УДК 519.21

И. К. Мацак, А. Н. Пличко

Центральная предельная теорема в пространстве Банаха

Рассмотрим последовательность $(\xi_n)_1^\infty$ независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) со значениями в сепарабельном банаховом пространстве B с нормой $\|\cdot\|$, $M\xi_1 = 0$. Будем говорить, что для последовательности $(\xi_n)_1^\infty$ выполнена центральная предельная теорема (ЦПТ), если распределение $S_n/\sqrt{n}$ слабо сходится к гауссовскому распределению в B, где $S_n = \sum\limits_1^n \xi_k$. В работе [1] можно найти подробную библиографию по этому вопросу.

В настоящей статье рассматривается ЦПТ в банаховых пространствах с безусловным базисом. Используя известный результат [2], построен пример последовательности н.о.р.с.в., ограниченных и имеющих гауссов корреляционный оператор, для которой величины $\|S_n/\sqrt{n}\|$ равномерно стохастически ограничены, но ЦПТ для нее не выполняется.

1. ЦПТ в банаховом пространстве с безусловным базисом. Пусть c_0 — банахово пространство сходящихся к нулю последователь-

ностей: $c_0 = \{x = (x_i)_1^\infty : \lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0\}$, $\| x \|_0 = \sup\limits_{i\geqslant 1} | x_i |$, $\xi \in c_0$, $M\xi = 0$, $\xi = (\eta_i x_i \ln^{-1/2}(i+1))_1^\infty$, $x = (x_i)_1^\infty \in c_0$, η_i — с. в,

$$M \| (\eta_i)_1^\infty \|_0^2 = K < \infty. \tag{1}$$

В [3—5] показано, что если $(\xi_n)_1^\infty$ — независимые копии ξ и выполнено (1), то для последовательности $(\xi_n)_1^\infty$ справедлива ЦПТ в c_0. Ниже доказывается, что аналогичное утверждение верно в любом банаховом пространстве с безусловным базисом. Все определения и используемые результаты из теории банаховых пространств можно найти в [6].

Теорема 1. *Пусть B — банахово пространство с безусловным базисом $(e_i)_1^\infty$, $\xi = \Sigma_1^\infty \eta_i x_i \ln^{-1/2}(i+1) e_i \in B$, $M\eta_i = 0$, $i \geqslant 1$, $(x_i)_1^\infty$ — неслучайная последовательность из R^1 такая, что $\Sigma_1^\infty x_i e_i \in B$, $(\xi_n)_1^\infty$ — независимые копии ξ. Если выполнено* (1), *то для последовательности $(\xi_n)_1^\infty$ верна ЦПТ.*

Замечание. Условие (1) выполнено в частности, если $| \eta_i | \leqslant C$ почти наверное (п. н.), $C < \infty$.

При доказательстве теоремы нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть $(e_i)_1^\infty$ — безусловный базис пространства B, $\Sigma_1^\infty x_i e_i \in B$ и $0 < L < \infty$. Множество $Z = \{z = \Sigma_1^\infty c_i x_i e_i : | c_i | \leqslant L\}$ компактно.*

Доказательство. Для безусловного базиса существует такая константа K_e, что если $x = \Sigma_1^\infty a_i e_i \in B$ и при любом $i \geqslant 1$, $| c_i | \leqslant | a_i |$, то $\Sigma_1^\infty c_i e_i \in B$ и $\| \Sigma_1^\infty c_i e_i \| < K_e \| x \|$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем j настолько большим, чтобы $\| \Sigma_j^\infty x_i e_i \| < \varepsilon / 2K_e L$. Компактное множество $\{z = \Sigma_1^{j-1} c_i x_i e_i : | c_i | \leqslant L\}$ покроем конечной $\varepsilon/2$-сетью $z_1, \ldots, z_n$. Пусть $z = \Sigma_1^{j-1} c_i x_i e_i + \Sigma_j^\infty c_i x_i e_i \in Z$. Тогда $\| \Sigma_j^\infty c_i x_i e_i \| < K_e L \| \Sigma_j^\infty x_i e_i \| < \varepsilon/2$ и найдется такое z_k из $\varepsilon/2$-сети $z_1, \ldots, z_n$, что $\| \Sigma_1^{j-1} c_i x_i e_i - z_k \| < \varepsilon/2$, откуда $\| z - z_k \| < \varepsilon$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ множество Z можно покрыть конечной ε-сетью. Замкнутость Z очевидна, следовательно, Z — компакт.

Обозначим через R ковариационный оператор величины ξ [7]. Ковариационный оператор R называется гауссовским, если найдется гауссовская с. в. в B, ковариационный оператор которой равен R.

Лемма 2. *Пусть ξ — с. в. в банаховом пространстве B с базисом $(e_i)_1^\infty$, $M \| \xi \|^2 < \infty$, $M\xi = 0$ и ξ имеет гауссовский ковариационный оператор. Пусть $(\xi_n)_1^\infty$ — независимые копии ξ. Обозначим через $V_m : B \to B$ оператор $V_m(\Sigma_1^\infty x_i e_i) = \Sigma_{m+1}^\infty x_i e_i$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $\forall \varepsilon > 0 \ \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant 1} P(\| V_m(S_n/\sqrt{n}) \| > \varepsilon) = 0$;

б) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant 1} M \| V_m(S_n) \| / \sqrt{n} = 0$;

в) $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant 1} M \| V_m(S_n) \|^2 / n = 0$;

г) *для последовательности $(\xi_n)_1^\infty$ выполнена ЦПТ.*

Доказательство. Импликации в) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а) очевидны. Ясно также, что из в) следует $\sup\limits_{n\geqslant 1} M \| S_n/\sqrt{n} \| < \infty$. Это неравенство, гауссовость R и условие а) обеспечивают выполнение ЦПТ ([8, 7, с. 54]). Если выполнено условие г), то для всякого $\varepsilon > 0$ $P(\| V_m(S_n)/\sqrt{n} \| > \varepsilon) \to P(\| V_m(\gamma) \| > \varepsilon)$ при $n \to \infty$, поскольку $\| V_m(x) \|$ — непрерывный функционал на B, где γ — гауссовская величина в B. Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} P \| V_m(S_n)/\sqrt{n} \| > \varepsilon) = \lim\limits_{m\to\infty} P(\| V_m(\gamma) \| > \varepsilon) = 0$, а это фактически и есть условие а). Для доказательства леммы теперь достаточно показать, что а) $\Rightarrow$ в). Используем неравенства

$$P(\eta \geqslant \lambda M\eta) \geqslant (1-\lambda)^2 (M\eta)^2 / M\eta^2, \tag{2}$$

где η — действительная с. в. с конечной дисперсией, $0<\lambda<1$ [9, с. 19] и

$$M\|S_n\|^2-(M\|S_n\|)^2\leqslant\Sigma_1^n M\|\xi_k\|^2 \tag{3}$$

[10]. Предположим, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\sup_{n\geqslant 1} M\|V_m(S_n)\|^2/n=d>0. \tag{4}$$

Хорошо известно [6], что $\sup\limits_{m\geqslant 1}\|V_m\|<\infty$ и для любого $x\in B$ $\|V_m(x)\|\to 0$ при $m\to\infty$. Из теоремы Лебега об ограниченной сходимости в условиях леммы 2 имеем

$$\lim_{m\to\infty} M\|V_m(\xi)\|^2=0. \tag{5}$$

Положим в (2) $\eta=\|V_m(S_n)/\sqrt{n}\|$. Тогда

$$P(\|V_m(S_n/\sqrt{n})\|\geqslant\lambda M\|V_m(S_n/\sqrt{n})\|)\geqslant(1-\lambda)^2\frac{(M\|V_m(S_n)\|)^2}{M\|V_m(S_n)\|^2}. \tag{6}$$

Подставим в неравенство (3) вместо ξ_k величины $V_m(\xi_k)$ и применим равенства (4), (5). Получим, что существуют подпоследовательности m_k, $n_k\uparrow\infty$ при $k\uparrow\infty$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}(M\|V_{m_k}(S_{n_k})\|)^2/n_k=\lim_{k\to\infty} M\|V_{m_k}(S_{n_k})\|^2/n_k=d>0.$$

Отсюда, учитывая неравенство (6), приходим к противоречию с условием а), т. е. лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если выполнено* (1), *то* $M\|\xi\|^2<\infty$.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы 1 имеем [6] (лемма 1.4)

$$\|\xi\|\leqslant\|(\eta_i)_1^\infty\|_0\sup_{\theta_i=\pm 1}\left\|\sum_1^\infty\theta_i x_i\ln^{-1/2}(i+1)e_i\right\|,$$

а величина $\sup\limits_{\theta_i=\pm 1}\|\Sigma_1^\infty\theta_i x_i\ln^{-1/2}(i+1)e_i\|$ ограничена [6, с. 120], ибо ряд $\Sigma_1^\infty x_i\ln^{-1/2}(i+1)e_i$ сходится безусловно.

Лемма 4. *С. в.* ξ *имеет гауссовский ковариационный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим гауссовскую последовательность $\gamma_i\in R^1$ такую, что

$$M\gamma_i=0,\quad M\gamma_i\gamma_j=M\eta_i\eta_j=r_{ij},\quad i,j\geqslant 1. \tag{7}$$

Выполнение условия (1) обеспечивает ограниченность по i $M\gamma_i^2$. Известно [7, с. 255], что тогда $P(\sup\limits_{i\geqslant 1}|\gamma_i|\ln^{-1/2}(i+1)<\infty)=1$. Следовательно, $\gamma=\Sigma_1^\infty\gamma_i x_i\ln^{-1/2}(i+1)e_i\in B$, поскольку $\Sigma_1^\infty x_i e_i$ сходится безусловно в B.

Отсюда и из равенства (7) $\forall x^*, y^*\in B$ имеем

$$Mx^*(\gamma)\,y^*(\gamma)=\sum_{i,j=1}^\infty r_{ij}x_i x_j[\ln(i+1)\ln(j+1)]^{-1/2}x^*(e_i)\,y^*(e_j)=Mx^*(\xi)\,y^*(\xi).$$

Последние равенства обеспечивают [7, с. 139] совпадение ковариационных операторов величин ξ и γ.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 3, 4 следует сходимость конечномерных распределений $S_n/\sqrt{n}$ к конечномерным распределениям γ [1]. Остается доказать плотность мер P_n, отвечающих с. в. $S_n/\sqrt{n}$. Рассмотрим сначала случай, когда ξ_k симметрично распределены. Пусть $\xi_k=\Sigma_{i=1}^\infty\eta_{ki}x_i\ln^{-1/2}(i+1)e_i$, $k\geqslant 1$; тогда $S_n/\sqrt{n}=\Sigma_{i=1}^\infty(n\ln(i+1))^{-1/2}\times$ $\times(\Sigma_{k=1}^n\eta_{ki})x_i e_i$. Докажем, что

$$\lim_{L\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} P\left(\sup_{i\geqslant 1}(n\ln(i+1))^{-1/2}\left|\sum_{k=1}^n\eta_{ki}\right|>L\right)=0. \tag{8}$$

Плотность семейства мер P_n будет тогда вытекать из леммы 1 и (8).

Нам потребуется следующее неравенство [11, с. 70]:

$$P\left(\left|\sum_1^n \varepsilon_k a_k\right| \geqslant z\left(\sum_1^n a_k^2\right)^{1/2}\right) \leqslant 2\exp(-z^2/2), \tag{9}$$

где $a_k \in R^1$, $P(\varepsilon_k = \pm 1) = 1/2$, ε_k независимы, $k = \overline{1, n}$. Если $(\eta_k)_1^n$ — последовательность независимых симметричных величин, то она эквивалентна последовательности $(\varepsilon_k \eta_k)_1^n$, $(\varepsilon_k)_1^n$ не зависят от $(\eta_k)_1^n$. Поэтому из (9) имеем $P(|\Sigma_1^n \eta_k| \geqslant z(\Sigma_1^n \eta_k^2)^{1/2}) \leqslant 2\exp(-z^2/2)$. Отсюда для любого $i \geqslant 1$

$$P\left((n\ln(i+1))^{-1/2}\left|\sum_{k=1}^n \eta_{ki}\right| \geqslant z\left(\sum_{k=1}^n \eta_{ki}^2/n\right)^{1/2}\right) \leqslant 2/(i+1)^{z^2/2}. \tag{10}$$

С другой стороны, применяя усиленный закон больших чисел в R^1 и условие (1), имеем

$$\sup_{i\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta_{ki}^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sup_{i\geqslant 1} \eta_{ki}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \|(\eta_{ki})_{i=1}^\infty\|_0^2 \xrightarrow{\text{п.н.}} K.$$

Следовательно,

$$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{i\geqslant 1}\sum_{k=1}^n \eta_{ki}^2/n = \eta < \infty \text{ п. н.} \tag{11}$$

Тогда оценки (10), (11) дают

$$P\left(\sup_{i\geqslant 1}(n\ln(i+1))^{-1/2}\left|\sum_{k=1}^n \eta_{ki}\right| > z\eta^{1/2}\right) \leqslant \sum_1^\infty 2/(i+1)^{z^2/2} = f(z) \to 0, \quad z\to\infty. \tag{12}$$

Поскольку в (12) $f(z)$ не зависит от n, с учетом (11) получаем равенство (8). Итак, теорема доказана в симметричном случае.

Пусть ξ — произвольная с. в. в B, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Положим $\xi_k^s = \xi_k - \xi_k'$, где (ξ_k, ξ_k') — независимые копии ξ, $k \geqslant 1$, $S_n^s = \Sigma_{k=1}^n \xi_k^s$. Ясно, что ξ_k^s симметрично распределена и удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, для последовательности $(\xi_n^s)_{n=1}^\infty$ выполняется ЦПТ и условие в) леммы 2, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant 1} M\|V_m(S_n^s)\|^2/n = 0$.

Известно [1], что $M\|X+Y\|^2 \geqslant M\|Y\|^2$, если X, Y независимы и $MX = 0$. Поэтому $M\|V_m(S_n^s)\|^2 \geqslant M\|V_m(S_n)\|^2$ и для последовательности $(\xi_n)_1^\infty$ справедливо условие в) леммы 2. Тогда для $(\xi_n)_1^\infty$ выполнена ЦПТ. Теорема 1 доказана.

2. Контрпример к ЦПТ в пространстве c_0. В работе [2] для каждого сепарабельного банахова пространства B, содержащего равномерно l_∞^n, построен пример такой с. в. ξ в B, что

$$\|\xi\| \leqslant 1 \text{ п. н.}, \tag{13}$$

$$\xi \text{ имеет гауссовский ковариационный оператор,} \tag{14}$$

но ЦПТ для $(\xi_n)_1^\infty$ не выполняется (ξ_n, $n \geqslant 1$, — независимые копии ξ). Построим пример с. в. ξ в пространстве c_0 такой, чтобы выполнялись условия (13), (14) и

$$\sup_{n\geqslant 1} M\|S_n\|^2/n < \infty, \tag{15}$$

но существовали $\varepsilon > 0$, $\beta > 0$, для которых

$$\varlimsup_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} P(\|V_m(S_n/\sqrt{n})\| > \varepsilon) > \beta. \tag{16}$$

Следовательно, по лемме 2 ЦПТ для $(\xi_n)_1^\infty$ не верна.

Пусть $(e_i)_1^\infty$ — естественный базис пространства c_0, $(\eta_{ki})_{k,i=1}^\infty$ — независимые с. в., $P(\eta_{ki}=1)=P(\eta_{ki}=-1)=\ln^{-1}(i+7)$, $P(\eta_{ki}=0)=1-$ $-2\ln^{-1}(i+7)$, $x_i=(\ln\ln(i+7)/\ln(i+7))^{1/2}$, $\xi_n=\Sigma_{i=1}^{\infty}\eta_{ni}x_ie_i$, $n, i\geqslant 1$.

Теорема 2. *Для последовательности* $(\xi_n)_1^\infty$ *выполняются условия* (13) — (16).

Доказательство. Нетрудно проверить, что построенные величины ξ_n удовлетворяют условиям (13), (14) [2]. Докажем неравенство (16). Положим $A_{ni}=\bigcap_{k=1}^{n}(\eta_{ki}=1)$, $N_n=[\exp(n\ln n+\ln\ln n)]$ и $A_n=\bigcup_{i=n}^{N_n}A_{ni}$. Тогда $P(A_n)=1-P\left(\bigcap_{i=n}^{N_n}\overline{A}_{ni}\right)=1-\prod_{i=n}^{N_n}(1-\ln^{-n}(i+7))$. Будем писать $a_n\sim b_n$, если $a_n/b_n\to 1$ при $n\to\infty$. При больших n имеем

$$\prod_{i=1}^{N_n-7}(1-\ln^{-n}(i+7))\leqslant(1-\ln^{-n}N_n)^{N_n-7}\sim(1-(n\ln n+\ln\ln n)^{-n})^{N_n}=$$

$$=(1-\exp(-n\ln(n\ln n+\ln\ln n)))^{N_n}\sim$$

$$\sim\left(1-\frac{1}{N_n}\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{\ln\ln n}{n\ln n}\right)\right)\right)^{N_n}\to e^{-1}$$

при $n\to\infty$, поскольку $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln\ln n}{n\ln n}\right)\right)\sim\exp\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$. Кроме того, $\Pi_{i=1}^{n}(1-\ln^{-n}(i+7))\geqslant(1-\ln^{-n}8)^n\to 1$ при $n\to\infty$. Следовательно, $\underline{\lim}_{n\to\infty}P(A_n)\geqslant 1-e^{-1}$. Если $\omega\in A_n$, то

$$\|V_n(S_n(\omega)/\sqrt{n})\|\geqslant\max_{n\leqslant i\leqslant N_n}\left|\frac{x_i}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\eta_{ki}(\omega)\right|\geqslant\frac{n\ln\ln^{1/2}N_n}{n^{1/2}\ln^{1/2}N_n}\sim$$

$$\sim\frac{\ln^{1/2}(n\ln n+\ln\ln n)}{(\ln n+(\ln\ln n)/n)^{1/2}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

Поэтому $\overline{\lim}_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}P(\|V_m(S_n/\sqrt{n})\|>1/2)\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}P(A_n)\geqslant 1-e^{-1}$, т. е. неравенство (16) доказано. Покажем, что

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}P(\|S_n/\sqrt{n}\|>C)=0. \tag{17}$$

Отсюда, используя рассуждения, аналогичные применявшимся при доказательстве леммы 2, получаем оценку (15). Имеем $P(\|S_n/\sqrt{n}\|>C)=$ $=P(\sup_{i\geqslant 1}|\Sigma_{k=1}^{n}\eta_{ki}|x_i/\sqrt{n}>C)\leqslant\Sigma_{\sqrt{n}x_i\geqslant C}P(|\Sigma_{k=1}^{n}\eta_{ki}|>C\sqrt{n}/x_i)\overset{\text{def}}{=}I(C,n)$. Для оценивания величины $I(C,n)$ нам потребуются следующие неравенства [11, с. 76,12]:

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}Y_k\right|>x\sqrt{n}\right)\leqslant 2\exp(-2^{-1}x\sqrt{n}\operatorname{arsh}(x/2\sigma^2\sqrt{n}),\quad x>0, \tag{18}$$

и

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}Y_k\right|>x\sqrt{n}\right)\leqslant 2\exp(-x\sqrt{n}/4), \tag{19}$$

при $x>\sigma^2\sqrt{n}$ [11, с. 73], где $(Y_k)_1^n$ — симметричные н. о. р. с. в., $MY_k^2=\sigma^2$, $|Y_k|\leqslant 1$. Функция $\operatorname{arsh}(z)$ удовлетворяет следующим неравенствам [13, с. 52]:

$$\operatorname{arsh}(z)\geqslant z-z^3/6,\ |z|<1;\ \operatorname{arsh}(z)\geqslant\ln 2z,\ |z|\geqslant 1. \tag{20}$$

Положим

$$A_1=\{i\geqslant 1: C\leqslant \sqrt{n}x_i,\ C<2\sigma_i^2\sqrt{n}x_i\},\ A_2=\{i\geqslant 1: C\leqslant \sqrt{n}x_i,$$
$$C\geqslant 2\sigma_i^2\sqrt{n}x_i,\ \sigma_i^2\sqrt{n}\leqslant 1\},\ A_3=\{i\geqslant 1: C\leqslant \sqrt{n}x_i,\ C\geqslant 2\sigma_i^2\sqrt{n}x_i,$$
$$\sigma_i^2\sqrt{n}>1\},\ \sigma_i^2=M\eta_{ki}^2=2/\ln(i+7),\ P(i,C,n)=P(|\Sigma_{k=1}^n\eta_{ki})>C\sqrt{n}/x_i),$$
$$I_j(C,n)=\Sigma_{i\in A_j}P(i,C,n),\ j=1,2,3.$$

Тогда $I(C,n)=\Sigma_{j=1}^3 I_j(C,n)$. При больших C из неравенств (18) и (20) имеем

$$I_1(C,n)\leqslant 2\sum_{i\in A_1}\exp\left(-\frac{C\sqrt{n}}{2x_i}\frac{5C}{6\cdot 2\sigma_i^2\sqrt{n}x_i}\right)=2\sum_{i\in A_1}\exp\left(-\frac{5C^2}{24\sigma_i^2x_i}\right)=$$
$$=2\sum_{i\in A_2}\exp\left(-\frac{5C^2\ln^2(i+7)}{48\ln\ln(i+7)}\right)\leqslant 2\sum_{i\in A_1}(i+7)^{-K_1C^2},\tag{21}$$

$$I_2(C,n)\leqslant 2\sum_{i\in A_1}\exp\left(-\frac{C\sqrt{n}}{2x_i}\ln\left(\frac{C}{\sigma_i^2\sqrt{n}x_i}\right)\right)\leqslant 2\sum_{i\in A_2}\exp\left(-\frac{C\sqrt{n}}{2x_i}\ln(C/x_i)\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{i\in A_2}\exp\left(-\frac{C^2}{2x_i^2}\ln\left(\frac{\ln^{1/2}(i+7)}{\ln\ln^{1/2}(i+7)}\right)\right)=2\sum_{i\in A_2}\exp\left(-\frac{C^2}{4}\ln(i+7)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{\ln\ln\ln(i+7)}{\ln\ln(i+7)}\right)\right)\leqslant 2\sum_{i\in A_2}(i+7)^{-K_2C^2}.\tag{22}$$

В области A_3 применим неравенство (19):

$$I_3(C,n)\leqslant 2\sum_{i\in A_3}\exp\left(-\frac{C\sqrt{n}}{4x_i}\right)\leqslant 2e^{2\sqrt{n}}e^{-CK_3\sqrt{n}}=2e^{-\sqrt{n}(CK_3-2)}.\tag{23}$$

В оценках (21)—(23) $K_1>0$, $K_2>0$, $K_3>0$ — абсолютные константы. Поэтому $I(C,n)=\Sigma_{j=1}^3 I_j(C,n)\to 0$ при $C\to\infty$ равномерно по n, т. е. (17) доказано.

1. *Araujo A., Giné E.* The central limit theorem for real and Banach valued random variables.— New York: Wiley, 1980.— 233 p.
2. *Čobanjan S. A., Tarieladze V. I.* A counterexample concerning the CLT in Banach space// Lect. Notes Math.— 1978.— **656**.— P. 25—30.
3. *Паулаускас В. И.* О центральной предельной теореме в банаховом пространстве c_0 // Докл. АН СССР.— 1980.— **254**, № 2.— С. 286—288.
4. *Паулаускас В. И., Рачкаускас А., Сакалаускас В.* О центральной предельной теореме сходящихся к нулю последовательностей // Лит. мат. сб.— 1983.— **23**, № 1.— С. 163—174.
5. *Heinkel B.* Majorizing measures and limit theorems for c_0 valued random variables // Lect. Notes Math.— 1983.— **990**.— P. 136—149.
6. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространства Банаха. I // Успехи мат. наук.— 1970.— **25**, вып. 3.— С. 113—174.
7. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М. : Наука, 1985.— 368 с.
8. *Нгуен Зуй Тиен.* О слабой относительной компактности вероятностных мер в банаховых пространствах с базисом Шаудера // Сообщ. АН ГССР.— 1973.— **71**, № 1.— С. 21—24.
9. *Кахан Ж. П.* Случайные функциональные ряды — М. : Мир, 1973.— 302 с.
10. *Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.* Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— **30**, № 1.— С. 127—131.
11. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин.— М. : Наука, 1972.— 414 с.
12. *Прохоров Ю. В.* Одна экстремальная задача теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.— 1959.— **4**, № 2.— С. 211—214.
13. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган.— М.: Наука, 1979.— 830 с.

Киев. ун-т — Получено 09.12.85