УДК 517.949.2

В. Г. Паньков

Некоторые вопросы существования инвариантных тороидальных множеств систем разностных уравнений

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad h_{n+1} = [E + b(\varphi_n)]\, h_n + c(\varphi_n), \tag{1}$$

где $h = (h^1, h^2, \ldots, h^s)$, $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$; $a(\varphi)$, $b(\varphi)$, $c(\varphi)$ — непрерывные, удовлетворяющие условиям существования решения, периодические по φ с периодом 2π функции, $\| h \| = \left(\sum_{i=1}^{s} (y^i)^2 \right)^{1/2} \leqslant d$, E — единичная матрица.

Первое из уравнений системы (1) можно трактовать, как динамическую систему $\varphi \to \varphi_n(\varphi)$ на торе $\mathcal{T}_m$. Здесь $\varphi_n(\varphi)$ — решение первого из уравнений системы (1), подчиненное начальному условию

$\varphi_n(\varphi)|_{n=0} = \varphi$, групповому свойству $\varphi_n(\varphi_k(\varphi)) = \varphi_{n+k}(\varphi)$ и следующему условию периодичности:

$$\varphi_n(\varphi + 2p\pi) = 2p\pi + \varphi_n(\varphi), \tag{2}$$

справедливым для всех $n, k \in Z$, $\varphi \in \mathscr{T}_m$ и целочисленных векторов $p = (p^1, \ldots, p^m)$.

Поэтому систему (1) естественно назвать линейным расширением динамической системы на торе $\mathscr{T}_m$ и рассматривать ее как динамическую систему в пространстве $\mathscr{T}_m \times E_s$.

Рассмотрим вопрос существования инвариантных тороидальных множеств системы (1). Под инвариантной будем понимать поверхность, обладающую следующим свойством: если в начальный момент $n = k$ решение системы (1) лежит на этой поверхности, то оно остается на ней при всех n. Инвариантное тороидальное множество будем искать в следующем виде:

$$h = u(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m. \tag{3}$$

Выражение (3) будет определять инвариантное тороидальное множество, если $\forall n \in Z$ выполняются соотношения

$$u(\varphi_{n+1}(\varphi)) = [E + b(\varphi_n(\varphi))]\, u(\varphi_n(\varphi)) + c(\varphi_n)(\varphi)), \tag{4}$$

где $\varphi_n(\varphi)$ — решение системы

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad \varphi_0(\varphi) = \varphi, \tag{5}$$

φ — произвольная постоянная. Соотношение (4) с учетом (5) можно представить в виде

$$u(\varphi_n(\varphi) + a(\varphi_n(\varphi))) = [E + b(\varphi_n(\varphi))]\, u(\varphi_n(\varphi)) + c(\varphi_n(\varphi)), \tag{6}$$

и поскольку (6) выполняется для всех $n \in Z$, то при $n = 0$ приходим к следующему функциональному уравнению:

$$u(\varphi + a(\varphi)) - u(\varphi) = b(\varphi)\, u(\varphi) + c(\varphi). \tag{7}$$

Определим линейный оператор $L: C(\mathscr{T}_m) \to C(\mathscr{T}_m)$ следующим образом:

$$Lu(\varphi) = u(\varphi + a(\varphi)) - u(\varphi) - b(\varphi)\, u(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m. \tag{8}$$

Очевидно, что если функция $u(\varphi)$ определяет инвариантное тороидальное множество системы (1), то она удовлетворяет тождеству

$$Lu(\varphi) = c(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{T}_m. \tag{9}$$

Обратно, если некоторая функция $u(\varphi) \in C(\mathscr{T}_m)$ удовлетворяет тождеству (8), то $u(\varphi_n(\varphi))$, где $\varphi_n(\varphi)$ — решение системы (5) для всех $n \in Z$, удовлетворяет (4). Таким образом, вопрос существования инвариантных тороидальных множеств системы (1) сводится к вопросу разрешимости уравнения (8).

Цель настоящей работы — выяснить необходимые условия такой разрешимости и тем самым выяснить необходимые условия существования непрерывных тороидальных множеств системы разностных уравнений (1). Достаточные условия существования инвариантных тороидальных множеств систем разностных уравнений установлены в работе [3].

Введем для оператора L, как для оператора, действующего из $L_2(\mathscr{T}_m)$ в $L_2(\mathscr{T}_m)$, сопряженный к нему оператор L^*, связанный с L соотношением

$$(Lu, v)_0 = (u, L^*v)_0 \quad \forall u, v \in L_2(\mathscr{T}_m), \tag{10}$$

где

$$(u, v)_0 = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathscr{T}_m} \langle u(\varphi), v(\varphi) \rangle\, d\varphi. \tag{11}$$

Здесь $\langle u, v \rangle = \sum_i f_i g_i$ — обычное скалярное произведение функций u и v, как векторов евклидова пространства. Из теоремы Риса о представлении линейного операторного функционала в гильбертовом пространстве следует существование для оператора L сопряженного к нему оператора L^*. С помощью соотношений (10), (11) и замены переменных

$$\varphi + a(\varphi) = \psi \tag{12}$$

находим вид оператора L^*:

$$L^*u(\varphi) = |\partial f/\partial\varphi|\, u(f(\varphi)) - [b^*(\varphi) + E]\, u(\varphi). \tag{13}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (8) с функцией $c(\varphi) \in L_2(\mathcal{T}_m)$ имело в $L_2(\mathcal{T}_m)$ решение, необходимо, чтобы правая часть $c(\varphi)$ была ортогональна к любому решению $v(\varphi) \in L_2(\mathcal{T}_m)$ однородного сопряженного уравнения $L^*v = 0$.*

Доказательство. Пусть (8) имеет решение в $L_2(\mathcal{T}_m)$, т. е. $\exists u(\varphi) \in L_2(\mathcal{T}_m)$ такая, что $Lu(\varphi) \equiv c(\varphi)$. Для произвольного $v \in \operatorname{Ker} L^*$ имеем $(Lu(\varphi), v(\varphi))_0 = (c(\varphi), v(\varphi))_0$. Поскольку $(Lu(\varphi), v(\varphi))_0 = (u(\varphi), L^*v(\varphi))_0 = (u(\varphi), 0) = 0$, то $(c(\varphi), v(\varphi))_0 = 0$, а это возможно тогда и только тогда, когда $c(\varphi) \perp v(\varphi)$.

Оказывается, что необходимые условия существования инвариантного тороидального множества в (1), или, что то же самое, разрешимости уравнения (8), можно усилить. С этой целью необходимо изучить решения уравнения

$$Lu = 0 \tag{14}$$

в классе $C(\mathcal{T}_m)$.

Будем называть решение уравнения (14) $u(\varphi) \in L_2(\mathcal{T}_m)$ вырожденным, если выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{|n| \to \infty} u(\varphi_n(\varphi)) = 0 \tag{15}$$

для произвольного $\varphi_n(\varphi)$, являющегося решением динамической системы на тороидальном множестве

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = a(\varphi_n), \quad \varphi_0(\varphi) = \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{16}$$

Назовем ядро оператора L вырожденным и будем писать $\operatorname{Ker} L = \{0 \mid n \mid \to \infty\}$, если он будет состоять лишь из вырожденных решений уравнения (14).

Будем говорить, что ядро оператора L тривиально и писать $\operatorname{Ker} L = \{0\}$, если оно состоит лишь из функций $u = 0$.

Выясним теперь необходимые условия разрешимости уравнения (8) для произвольной функции $c(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. Обозначим через $\Omega_0^n(\varphi)$ матрицант системы уравнений

$$h_{n+1} - h_n = b(\varphi_n(\varphi))\, h_n, \tag{17}$$

где $\varphi_n(\varphi)$ — решение системы (16), т. е. функциональную матрицу ее решений, у которой $\Omega_0^n(\varphi)|_{n=0} = E$, где E — единичная матрица.

Аналогично [2] справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $u_0 \in \operatorname{Ker} L$, u_j — решение уравнения $Lu = u_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$ Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$u_j(\varphi_n(\varphi)) = \Omega_0^n(\varphi)\Big[u_j(\varphi) + n u_{j-1}(\varphi) + u_{j-2}(\varphi) \sum_{\nu=0}^{n} \nu + \ldots + u_0(\varphi) \times$$

$$\times \sum_{i_{j-1}=0}^{n} \sum_{i_{j-2}=0}^{i_{j-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{i_2} i_1\Big], \tag{18}$$

$$\Omega_0^n(\varphi)\, u_j(\varphi) = u_j(\varphi_n(\varphi)) - n u_{j-1}(\varphi_n(\varphi)) + u_{j-2}(\varphi_n(\varphi)) \Big(n^2 - \sum_{\nu=0}^{n} n\Big) + \ldots$$

$$\ldots + u_0(\varphi_n(\varphi))\, g_0\Big(n, \sum_{\nu=0}^{n} \nu, \sum_{i_2=0}^{n} \sum_{i_1=0}^{i_1} i_1, \ldots, \sum_{i_{j-1}=0}^{n} \sum_{i_{j-2}=0}^{i_{j-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{i_2} i_1\Big). \tag{19}$$

Здесь функции g_0, g_1, ... *стремятся к бесконечности при* $n \to \infty$.

Доказательство леммы и теоремы 2 приведено в работе [4].

Используя лемму, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы система уравнений* (8) *имела решение для произвольной функции* $c(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, *необходимо чтобы*:

1) *однородное сопряженное уравнение имело только тривиальное решение* $v(\varphi) \equiv 0$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$;

2) *однородное уравнение* (14) *имело лишь вырожденные решения, т. е. необходимо, чтобы* Ker $L^* = \{0\}$, *либо* Ker $L = \{0 \mid |n| \to \infty\}$.

Приведем пример, показывающий достижимость условий разрешимости уравнения (8).

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\varphi_{n+1} - \varphi_n = 0, \quad h_{n+1} = [E + b(\varphi_n)]\, h_n + c(\varphi), \tag{20}$$

для которой

$$Lu(\varphi) = u(\varphi + 0) - u(\varphi) - b(\varphi)\, u(\varphi) = -\, b(\varphi)\, u(\varphi), \quad L^*u(\varphi) =$$
$$= |\partial f/\partial\varphi|\, u(f(\varphi)) - [b^*(\varphi) + E]\, u(\varphi).$$

Но согласно (20) $f(\varphi) = \varphi$. Тогда $L^*u(\varphi) = -\, b(\varphi)\, u(\varphi)$ и необходимые условия разрешимости уравнения (8) сводятся к требованию

$$\det b(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{21}$$

поскольку линейное однородное уравнение имеет нулевое решение лишь при условии (21), а $\det b(\varphi) = \det b^*(\varphi)$. Но в нашем случае уравнение (8) имеет вид

$$-\, b(\varphi)\, u(\varphi) = c(\varphi), \tag{22}$$

так что необходимые условия (21) оказываются и достаточными, ибо решением (22) является функция $u(\varphi) = -\, b^{-1}(\varphi)\, c(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Приведенный пример характеризует «неулучшимость» условий теоремы 2.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1240.
2. *Самойленко А. М.* Необходимые условия существования инвариантных торов линейных расширений динамических систем на торе // Дифференц. уравнения.— 1980.— **16**, № 8.— С. 1427—1437.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами.— Киев : Наук. думка, 1984.— 213 с.
4. *Паньков В. Г.* Некоторые вопросы существования инвариантных торов систем разностных уравнений.— Киев, 1987.— 19 с.— Деп. в ИНИОН АН СССР, № 2465 Ук. 87.

Киев. ун-т

Получено 07.07.87