gamma_3) - iF(\overline{\varphi}\varphi)[\omega(\gamma_0+\gamma_3)+\gamma_0-\gamma_3]\}. \tag{6}$$

Умножая уравнение (5) на $\bar{\varphi}$, а уравнение (6) на φ и складывая полученные выражения, приходим к ОДУ для функции $\bar{\varphi}\varphi$ $4\omega\, d(\bar{\varphi}\varphi)/d\omega = -2N\bar{\varphi}\varphi$, интегрирование которого дает

$$\bar{\varphi}\varphi = C\omega^{-N/2},\ C = \text{const}. \tag{7}$$

Таким образом, уравнение (5) приводится к линейному ОДУ

$$4\omega\dot{\varphi} = -\{N(1+\gamma_0\gamma_3) + iF(c\omega^{-N/2})[\omega(\gamma_0+\gamma_3) + \gamma_0 - \gamma_3]\}\varphi, \tag{8}$$

на решения которого наложено дополнительное условие (7).

Расписывая систему (8) покомпонентно, получаем

$$\begin{gathered} 2\dot{\varphi}^0 = -iF(c\omega^{-N/2})\varphi^2, \\ 2\omega\dot{\varphi}^1 = -iF(c\omega^{-N/2})\varphi^3 - 2N\varphi^1, \\ 2\omega\dot{\varphi}^2 = -iF(c\omega^{-N/2})\varphi^0 - 2N\varphi^2, \\ 2\dot{\varphi}^3 = -iF(c\omega^{-N/2})\varphi^1. \end{gathered} \tag{9}$$

Если в системе ОДУ (9) сделать последовательно две замены переменных

$$c\omega^{-N/2} = t,\ d\xi = F(t)\,t^{-2/N}dt, \tag{10}$$

то полученные уравнения с помощью несложных преобразований приводятся к виду

$$\begin{gathered} \varphi^0_{\xi\xi} + \frac{c^{2/N}}{N^2}\, t^{(2-2N)/N}\varphi^0 = 0, \\ \varphi^3_{\xi\xi} + \frac{c^{2/N}}{N^2}\, t^{(2-2N)/N}\varphi^3 = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\varphi^2 = -iNtc^{-2/N}\varphi^0_{\xi},\ \varphi^1 = -iNtc^{-2/N}\varphi^3_{\xi}, \tag{12}$$

причем переменные t и ξ связаны дифференциальным соотношением (10).

Если $u(\xi)$, $v(\xi)$ — это два линейно-независимых решения ОДУ

$$U_{\xi\xi} + \frac{c^{2/N}}{N^2}\, t^{(2-2N)/N}U = 0, \tag{13}$$

то общее решение системы (11), (12) задается формулами

$$\begin{gathered} \varphi^0 = k^0u(\xi) + k^2v(\xi), \\ \varphi^3 = k^3u(\xi) + k^1v(\xi), \\ \varphi^1 = -iNtc^{-2/N}(k^3u_{\xi} + k^1v_{\xi}), \\ \varphi^2 = -iNtc^{-2/N}(k^0u_{\xi} + k^2v_{\xi}), \end{gathered} \tag{14}$$

где $k^0, \ldots, k^3$ — произвольные комплексные постоянные.

Подставляя формулы (14) в условие (7), получаем следующую зависимость между постоянными c, $k^0, \ldots, k^3$:

$$c = \{iN(k^{0*}k^2 - k^{2*}k^0 + k^{3*}k^1 - k^{1*}k^3)\times W(u,v)\}^{N/2}, \tag{15}$$

где $W(u, v) \equiv uv_{\xi} - vu_{\xi}$ — вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (15), который постоянен в силу уравнения.

Хорошо известно (см., например, [2]), что всякое ОДУ вида (2) может быть приведено к уравнению (13) (здесь необходимо принять во внимание тот факт, что в определение функции $\xi = \xi(t)$ входит произвольная функция $F(t)$). Следовательно, выбирая вид нелинейности $F(\bar{\Psi}\Psi)$, можно добиться, чтобы решения уравнения Дирака выражались в терминах специальных функций, описываемых уравнением (2).

Более подробно рассмотрим процедуру построения решений нелинейного уравнения Дирака, выражающихся через функции Бесселя, а в остальных случаях ограничимся тем, что приведем фундаментальную систему решений ОДУ (13).

1. Пусть $F = \lambda(\overline{\Psi}\Psi)^{1/2k}$, λ, k — const.

Подставляя $F = \lambda t^{1/2k}$ в (10), (11), получаем следующую систему ОДУ для определения функций φ^0, φ^1, φ^2, φ^3:

$$\omega^2\ddot{\varphi}^0 + \frac{N-2\alpha}{2}\omega\dot{\varphi}^0 + \frac{\tau^2}{4}\omega^{2\alpha+1}\varphi^0 = 0,$$

$$\omega^2\ddot{\varphi}^3 + \frac{N-2\alpha}{2}\omega\dot{\varphi}^3 + \frac{\tau^2}{4}\omega^{2\alpha+1}\varphi^3 = 0, \tag{16}$$

$$\varphi^2 = -\frac{2i}{\tau}\omega^{-\alpha}\dot{\varphi}^0, \ \varphi^1 = -\frac{2i}{\tau}\omega^{-\alpha}\dot{\varphi}^3,$$

где $\tau = -\lambda c^{1/2k}$, $\alpha = -N/4k$, $N = \overline{2, 3}$.

Общее решение системы (16) записывается через функции Бесселя [2]

$$\varphi^0 = \omega^{(2+2\alpha-N)/4}(k^0 J_\nu(z) + k^2 Y_\nu(z)),$$

$$\varphi^1 = \omega^{(2+2\alpha-N)/4}(k^3 J_\nu(z) + k^1 Y_\nu(z)),$$

$$\varphi^3 = \omega^{(2+2\alpha-N)/4}\left\{\frac{i(N-2\alpha-2)}{4\tau}\omega^{-\alpha-1}(k^0 J_\nu(z) + k^2 Y_\nu(z)) - \right.$$

$$\left. - i\omega^{-1/2}\left(k^0\frac{dJ_\nu(z)}{dz} + k^2\frac{dY_\nu(z)}{dz}\right)\right\}, \tag{17}$$

$$\varphi^2 = \omega^{(2+2\alpha-N)/4}\left\{\frac{i(N-2\alpha-2)}{4\tau}\omega^{-\alpha-1}(k^3 J_\nu(z) + k^1 Y_\nu(z)) - \right.$$

$$\left. - i\omega^{-1/2}\left(k^3\frac{dJ_\nu(z)}{dz} + k^1\frac{dY_\nu(z)}{dz}\right)\right\},$$

где $k^0, \ldots, k^3$ — произвольные комплексные константы; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя; $z = \frac{\tau}{2\alpha+1}\omega^{(2\alpha+1)/2}$, $\nu = \frac{2\alpha - 2 + N}{2}$.

Отметим, что при $\alpha = -1/2$ решения системы ОДУ (16) выражаются через элементарные функции.

Учитывая тождество [2] $W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) = 2/\pi z$ получаем из (7) выражение постоянной c через $k^0, \ldots, k^3$

$$c = \left\{\frac{i(N-2k)}{2\pi\lambda k}(k^{0*}k^2 - k^{2*}k^0 + k^{3*}k^1 - k^{3*}k^3)\right\}^{\frac{2k}{2k+1}}.$$

Подстановка формул (17) в анзацы (3), (4) дает два класса бесселеподобных решений уравнения Дирака (1) со степенной нелинейностью.

2. Пусть $F = \frac{4c^{2/N}(N-1)}{N^3}(\overline{\Psi}\Psi)^{4/N-3}\left\{2n + 1 - \frac{4c^{2/N}}{N^2}(\overline{\Psi}\Psi)^{2/N-2}\right\}^{-1/2}$.

При таком выборе F ОДУ (13) — это уравнение Вебера [2]

$$\ddot{U} + \left(\frac{2n+1}{4} - \xi^2/4\right)U = 0, \qquad n \in N. \tag{18}$$

Фундаментальная система решений уравнения (18) имеет вид

$$u(\xi) = 2^{-n/2} e^{-\xi^2/4} H_n(\xi/\sqrt{2}),$$
$$v(\xi) = u(\xi) \int \frac{d\xi}{u^2(\xi)}, \tag{19}$$

где $H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \dfrac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\xi^2})$ — полином Чебышева — Эрмита,

$$\xi = \left\{2n + 1 - \frac{4c^{4/N-2}}{N^2}\,\omega^{N-1}\right\}^{1/2}.$$

При этом вронскиан системы (19) равен 1, т. е. $W(u, v) = 1$.

3. Пусть

$$F = \frac{1-N}{2c^{1/N}}(\overline{\Psi}\Psi)^{1/N}\left\{1 - \frac{N}{c^{1/N}}(\overline{\Psi}\Psi)^{1-1/N}\right\}^{-1/2}.$$

При таком выборе F ОДУ (13) запишется в виде

$$\ddot{U} + (1-\xi^2)^{-1/2} U = 0. \tag{20}$$

Фундаментальная система решений уравнения (20) задается следующими формулами:

$$u(\xi) = (1-\xi^2)^{1/2} P_0(\xi),\ v(\xi) = (1-\xi^2)^{1/2} Q_0(\xi), \tag{21}$$

где $P_0(\xi) = 1$, $Q_0(\xi) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\xi+1}{\xi-1}\right|$ — функции Лежандра, $\xi = (1 - Nc^{1-2/N}\omega^{1/2-N/2})^{1/2}$.

Вронскиан фундаментальной системы решений (20) равен 1.

4. Пусть

$$F = \frac{c^{2/N}(1-N)}{4N^3}[|(a+b)^2 - 1|]^{1/2}(\overline{\Psi}\Psi)^{\frac{4-3N}{N}} \times$$
$$\times\left\{\frac{c^{2/N}}{N^2}(\overline{\Psi}\Psi)^{\frac{2-2N}{N}} + ab\right\}^{-3/2},\quad a, b \in R^1.$$

При таком выборе F ОДУ (13) принимает вид

$$\ddot{U} + \left[\frac{1-(a+b)^2}{4\xi^2} - ab\right]U = 0. \tag{22}$$

Фундаментальную систему решений уравнения (22) образуют функции

$$u(\xi) = \xi^{\frac{a+b+1}{2}} F(a, b, a+b+1, \xi), \tag{23}$$
$$v(\xi) = \xi^{\frac{1-a-b}{2}} F(-b, -a, 1-a-b, \xi)$$

с вронскианом

$$W(u, v) = (a+b)\frac{\Gamma(a+b+1)\Gamma(1-a-b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}. \tag{24}$$

В (23), (24) $F(a, b, c, \xi)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $\Gamma(z)$ — гамма-функция,

$$\xi = \frac{1}{2}\{|(a+b)^2 - 1|\}^{1/2}\left\{\frac{1}{N^2}c^{4/N-2}\omega^{N-1} + ab\right\}^{-1/2}.$$

Подстановка формул (19), (21), (23), (24) в (14), (15) дает общее решение системы ОДУ (9), откуда, используя анзацы (3), (4), можно получить точные решения нелинейного уравнения Дирака (1) в терминах полиномов Чебышева — Эрмита и функций Гаусса и Лежандра.

1. *Fushchich W. I., Zhdanov R. Z.* On some exact solutions of a system of non-linear differential equations for spinor and vector fields // J. Phys. A.: Math. and Gen.— 1987.— **20**, N 13.— P. 4173—4190.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1976.— 576 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получен 06.09.88