УДК 517.535.4

М. Н. Шеремета

О производной целой функции

Для целой трансцендентной функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ положим $M(r)=M(r, f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $M_1(r)=M(r, f')$ и $K_1(r)=rM_1(r)/M(r)$. Т. Ковари [1], уточняя результат С. Н. Бернштейна [2], показал, что если f имеет порядок $\rho\in]0,+\infty[$ и тип $\sigma\in]0,+\infty[$, то $1\leqslant\limsup_{r\to\infty}\{K_1(r)/\rho\sigma r^\rho\}\leqslant e$. Обозначим $\Phi(x)=\sigma\exp\{\rho x\}$. Согласно утверждению Т. Ковари, если

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\{\ln M(r)/\Phi(\ln r)\}=1, \tag{1}$$

то

$$1\leqslant\overline{\lim_{r\to+\infty}}\{K_1(r)/\Phi'(\ln r)\}\leqslant e. \tag{2}$$

Поэтому возникает вопрос, вытекает ли (2) из (1), если Φ не обязательно имеет вид $\sigma\exp\{\rho x\}$, $0<\sigma<+\infty$, $0<\rho<+\infty$. Для решения этой задачи через Ω обозначим класс положительных функций Φ, имеющих положительные непрерывные возрастающие к $+\infty$ на $]-\infty, +\infty[$ производные Φ'.

Теорема 1. *Если $\Phi\in\Omega$ и выполнено* (1), *то имеет место левое неравенство в* (2).

Доказательство. Допустим от противного, что $K_1(r)/\Phi'(\ln r)\leqslant q<1$ при $r\geqslant r_0$, т. е. $M_1(r)/M(r)\leqslant q\Phi'(\ln r)/r$, $r\geqslant r_0$. Используя тогда неравенство $M'(r)\leqslant M_1(r)$ (см., например, [1]), имеем

$$\ln M(r)=\int_{r_0}^{r}\{M'(t)/M(t)\}\,dt+\ln M(r_0)\leqslant q\int_{r_0}^{r}\Phi'(\ln t)\,d\ln t+\ln M(r_0)=$$
$$=q\Phi(\ln r)+\ln M(r_0)-q\Phi(\ln r_0),$$

что невозможно в силу (1). Теорема 1 доказана.

Для $\Phi\in\Omega$ положим $\Psi(x)=x-\Phi(x)/\Phi'(x)$ и покажем, что Ψ — возрастающая к $+\infty$ на $]-\infty, +\infty[$ функция. Действительно, для любых $x\in\mathbb{R}$ и $\delta>0$ имеем

$$\Phi'(x)\int^{x+\delta}\Phi'(t)\,dt<\delta\Phi'(x)\,\Phi'(x+\delta)$$

$$\{\Phi'(x)-\Phi'(x+\delta)\}\int_{-\infty}^{x}\Phi'(t)\,dt<0.$$

Сложив эти неравенства, получим $\Phi'(x)\,\Phi(x+\delta)-\Phi'(x+\delta)\,\Phi(x)<\delta\Phi'(x)\,\Phi'(x+\delta)$ или $\Phi(x+\delta)/\Phi'(x+\delta)-\Phi(x)/\Phi'(x)<\delta=x+\delta-x$, так что $\Psi(x)<\Psi(x+\delta)$ и Ψ — возрастающая функция. Если бы $\Psi(x)\leqslant M<+\infty$, $x\in\mathbb{R}$, то при $x\geqslant M+1$ выполнялось бы неравенство $\Phi'(x)/\Phi(x)\leqslant 1/(x-M)$ и, значит, $\Phi(x)\leqslant(x-M)\,\Phi(M+1)$, а это невозможно, так как из условия $\Phi'(x)\uparrow+\infty$, $x\to+\infty$, вытекает соотношение $\Phi(x)/x\to+\infty$, $x\to+\infty$. Положим в дальнейшем $\beta(x)=\{\ln\Phi'(\Psi^{-1}(x))\}/\Phi'(\Psi^{-1}(x))$. Ясно, что $0<\beta(x)\downarrow 0$ при $x_0\leqslant x\to+\infty$.

Теорема 2. *Если* $\Phi\in\Omega$ *и выполнено* (1), *то*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\{K_1(r)/\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r+\beta(\ln r)))\}\leqslant 1. \tag{3}$$

Доказательство. Из (1) для любого $\varepsilon>0$ при $r\geqslant r_0$ имеем $\ln M(r)\leqslant(1+\varepsilon)\,\Phi(\ln r)$. Поэтому, используя неравенство Коши $|a_n|\,r^n\leqslant M(r)$, для всех $n\geqslant 0$ и всех $r\geqslant r_0$ получаем $|a_n|\leqslant\exp\{(1+\varepsilon)\,\Phi(\ln r)-n\ln r\}$. Взяв здесь $r=\exp\left\{\varphi_1\left(\frac{n}{1+\varepsilon}\right)\right\}$, где φ_1 — функция, обратная к Φ', при $n\geqslant n_0$ имеем

$$|a_n|\leqslant\exp\left\{-n\varphi_1\left(\frac{n}{1+\varepsilon}\right)+(1+\varepsilon)\,\Phi\left(\varphi_1\left(\frac{n}{1+\varepsilon}\right)\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-n\Psi\left(\varphi_1\left(\frac{n}{1+\varepsilon}\right)\right)\right\}. \tag{4}$$

Положим $\gamma(r)=(1+\varepsilon)\,\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r+\beta(\ln r)))$. Очевидно, что для всех достаточно больших r выполняются неравенства $\gamma(r)>(1+\varepsilon)\,\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))\geqslant n_0$ и

$$\beta(\ln r)-\frac{\ln\gamma(r)}{\gamma(r)}\geqslant\frac{\ln\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))}{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))}-\frac{\ln\{(1+\varepsilon)\,\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))}{(1+\varepsilon)\,\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))}=$$

$$=\frac{(1+o(1))\,\varepsilon\ln\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))}{(1+\varepsilon)\,\Phi'(\Psi^{-1}(\ln(r))}\geqslant\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\,\beta(\ln r). \tag{5}$$

Обозначим $R(z)=\sum\limits_{n>\gamma(r)}a_nz^n$. Тогда в силу (4) и (5) при $|z|\leqslant r$ имеем

$$|R(z)|\leqslant\sum_{n>\gamma(r)}|a_n|\,r^n\leqslant\sum_{n>\gamma(r)}\left(\exp\left\{-\Psi\left(\varphi_1\left(\frac{n}{1+\varepsilon}\right)\right)+\ln r\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n>\gamma(r)}\left(\exp\left\{-\Psi\left(\varphi_1\left(\frac{\gamma(r)}{1+\varepsilon}\right)\right)+\ln r\right\}\right)^n=\sum_{n>\gamma(r)}\exp\{-n\beta(\ln(r)\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{-\gamma(r)\,\beta(\ln r)\}+\int_{\gamma(r)}^{\infty}\exp\{-t\beta(\ln r)\}\,dt=(1+1/\beta(\ln r))\times$$

$$\times\exp\{-\gamma(r)\,\beta(\ln r)\}\leqslant\exp\{-\gamma(r)\,\beta(\ln r)-\ln\beta(\ln r)+\ln 2\}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{-(1+\varepsilon)\,\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))\,\beta(r)-\ln\beta(\ln r)+\ln 2\}=$$

$$=\exp\{-\varepsilon\ln\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))-\ln\ln\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))+\ln 2\}\leqslant\{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r)\}^{-\varepsilon} \tag{6}$$

и, аналогично,

$$|R'(z)| \leqslant \frac{1}{r} \sum_{n>\gamma(r)} n|a_n| r^n \leqslant \frac{1}{r} \sum_{n>\gamma(r)} \left(\exp\left\{-\Psi\left(\varphi_1\left(\frac{n}{1+\varepsilon}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\ln n}{n}+\ln r\right\}\right)^n \leqslant \frac{1}{r} \sum_{n>\gamma(r)} \left(\exp\left\{-\Psi\left(\varphi_1\left(\frac{\gamma(r)}{1+\varepsilon}\right)\right)+\frac{\ln\gamma(r)}{\gamma(r)}+\ln r\right\}\right)^n =$$

$$=\frac{1}{r} \sum_{n>\gamma(r)} \left(\exp\left\{-\beta(\ln r)+\frac{\ln\gamma(r)}{\gamma(r)}\right\}\right)^n \leqslant \frac{1}{r}\left(1+1/\left(\beta(\ln r)-\frac{\ln\gamma(r)}{\gamma(r)}\right)\right)\times$$

$$\times \exp\{-\gamma(r)\beta(\ln r)+\ln\gamma(r)\} \leqslant \frac{\gamma(r)}{r} \exp\left\{-\gamma(r)\beta(\ln r)-\ln\beta(\ln r)+\right.$$

$$\left.+\ln 2-\ln\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\right\} \leqslant \frac{\gamma(r)}{r}\{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))\}^{-\varepsilon}. \tag{7}$$

Запишем теперь $f(z)=P(z)+R(z)$, $P(z)=\sum_{n\leqslant\gamma(r)} a_n z^n$. Так как для любого многочлена P с $\deg P=n$ справедлива [2] оценка $M(r,P')\leqslant \frac{n}{r} M(r, P)$, в силу (6) и (7) при $|z|\leqslant r$ имеем

$$|f'(z)| \leqslant |P'(z)|+|R'(z)| \leqslant \frac{\gamma(r)}{r} M(r,P)+\frac{\gamma(r)}{r}\{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))\}^{-\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma(r)}{r}\{M(r)+M(r,R)+\{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r))\}^{-\varepsilon}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma(r)}{r}\{M(r)+2\{\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r)\}^{-\varepsilon}\}.$$

Отсюда вытекает, что $K_1(r) \leqslant (1+o(1))\gamma(r)$, $r\to+\infty$, т. е. в силу произвольности ε получаем (3). Теорема 2 доказана.

Если f имеет порядок $\rho\in]0,+\infty[$ и тип $\sigma\in]0,+\infty[$, то, взяв $\Phi(x)=\sigma\exp\{\rho x\}$, получим $\Phi'(x)=\sigma\rho\exp\{\rho x\}$, $\Psi(x)=x-1/\rho$, $\Psi^{-1}(x)=x+1/\rho$, $\beta(x)=o(1)$, $x\to+\infty$, и $\Phi'(\Psi^{-1}(\ln r+\beta(\ln r)))=(1+o(1))\sigma\rho r^\rho$, $r\to+\infty$, т. е. из теоремы 2 в силу теоремы 1 легко получаем результат из [1].

Положим теперь $\varphi(x)=x\Phi'(x)/\Phi(x)$ и скажем, что $\Phi\in\Omega_1$, если $\Phi\in\Omega$, $\varphi(x)\nearrow+\infty$, $\ln\varphi(x)=o(\Phi(x))$ и $\varphi(x+(1+o(1))x/\varphi(x))=(1+o(1))\times\varphi(x)$ при $0<x_0\leqslant x\to+\infty$. Условие $\varphi(x)\nearrow+\infty$ означает, что Φ растет быстрее, чем степенная функция. Два других условия указывают на некоторую регулярность возрастания функции Φ. Классу Ω_1 принадлежат, например, функции $\Phi(x)=\exp_k(\rho x\}$, $k\geqslant 1$, где $\rho>0$ и $\exp_1 x=\exp x$, $\exp_k x=\exp\{\exp_{k-1}x\}$, $k\geqslant 2$.

Т е о р е м а 3. *Если* $\Phi\in\Omega_1$, *то из* (1) *вытекает* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\Psi(x)=t$ или $x(1-1/\varphi(x))=t$. Тогда в силу условия $\varphi(x)\nearrow+\infty$, $x\to+\infty$, имеем $x(t)=(1+o(1))t$, $t\to+\infty$. Поэтому $x(t)$ будем искать в виде $x(t)=t(1+\gamma_1(t)/\varphi(t))$, где $\gamma_1(t)>0$ при $t\geqslant t_0$. Подставляя это выражение в уравнение, получаем $\gamma_1(t)=\varphi(t)/(\varphi(t+t\gamma_1(t)/\varphi(t))-1)\leqslant\varphi(t)/(\varphi(t)-1)=1+o(1)$, $t\to+\infty$. Поэтому $x(t)\leqslant t+(1+o(1))t/\varphi(t)$, $t\to+\infty$, так что $\Psi^{-1}(x)\leqslant x+(1+o(1))x/\varphi(x)$, $x\to+\infty$. Далее, поскольку $\Phi'(\Psi^{-1}(x))\geqslant\Phi'(x)$, то

$$0<\beta(x)\leqslant\frac{\ln\Phi'(x)}{\Phi'(x)}\leqslant\frac{\ln\Phi(x)+\ln\varphi(x)}{\Phi(x)}\frac{x}{\varphi(x)}=o\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right), \quad x\to+\infty.$$

Поэтому при $x\to+\infty$ имеем $\Psi^{-1}(x+\beta(x))\leqslant x+(1+o(1))x/\varphi(x)$, $\varphi(\Psi^{-1}\times(x+\beta(x)))\leqslant(1+o(1))\varphi(x)$ и

$$\Phi'(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))=(1+o(1))\frac{\varphi(x)}{x}\Phi(x)\exp\{\ln\Phi(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))-$$

$$-\ln\Phi(x)\}=\Phi'(x)(1+o(1))\exp\{\ln\Phi(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))-\ln\Phi(x)\}.$$

Но

$$\ln\Phi(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))-\ln\Phi(x)=\int\limits_x^{\Psi^{-1}(x+\beta(x))}\{\Phi'(t)/\Phi(t)\}\,dt=$$

$$=\int\limits_x^{\Psi^{-1}(x+\beta(x))}\varphi(t)\,d\ln t\leqslant\varphi(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))\ln\frac{\Psi^{-1}(x+\beta(x))}{x}\leqslant(1+o(1)),$$

$$x\to+\infty.$$

Таким образом, $\Phi'(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))\leqslant(1+o(1))\,\Phi'(x)$, $x\to+\infty$, и из (3) получаем (2). Теорема 3 доказана.

Как показано в [1], оценки (2), вообще говоря, неулучшаемые. Однако, если Φ — степенная функция, правую часть (2) можно уточнить.

Теорема 4. *Пусть* $\Phi\in\Omega$ *такая, что* $\Phi(x)=Ax^p$ *при* $x\geqslant x_0>0$, *где* $A\in]0,+\infty[$ *и* $p\in]1,+\infty[$. *Если выполнено* (1), *то*

$$1\leqslant\overline{\lim_{r\to+\infty}}\{K_1(r)/\Phi'(\ln r)\}\leqslant\{p/(p-1)\}^{p-1}.\tag{8}$$

Доказательство. Так как $\Phi(x)=Ax^p$, то $\Phi'(x)=Apx^{p-1}$, $\Psi(x)=\frac{p-1}{p}x$, $\Psi^{-1}(x)=\frac{p}{p-1}x$, $\beta(x)=o(1)$, $x\to+\infty$, и

$$\Phi'(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))=Ap\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}x^{p-1}(1+o(1))=$$

$$=(1+o(1))\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}\Phi'(x),$$

и из (3) получаем (8).

Так как $\{p/(p-1)\}^{p-1}<e$, то оценка (8) точнее оценки (2). Отметим, что $\{p/(p-1)\}^{p-1}\to e$, $p\to+\infty$, и $\{p/(p-1)\}^{p-1}\to1$, $p\to1$. Естественно предположить, что если $\Phi(x)=x\lambda(x)$, $x\geqslant x_0$, и λ — некоторая медленно возрастающая функция, то из (1) вытекает равенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\{K_1(r)/\Phi'(\ln r)\}=1.\tag{9}$$

Теорема 5. *Пусть* $x\lambda'(x)/\lambda(x)\to0$, $x\to+\infty$ (*т. е.* λ — *медленно возрастающая функция*) *и* $\lambda(x^2\lambda'(x)/\lambda(x))\sim\lambda(x)$, $x\to+\infty$. *Если* $\Phi\in\Omega$ *и* $\Phi(x)=x\lambda(x)$, $x\geqslant x_0$, *то из* (1) *вытекает* (9).

Доказательство. Легко видеть, что $\Phi'(x)=(1+o(1))\lambda(x)$ и $\Psi(x)=(1+o(1))x^2\lambda'(x)/\lambda(x)=(1+o(1))\lambda^{-1}(\lambda(x^2\lambda'(x)/\lambda(x)))=(1+o(1))\times\lambda^{-1}((1+o(1))\lambda(x))$ при $x\to+\infty$. Поэтому $\Phi'(\Psi^{-1}(x+\beta(x)))=\Phi'(\Psi^{-1}(x+o(1)))=(1+o(1))\lambda(x)=(1+o(1))\Phi'(x)$, $x\to+\infty$, так что из (3) вытекает (9).

Условиям теоремы 5 удовлетворяют, например, функции $\lambda(x)=\ln_k x$, где $k\geqslant1$, $\ln_1x=\ln x$, $\ln_k x=\ln(\ln_{k-1}x)$, $k\geqslant2$.

В заключение докажем, что оценка (8) неулучшаемая. Для этого докажем сначала следующее утверждение.

Лемма. *Справедливо равенство* $A=B$, *где*

$$A=\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln M(r)}{\ln^p r},\quad B=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{p-1}{-\ln|a_n|}\right)^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)^p,\quad p>1.$$

Доказательство. В предположении, что $0<A<+\infty$, из неравенства (4) с $\Phi(x)=Ax^p$ легко получаем

$$|a_n|\leqslant\exp\left\{-n\,\frac{p-1}{p}\left(\frac{n}{Ap(1+\varepsilon)}\right)^{1/(p-1)}\right\},\quad n\geqslant n_0(\varepsilon),\tag{10}$$

откуда следует, что $B \leqslant A$. При $A = +\infty$ это неравенство очевидно, а в случае, когда $A = 0$, его доказательство такое же, как доказательство (4) но с произвольным $\varepsilon > 0$ вместо A.

Наоборот, в предположении, что $B < +\infty$, для любого $B^* > B$ имеем неравенство (10) с B^* вместо $A(1+\varepsilon)$. Поэтому, если $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geqslant 0\}$ — максимальный член степенного разложения функции f, то $\ln \mu(r) \leqslant \max\left\{-t\,\frac{p-1}{p}\left(\frac{t}{pB^*}\right)^{1/(p-1)} + t\ln r : t \geqslant 0\right\} = B^* \ln^p r, \quad r \geqslant r_0$. Но $\ln M(r) \sim \ln \mu(r)$, $r \to +\infty$. Поэтому $\ln M(r) \leqslant (1 + o(1)) B^* \ln^p r$, $r \to +\infty$. Отсюда легко вытекает неравенство $A \leqslant B$, которое очевидно при $B = +\infty$. Лемма доказана.

Для простоты предположим, что в теореме 4 $A = 1$. Положим $r_n = \exp\left\{\frac{p-1}{p}\left(\frac{n!}{p}\right)^{1/(p-1)}\right\}$, $b_n = r_n^{n!-(n-1)!}$, $a_n = \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n}$. Тогда

$$-\ln a_n = \sum_{k=2}^{n} \{k! - (k-1)!\} \ln r_k = (p-1)\, p^{-p/(p-1)} \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)(k!)^{p/(p-1)} =$$

$$= (p-1)\, p^{-p/(p-1)} (1 + o(1)) (n!)^{p/(p-1)}, \quad n \to \infty.$$

Поэтому по лемме для целой функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n!}$ имеем $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \{\ln M(r)/\Phi(\ln r)\} = 1$, $\Phi(x) = x^p$. При $k < n$ имеем

$$\frac{a_k r_n^{k!}}{a_n r_n^{n!}} = \frac{b_{k+1} \ldots b_n}{r_n^{n!-k!}} = \left(\frac{r_{k+1}}{r_n}\right)^{(k+1)!-k!} \cdots \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{(n-1)!-(n-2)!} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^{(n-1)!-(n-2)!} \leqslant \exp\{-(p-1)\, p^{-p/(p-1)} (1 + o(1)) (n-1)!\, (n!)^{1/p-1)}\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-((n-1)!)^{p/(p-1)}\}, \quad n \geqslant n_1,$$

а при $k > n$ выполняется

$$\frac{a_k r_n^{k!}}{a_n r_n^{n!}} = \frac{r_n^{k!-n!}}{b_{n+1} \ldots b_k} = \left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right)^{(n+1)!-n!} \cdots \left(\frac{r_n}{r_k}\right)^{k!-(k-1)!} \leqslant \left(\frac{r_{k-1}}{r_k}\right)^{k!-(k-1)!} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{-(1 + o(1))(p-1)\, p^{-p/(p-1)} (k!)^{p/(p-1)}\} \leqslant \exp\{-((k-1)!)^{p/(p-1)}\},$$

$$n \geqslant n_2,$$

Поэтому при $n \geqslant \max\{n_1, n_2\}$ справедливы соотношения

$$\sum_{k \neq n} \frac{a_k r_n^{k!}}{a_n r_n^{n!}} \leqslant n \exp\{-((n-1)!)^{\frac{p}{p-1}}\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-((k-1)!)^{\frac{p}{p-1}}\} \to 0,$$

$$n \to \infty,$$

и

$$\sum_{k \neq n} \frac{k! a_k r_n^{k!-1}}{n! a_n r_n^{n!-1}} \leqslant n \exp\{-((n-1)!)^{\frac{p}{p-1}}\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-((k-1)!)^{\frac{p}{p-1}} +$$

$$+ \ln k!\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $M(r_n) = (1 + o(1))\, a_n r^n$, $M_1(r_n) = (1 + o(1))\, n!\, a_n r_n^{n!-1}$ и $K_1(r_n) = (1 + o(1))\, n!$ при $n \to \infty$. Но $n! = p\left(\frac{p}{p-1} \ln r_n\right)^{p-1} =$

$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} p \ln^{p-1} r_n = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \Phi'(\ln r_n)$. Таким образом, $K_1(r_n)/\Phi'(\ln r_n) = (1+o(1))\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}$ $(n \to \infty)$ и в силу теоремы 4 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\{K_1(r)/\Phi'(\ln r)\} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}$.

1. *Kövari T.* A note on entire functions // Acta math. Acad. Sci. hung.— 1957.— 8.— P. 87—90.
2. *Bernstein S.* Lecons sur les proprietes extremales et la meileure approximation des fonctions analitiques d'une variable reelle.— Paris, 1926.

Львов. ун-т Получено 27.12.85