УДК 531.381

В. Н. Кошляков

Об уравнениях движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига — Гамильтона

Настоящая работа, являющаяся развитием публикаций автора [1—5], посвящена исследованию с помощью параметров Родрига — Гамильтона движения около вертикали быстровращающегося тела с произвольным распределением масс. При этом в отличие от указанных работ центр тяжести тела не полагается лежащим на оси собственного вращения. Выясняются обстоятельства возможной неустойчивости такого движения.

1. Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки можно представить в виде [4]

$$2ABC\frac{d^2\lambda}{dt^2} + Q\lambda = 0, \tag{1}$$

где $\lambda = \| \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \|^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица-столбец параметров Родрига — Гамильтона; A, B, C — моменты инерции тела относительно связанных с ним главных осей Ox, Oy и Oz с началом в неподвижной точке O; Q — матрица вида

$$Q = \begin{Vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Элементы матрицы (2) таковы:

$$\begin{gathered} a_1 = 2ABC(\dot\lambda_0^2 + \dot\lambda_1^2 + \dot\lambda_2^2 + \dot\lambda_3^2), \quad a_2 = BC[M_x - (C-B)qr], \\ a_3 = CA[M_y - (A-C)rp], \quad a_4 = AB[M_z - (B-A)pq]. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz; M_x, M_y, M_z — проекции на эти же оси момента силы тяжести, действующей на тело. Параметры Родрига — Гамильтона связаны с углами Эйлера ψ, ϑ и φ известными соотношениями

$$\begin{gathered} \lambda_0 = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, \\ \lambda_2 = \sin\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}, \end{gathered} \tag{4}$$

из которых следует

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \tag{5}$$

2. Допустим, что к некоторому телу с неподвижной точкой O прикладывается вращательный импульс относительно связанной с ним главной оси

Oz, совпадающей в начальное мгновение времени с неподвижной вертикалью $O\zeta$, в результате чего тело приобретает весьма значительную угловую скорость ω.

Если центр тяжести тела лежит на оси Oz, то уравнения Эйлера—Пуассона и соответственно уравнения (1) имеют частное решение

$$p^0 = q^0 = 0, \quad r^0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_1^0, \ \gamma_2^0 = 0, \quad \gamma_3^0 = 1, \tag{6}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы углов, образуемых вертикалью $O\zeta$ с осями Ox, Oy и Oz трехгранника $Oxyz$, связанного с телом. Отсюда следует, что тело, приведенное во вращение с угловой скоростью ω относительно вертикали, будет (при игнорировании сопротивлений) продолжать вращаться вокруг нее с угловой скоростью $r^0 = \omega$, соответствующей перманентному вращению (6).

Далее предполагается, что центр тяжести не лежит на главной оси Oz, но вращение с угловой скоростью ω по-прежнему сообщается вокруг этой оси, совпадающей в начальный момент с вертикалью $O\zeta$. Пусть x_c, y_c, z_c — координаты центра тяжести в системе осей $Oxyz$. Величины x_c и y_c будем считать малыми в сравнении с z_c, полагая тем самым модули отношений x_c/z_c и y_c/z_c малыми в сравнении с единицей. Собственное вращение тела будем полагать, как отмечалось выше, достаточно быстрым.

Учитывая сказанное, примем решение (6) в качестве порождающего, отнесенного к «опорному» движению, в котором ось Oz совпадает с вертикалью $O\zeta$ [9]. В опорном движении $\vartheta = 0$, вследствие чего вращение тела вырождается в его поворот на угол $\psi + \varphi$ относительно оси $O\zeta$. Обозначая поворот, соответствующий опорному движению через $\psi^0 + \varphi^0$, имеем [1—6]

$$\dot{\psi}^0 + \dot{\varphi}^0 = \omega = \mathrm{const}, \tag{7}$$

откуда, полагая $\psi^0 + \varphi^0 = 2\chi$, получаем

$$\chi = \chi(0) + \omega t/2, \tag{8}$$

где χ (0) — начальное значение угловой величины χ (далее полагаем $\chi(0) = 0$).

Значения параметров Родрига—Гамильтона для порождающего решения непосредственно находятся из выражений (4). Обозначая эти значения через λ_s^0, находим

$$\lambda_0^0 = \cos\chi, \quad \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0, \quad \lambda_3^0 = \sin\chi. \tag{9}$$

Далее потребуются лишь уравнения относительно параметров λ_1 и λ_2, получаемые из (1). Выпишем их в явном виде:

$$\begin{gathered} 2ABC\ddot{\lambda}_1 + BC(C - B)\,qr\lambda_0 - AC(A - C)\,rp\lambda_3 - AB(B - A)\,pq\lambda_2 + \\ + 2ABC(\dot{\lambda}_0^2 + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2)\,\lambda_1 + M_1 = 0, \\ 2ABC\ddot{\lambda}_2 + BC(C - B)\,qr\lambda_3 + AC(A - C)\,rp\lambda_0 - AB(B - A)\,pq\lambda_1 + \\ + 2ABC(\dot{\lambda}_0^2 + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2)\,\lambda_2 + M_2 = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= -BCM_x\lambda_0 + ACM_y\lambda_3 - ABM_z\lambda_2, \\ M_2 &= -BCM_x\lambda_3 - ACM_y\lambda_0 + ABM_z\lambda_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Проекции p, q, r выражаются через параметры λ_s посредством формул

$$\begin{aligned} p &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3), \\ q &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_0 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1), \\ r &= 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Соответственно проекции M_x, M_y и M_z определяются выражениями

$$\begin{aligned} M_x &= P\,[2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)\,z_c-(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)\,y_c],\\ M_y &= P\,[(\lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2)\,x_c-2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\,z_c],\\ M_z &= 2P\,[(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)\,y_c-(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)\,x_c], \end{aligned} \tag{13}$$

где P — вес тела.

3. Переходя к получению уравнений возмущенного движения, полагаем

$$\lambda_s=\lambda_s^0+\lambda_s', \tag{14}$$

где λ_s^0 — значения параметров Родрига—Гамильтона, отвечающие введенному выше порождающему решению, а λ_s' — некоторые функции, подлежащие дальнейшему определению. При этом в соответствии с (9) можно положить $\lambda_1'=\lambda_1$, $\lambda_2'=\lambda_2$. Получающиеся в результате подстановки (14) уравнения значительно упрощаются, если одновременно от переменных λ_1 и λ_2 перейти к переменным u_1 и u_2 с помощью подстановки с группой вращения, полагая [4, 5]

$$u_1=-(\lambda_1\cos\chi+\lambda_2\sin\chi),\quad u_2=\lambda_2\cos\chi-\lambda_1\sin\chi, \tag{15}$$

где χ определяются согласно (8). Обратные соотношения имеют вид

$$\lambda_1=-(u_1\cos\chi+u_2\sin\chi),\quad \lambda_2=u_2\cos\chi-u_1\sin\chi. \tag{16}$$

Переменные u_1 и u_2 имеют тот же порядок, что и переменные λ_1,λ_2. Обращаясь к выражениям (4) и учитывая (16), получаем

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=u_1^2+u_2^2=\sin^2\frac{\vartheta}{2}. \tag{17}$$

Полагая угол нутации ϑ достаточно малым, принимаем

$$\vartheta=2\sqrt{u_1^2+u_2^2}. \tag{18}$$

Условимся далее сохранять члены по второй порядок включительно относительно переменных u_1, u_2 и их производных. В работах [2—5] для учета таких членов привлекались в дополнение к (2.5) уравнения, отнесенные к возмущенным значениям λ_0 и λ_3, что, конечно, усложняло аналитическую сторону дела. Применительно к рассматриваемой задаче можно, однако, обойти это затруднение. Обращаясь к выражениям (4), учитывая предположенную малость угла ϑ, а также вырождение вращения при $\vartheta=0$ в поворот на угол 2χ, соответствующий опорному движению, полагаем [6]

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\chi\left(1-\frac{\vartheta^2}{8}\right)=\left[1-\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]\cos\chi,\\ \lambda_3 &= \sin\chi\left(1-\frac{\vartheta^2}{8}\right)=\left[1-\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]\sin\chi. \end{aligned} \tag{19}$$

Принятая здесь степень приближения обеспечивает соблюдение условия (5) с достаточно высокой степенью точности. Действительно, с учетом (16) и (19) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{3}\lambda_s^2 &\equiv \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\left[1-\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]^2\cos^2\chi+u_1^2+u_2^2+\\ &+\left[1-\frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]^2\sin^2\chi=1+\frac{1}{4}(u_1^2+u_2^2)^4=1+\frac{\vartheta^4}{16}. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, условие нормировки (5) соблюдается с точностью до неучитываемых далее пренебрежимо малых членов четвертого порядка относительно угла ϑ. Из формул (16) и (19) получаем выражения (13) в виде

$$\begin{aligned} M_x &= -P\{2u_1z_c + [1-2(u_1^2+u_2^2)]\,y_c\}, \\ M_y &= P\{2u_2z_c - [1-2(u_1^2+u_2^2)]\,x_c\}, \\ M_z &= 2P(u_1x_c - u_2y_c). \end{aligned} \tag{21}$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} M_1 &= BCP\left\{2u_1z_c + \left[1-\frac{5}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]y_c\right\}\cos\chi + ACP\left\{2u_2z_c + \right. \\ &\left.+\left[1-\frac{5}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]x_c\right\}\sin\chi - 2PAB(u_1x_c-u_2y_c)(u_2\cos\chi - u_1\sin\chi), \\ M_2 &= BCP\left\{2u_2z_c + \left[1-\frac{5}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]y_c\right\}\sin\chi - ACP\left\{2u_1z_c + \right. \\ &\left.+\left[1-\frac{5}{2}(u_1^2+u_2^2)\right]y_c\right\}\sin\chi - 2PAB(u_1x_c-u_2y_c)(u_2\sin\chi + u_1\cos\chi). \end{aligned} \tag{22}$$

Далее следует выразить величины $qr\lambda_0$, $qr\lambda_3$, $rp\lambda_3$, $rp\lambda_0$, $pq\lambda_2$ и $pq\lambda_1$, входящие в систему (10), через переменные u_1, u_2 и их производные. Имеем [4—6]

$$\begin{gathered} qr\lambda_0 = 2\omega(\dot{u}_2 - \omega u_1)\cos\chi, \quad qr\lambda_3 = 2\omega(\dot{u}_2 - \omega u_1)\sin\chi, \\ rp\lambda_3 = -2\omega(\dot{u}_1 + \omega u_2)\sin\chi, \quad rp\lambda_0 = -2\omega(\dot{u}_1 + \omega u_2)\cos\chi, \\ pq\lambda_2 = pq\lambda_1 = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Эти выражения справедливы с точностью до членов третьего и высшего порядков относительно величин u_1, u_2 и их производных. Окончательно получаем систему двух нелинейных уравнений вида [6]

$$\begin{aligned} &AC\ddot{u}_1 - C\omega(C-B-A)\dot{u}_2 + C[(C-B)\omega^2 - Pz_c]\,u_1 + \\ &\quad + AP(u_1x_c - u_2y_c)\,u_2 + \frac{5}{4}CPy_c(u_1^2+u_2^2) = \frac{1}{2}CPy_c, \\ &BC\ddot{u}_2 + C\omega(C-B-A)\dot{u}_1 + C[(C-A)\omega^2 - Pz_c]\,u_2 - \\ &\quad - BP(u_1x_c - u_2y_c)\,u_1 + \frac{5}{4}CPx_c(u_1^2+u_2^2) = \frac{1}{2}CPx_c, \end{aligned} \tag{24}$$

в которой учтены все члены, по второй порядок включительно, относительно переменных u_1, u_2 и их производных.

Переменные u_1 и u_2 допускают простую геометрическую интерпретацию. Действительно, направляющие косинусы γ_1 и γ_2 выражаются посредством параметров λ_s следующим образом [5]:

$$\gamma_1 \equiv \sin\varphi\sin\vartheta = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \gamma_2 \equiv \cos\varphi\sin\vartheta = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3). \tag{25}$$

С принятой степенью точности можно положить

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \vartheta\sin\varphi = 2(\lambda_1\lambda_3^0 - \lambda_2\lambda_0^0) = 2(\lambda_1\sin\chi - \lambda_2\cos\chi) = -2u_2, \\ \gamma_2 &= \vartheta\cos\varphi = 2(\lambda_1\lambda_0^0 + \lambda_2\lambda_3^0) = 2(\lambda_1\cos\chi + \lambda_2\sin\chi) = -2u_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, переменные u_1 и u_2 с точностью до знака равны половинным значениям направляющих косинусов γ_1 и γ_2, или, что то же, половинным значениям переменных $\vartheta\sin\varphi$ и $\vartheta\cos\varphi$, впервые введенных Н. Е. Жуковским для упрощения кинематических уравнений Эйлера применительно к малым значениям угла нутации ϑ. С помощью этих переменных в монографии [9] выписываются уравнения движения тяжелого твердого тела вблизи вертикали для случая $x_c = y_c = 0$, $z_c \neq 0$. Если перейти в уравнениях (24) к аргументу ωt и положить $x_c = y_c \equiv 0$, то указанные уравнения с точностью до обозначений переходят в уравнения (12.15.6) работы [9]. Заметим, что при $x_c = y_c = 0$ квадратичные относительно переменных u_1 и u_2 члены в уравнениях (24) вообще отсутствуют.

Правые части уравнений (24) представляют собой постоянно действующие возмущения, возникающие вследствие наличия отличных от нуля координат x_c и y_c центра тяжести. Соответственные частные решения определяются уравнениями, получающимися из (24), если положить в последних $u_1 = \dot{u}_2 = \ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 \equiv 0$. Обозначив через u_1^* и u_2^* эти частные решения, получим следующие уравнения для их нахождения:

$$C[(C-B)\omega^2 - Pz_c]u_1^* + AP(u_1^*x_c - u_2^*y_c)u_2^* + \frac{5}{4}CPy_c(u_1^{*2} + u_2^{*2}) + \frac{1}{2}CPy_c,$$

$$C[(C-B)\omega^2 - Pz_c]u_2^* - BP(u_1^*x_c - u_2^*y_c)u_1^* + \frac{5}{4}CPx_c(u_1^{*2} + u_2^{*2}) = \frac{1}{2}CPx_c. \tag{27}$$

Для получения уравнений возмущенного движения переходим в системе (24) к переменным ξ_1 и ξ_2, полагая

$$u_1 = u_1^* + \xi_1, \quad u_2 = u_2^* + \xi_2, \tag{28}$$

где значения u_1^* и u_2^* определяются системой (27). В результате приходим к системе двух дифференциальных уравнений, которую можно представить в виде

$$J\ddot{\xi} + H\dot{\xi} + (G_1 + G_2)\xi = \Xi, \tag{29}$$

где $\xi = \| \xi_1, \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$; J, H, G_1 и G_2 — заданные квадратные матрицы второго порядка с постоянными элементами; Ξ — матрица-столбец с квадратичными элементами относительно ξ_s и $\dot{\xi}_s$, $s = 1, 2$. Явные выражения матриц J, H, G_1 и G_2 имеют вид

$$J = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}; \qquad H = \begin{Vmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{Vmatrix}; \qquad G_1 = \begin{Vmatrix} c_1 & (p_1 + p_2)/2 \\ (p_1 + p_2)/2 & c_2 \end{Vmatrix};$$

$$G_2 = \begin{Vmatrix} 0 & (p_1 - p_2)/2 \\ -(p_1 - p_2/2 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} h &= (C - B - A)\omega, \\ c_1 &= (C-B)\omega^2 - Pz_c + \frac{AP}{C}u_2^*x_c + \frac{5}{2}Pu_1^*y_c, \\ c_2 &= (C-A)\omega^2 - Pz_c + \frac{BP}{C}u_1^*y_c + \frac{5}{2}Pu_2^*x_c, \\ p_1 &= \frac{P}{C}\left[\left(\frac{5}{2}C - 2A\right)u_2^*y_c + Au_1^*x_c\right], \\ p_2 &= \frac{P}{C}\left[\left(\frac{5}{2}C - 2B\right)u_1^*x_c + Bu_2^*y_c\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее линейной части системы (29) имеет вид [11]

$$ABD^4 + (h^2 + Ac_2 + Bc_1)D^2 + h(p_2 - p_1)D + c_1c_2 - p_1p_2 = 0. \tag{32}$$

Если коэффициент при линейном относительно D члене этого уравнения отличен от нуля, то оно будет иметь хотя бы один положительный корень или корень с положительной вещественной частью. А это соответствует неустойчивости тривиального решения $\xi = 0$ системы (29) независимо от членов выше первого порядка малости относительно величин ξ_s и $\dot{\xi}_s$, входящих в матрицу Ξ. Указанная неустойчивость не может быть подавлена увеличением собственного вращения тела. Что касается асимптотической устойчивости, то последняя может быть обеспечена только при условии добавления сил с полной диссипацией.

В предположении малости величин u_1^* и u_2^* их значения можно определить по вытекающим из (27) приближенным выражениям

$$u_1^* = \frac{1}{2} \frac{Py_c}{(C-B)\omega^2 - Pz_c}, \quad u_2^* = \frac{1}{2} \frac{Px_c}{(C-A)\omega^2 - Pz_c}, \tag{33}$$

которые с точностью до обозначений совпадают с соответственными выражениями, полученными Граммелем [7]. С учетом изложенного выше величины u_1^* и u_2^*, определяемые выражениями (33), всегда можно сделать достаточно малыми. При $A \neq B \neq C$ малость u_1^* и u_2^* может быть достигнута выбором достаточно большой величины угловой скорости ω. В случаях же вырождения, когда $B = C$ или $A = C$, малость u_1^* и u_2^* обеспечивается оговоренной выше малостью модулей отношений x_s / z_s и y_s / z_c. Уточненные значения величин u_1^* и u_2^* можно получить, если положить в (27)

$$u_1^* = \frac{1}{2} \frac{Py_c}{(C-B)\omega^2 - Pz_c} + \varepsilon_1, \quad u_2^* = \frac{1}{2} \frac{Px_c}{(C-A)\omega^2 - Pz_c} + \varepsilon_2 \tag{34}$$

и определить добавки ε_1 и ε_2 путем несложной итерации. В этом, однако, необходимости нет: расчет показывает, что добавки ε_1 и ε_2 при сделанных выше оговорках имеют порядок величин, отброшенных ранее при получении самой системы (29). Величинам u_1^* и u_2^* соответствует отклонение оси тела от вертикали на угол ϑ^*, определяемый формулой

$$\vartheta^* = \sqrt{u_1^{*2} + u_2^{*2}}. \tag{35}$$

Выясним теперь, при каких условиях обращается в нуль линейный относительно D член в характеристическом уравнении (32). С учетом выражений (31) и (33) имеем

$$h(p_2 - p_1) = \frac{P^2\omega}{2C}(C - B - A)(B - A)\mu, \tag{36}$$

где

$$\mu = \frac{\left[\left(\frac{3}{2}C - B - A\right)\omega^2 + Pz_c\right]x_c y_c}{[(C-A)\omega^2 - Pz_c][(C-B)\omega^2 - Pz_c]}. \tag{37}$$

Отсюда следует, что $h(p_2 - p_1)$ обращается в нуль при соблюдении одного из следующих трех условий:

$$1)\ C = A + B; \qquad 2)\ A = B; \qquad 3)\ \mu = 0. \tag{38}$$

При выполнении первого из этих условий обращаются в нули элементы матрицы H в уравнении (29), вследствие чего характеристическое уравнение (14) становится биквадратным. Второе из условий (38) соответствует симметричному телу, эллипсоид инерции которого для точки O является эллипсоидом вращения. Третье из условий (38) соблюдается при равенстве нулю хотя бы одной из координат x_c или y_c, что соответствует расположению центра тяжести в одной из главных плоскостей инерции Oyz или Oxz. Возможен и особенный случай, соответствующий тождественному обращению в нуль квадратной скобки в числителе выражения (37) и приводящий к условию

$$\left(\frac{3}{2}C - B - A\right)\omega^2 + Pz_c = 0, \tag{39}$$

при выполнении которого имеем также $\mu = 0$. Полагая, например, $z_c >$

> 0, убеждаемся, что условие (39) соблюдается, если величина ω удовлетворяет выражению

$$\omega = \sqrt{\frac{2Pz_c}{2(A+B) - 3C}}, \tag{40}$$

где следует считать $2(A + B) > 3C$. При $z_c < 0$, что соответствует расположению центра тяжести ниже точки O, в (40) следует считать $3C > 2(A + B)$. Во всех остальных случаях, помимо трех названных, независимо от того, выше или ниже точки опоры находится центр тяжести тела, наличие в уравнении (32) корня с положительной вещественной частью способствует возрастанию угла ϑ и, следовательно, развитию неустойчивости в движении оси волчка около вертикали.

4. Рассматривая далее случай расположения центра масс ниже точки опоры, проведем расчет корней характеристического уравнения (32), считая $C \neq B + A$ и полагая $z_c = -l$. Величину l будем считать конечной, а величины x_c и y_c боковых дебалансов малыми в сравнении с l. Угловую скорость ω, соответствующую опорному движению, по-прежнему будем считать большой. В этих предположениях, пренебрегая последними двумя слагаемыми в выражениях (31) для c_1 и c_2, полагаем

$$c_1 = (C - B)\omega^2 + Pl, \quad c_2 = (C - A)\omega^2 + Pl, \tag{41}$$

а также будем считать $c_1c_2 - p_1p_2 \approx c_1c_2$. Выражения (33) для рассматриваемого случая примут вид

$$u_1^* = \frac{1}{2}\frac{Py_c}{(C-B)\omega^2 + Pl}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}\frac{Px_c}{(C-A)\omega^2 + Pl}. \tag{42}$$

Характеристическое уравнение (32) представим в виде

$$D^4 + b_2D^2 + \varepsilon D + b_4 = 0, \tag{43}$$

где

$$b_2 = \frac{1}{AB}(h^2 + Ac_2 + Bc_1), \quad \varepsilon = \frac{h}{AB}(p_2 - p_1), \quad b_4 = \frac{c_1c_2}{AB}. \tag{44}$$

При $\varepsilon = 0$ из (43) получаем уравнение

$$D^4 + b_2D^2 + b_4 = 0, \tag{45}$$

по отношению к которому примем выполняющимися условия

$$b_2 > 0, \quad b_4 > 0, \quad \Delta \equiv b_2^2 - 4b_4 > 0. \tag{46}$$

Тогда уравнение (45) будет иметь чисто мнимые корни. Применительно к уравнению (43) зададимся следующим видом его корней:

$$D_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{47}$$

Нахождение величин α_k и β_k в предположении малости величины ε осуществляется далее путем подстановки выражения (47) в уравнение (45) для отделения вещественных и мнимых частей. В рамках принятой точности для определения величин α и β (индексы опускаем), получаем уравнения

$$\beta^4 - b_2\beta^2 + b_4 = 0, \quad 2\alpha(b_2 - 2\beta^2) + \varepsilon = 0, \tag{48}$$

из которых находятся четыре значения β и два значения α. Имеем

$$\beta_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{x}, \quad x_{1,2} = b_2/2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}, \tag{49}$$

а также

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \alpha_2 = -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\Delta}}, \tag{50}$$

где Δ определяется из (46). В случае, когда $\varepsilon > 0$, имеем $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 < 0$; если же $\varepsilon < 0$, то будет $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$.

Таким образом, в нашем случае уравнение (32) имеет два корня с положительной вещественной частью и два корня с отрицательной. Модуль вещественной части для всех корней одинаков, а именно

$$|\alpha| = \frac{|\varepsilon|}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{|h|}{2AB}\frac{|p_2 - p_1|}{|\sqrt{b_2^2 - 4b_4}|}. \tag{51}$$

Обращаясь к выражениям (48) и учитывая (44) и (31), будем иметь [5]

$$\begin{gathered} b_2 = \frac{1}{AB}\{\omega^2[C^2 - C(A+B) + 2AB] + Pl(A+B)\}, \\ \sqrt{\Delta} = \frac{1}{AB}C(C-B-A)\sqrt{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)}, \end{gathered} \tag{52}$$

где

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{Pl[4AB - C(A+B)] \pm 2Pl\sqrt{AB(C-2A)(C-2B)}}{C^2(C-B-A)}. \tag{53}$$

В целях дальнейшего упрощения положим

$$\begin{aligned} \sqrt{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)} &= \omega^2\left(1 - \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\omega^2} + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\omega^4}\right)^{1/2} = \\ &= \omega^2 - \frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2) - \frac{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}{8\omega^2} + \dots, \end{aligned} \tag{54}$$

где в силу предположенной большой величины ω ограничиваемся выписанными членами. Далее, учитывая выражения (53), находим по (49) два значения x_1 и x_2. Окончательно имеем $\beta_{1,2} = \pm\sqrt{x_1} = \pm\nu$, $\beta_{3,4} = \pm\sqrt{x_2} = \pm k$, где

$$\begin{gathered} \nu = \sqrt{\frac{1}{AB}\left\{\omega^2(C-A)(C-B) + \frac{Pl}{C}[(A+B)C - 2AB]\right\} - \varkappa}, \\ k = \sqrt{\omega^2 + 2\frac{Pl}{C} + \varkappa}, \\ \varkappa = \frac{-(Pl)^2(C-2A)(C-2B)}{(C-B-A)C^3\omega^2}. \end{gathered} \tag{55}$$

Полученные формулы определяют частоты нутационных колебаний оси тела вблизи вертикали. Их можно рассматривать как обобщение соответственных формул, полученных Граммелем [7]. Последние получаем из (55) при условии сохранения в подкоренных выражениях лишь первых членов.

Выражение (51) можно также упростить. Пользуясь формулами (35), (44) и (52), имеем

$$|\alpha| = |\mu|\frac{\omega^2 P|B-A|}{4C^2\sqrt{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)}}, \tag{56}$$

где в рассматриваемом случае следует считать

$$\mu = \frac{\left[\left(\frac{3}{2}C - B - A\right)\omega^2 - Pl\right]x_c y_c}{[(C-A)\omega^2 + Pl][(C-B)\omega^2 + Pl]}. \tag{57}$$

Далее, учитывая разложение (54), имеем

$$[(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)]^{-1/2} = \frac{1}{\omega^2}\left(1 + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega^2} + \dots\right). \tag{58}$$

Ограничиваясь выписанными членами, получаем

$$|\alpha| = |\mu| \frac{P^2|B-A|}{4C^2\omega} \left\{1 + \frac{Pl\,[4AB - C(A+B)]}{C^2(C-B-A)\,\omega^2}\right\}. \tag{59}$$

При весьма больших значениях ω в (59) можно пренебречь вторым слагаемым и принять

$$|\alpha| = \frac{P^2|B-A|}{4C^2\omega}|\mu|. \tag{60}$$

В качестве примера рассмотрим вращающееся около вертикали тело с распределением масс, соответствующим случаю Горячева — Чаплыгина, полагая $A = C = 4B$. Имеем

$$|\alpha| = \frac{3P|x_c||y_c||B\omega^2 - Pl|}{64Bl(3B\omega^2 + Pl)\omega}. \tag{61}$$

Если вращение тела оказывается столь быстрым, что можно принять $B\omega^2 - Pl \approx B\omega^2$, $3B\omega^2 + Pl \approx 3B\omega^2$, то

$$|\alpha| = \frac{P|x_c||y_c|}{64B\omega l} = \frac{P|x_c||y_c|}{16C\omega l}. \tag{62}$$

Эта величина может оказаться существенной даже при быстром вращении тела.

Полагая разности $C - A$, $C - B$, $\frac{3}{2}C - B - A$ отличными от нуля, из (60) в предположении достаточно быстрого вращения тела получаем

$$|\alpha| = \frac{P^2|B-A|\left|\frac{3}{2}C - B - A\right||x_c||y_c|}{4C^2\omega^2|C-A||C-B|}. \tag{63}$$

Эта величина оказывается менее весомой в сравнении с (62) и свидетельствует о том, что в общем случае рассматриваемая неустойчивость развивается весьма медленно и в реальных условиях в значительной степени нейтрализуется естественной диссипацией энергии тела.

5. Эффект рассматриваемой неустойчивости обусловлен в общем случае расположения центра тяжести, когда x_c и y_c отличны от нуля, дестабилизирующим влиянием момента M_z силы веса тела относительно оси Oz.

В случае Лагранжа, когда $A = B$, $x_c = y_c \equiv 0$, имеет место интеграл

$$r = \text{const}, \tag{64}$$

соответствующий стационарности вращения тела вокруг оси Oz. В этом случае из (31) имеем $p_1 = p_2 \equiv 0$.

При отличных от нуля значениях x_c и y_c интеграл (64) не имеет места, как и частное решение (6). Поэтому в общем случае проекция r будет переменной во времени величиной, хотя при сообщении телу быстрого вращения вокруг собственной оси будет иметь значительную постоянную составляющую ω, соответствующую опорному движению.

Обращаясь к матрице (2) исходных уравнений задачи отметим, в дополнение к изложенному, что элемент a_4 указанной матрицы входит по ее побочной диагонали и притом способом, характерным для неконсервативных структур в уравнениях возмущенного движения гироскопических систем. Как известно, наличие таких структур может при определенных условиях способствовать разрушению устойчивости [10]. Из (3) имеем

$$a_4 \equiv AB[M_z - (B - A)pq] \equiv ABC\dot{r}. \tag{65}$$

При $r = \text{const}$ элемент a_4 тождественно обращается в нуль.

В заключение рассмотрим соответствие тривиального решения $\xi = 0$ системы (29) исходным точным уравнениям движения тела. Этому решению отвечают значения u_s^* переменных u_s, удовлетворяющие уравнениям (27).

Обозначая через λ_s^* соответствующие значения параметров Родрига—Гамильтона, в силу (16) и (19) будем иметь

$$\lambda_0^* = \left[1 - \frac{1}{2}(u_1^{*2} + u_2^{*2})\right]\cos\chi, \quad \lambda_1^* = -u_1^*\cos\chi - u_2^*\sin\chi,$$
$$\lambda_2^* = -u_1^*\sin\chi + u_2^*\cos\chi, \quad \lambda_3^* = \left[1 - \frac{1}{2}(u_1^{*2} + u_2^{*2})\right]\sin\chi. \tag{66}$$

Располагая этими выражениями, нетрудно найти значения p^*, q^*, r^* угловой скорости тела, отвечающие решению $\xi = 0$. Пользуясь формулами (12), с принятой степенью точности находим

$$p^* = -2\omega u_2^*, \quad q = -2\omega u_1^*, \quad r^* = \omega(1 - (u_1^{*2} + u_2^{*2})/2), \tag{67}$$

где u_1^* и u_2^* можно считать определяющимися согласно формулам (33).

При проверке соответствия точным уравнениям движения тела удобно воспользоваться непосредственно динамическими уравнениями Эйлера. Поскольку проекции p^*, q^* и r^* получились согласно (67) постоянными, то вопрос сводится к оценке величин

$$(C - B)qr - M_x, \quad (A - C)rp - M_y, \quad (B - A)pq - M_z, \tag{68}$$

относящихся к решению $\xi = 0$. Эти величины, естественно, должны быть достаточно малы. Имеем

$$(C - B)q^*r^* = -2\omega^2(C - B)[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]u_1^*. \tag{69}$$

Далее

$$\lambda_0^*\lambda_1^* + \lambda_2^*\lambda_3^* = -\left[1 - \frac{1}{2}(u_1^{*2} + u_2^{*2})\right]u_1^*,$$
$$\lambda_0^{*2} + \lambda_3^{*2} - \lambda_1^{*2} - \lambda_2^{*2} = 1 - 2(\lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2}) = 1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2}). \tag{70}$$

Учитывая эти выражения, имеем

$$M_x^* \equiv P[2(\lambda_0^*\lambda_1^* + \lambda_2^*\lambda_3^*)z_c - (\lambda_0^{*2} + \lambda_3^{*2} - \lambda_1^{*2} - \lambda_2^{*2})y_c] = -2P[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]u_1^*z_c - 3P(u_1^{*2} + u_2^{*2})u_1^*z_c - P[1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]u_1^*z_c. \tag{71}$$

Таким образом,

$$(C - B)q^*r^* - M_x^* = [1 - 2(u_1^{*2} + u_2^{*2})]\{-2\omega^2(C - B)u_1^* + 2Pu_1^*z_c + Py_c\} + 3P(u_1^{*2} + u_2^{*2})u_1^*z_c. \tag{72}$$

Но в силу первого из выражений (33) величина, заключающаяся в фигурных скобках последнего выражения, обращается в нуль, вследствие чего будем иметь

$$(C - B)q^*r^* - M_x^* = 3P(u_1^{*2} + u_2^{*2})u_1^*z_c. \tag{73}$$

Аналогично получаем

$$(A - C)r^*p^* - M_y^* = -3P(u_1^{*2} + u_2^{*2})u_2^*z_c, \tag{74}$$
$$(B - A)p^*q^* - M_z^* = P(u_1^{*2} + u_2^{*2})(u_1^*x_c - u_2^*y_c),$$

где u_1^* и u_2^* следует считать определяющимися согласно (33).

В случаях, когда $A \neq B \neq C$, правые части выражений (74) в силу (33) оказываются величинами порядка ω^{-6} и, следовательно, могут считаться пренебрежимо малыми при достаточно больших значениях ω. В случаях вырождения, когда $B = C$ или $A = C$, правые части пропорциональны кубам отношений x_c/z_c и y_c/z_c, которые согласно постановке задачи также приняты малыми величинами в сравнении с единицей.

Таким образом, при сделанных выше оговорках относительно большой величины начальной угловой скорости вращения тела и малости боковых смещений центра тяжести решение $\xi = 0$ удовлетворяет исходным уравнениям с высокой степенью точности. Поэтому соответствующее этому решению движение можно отнести к невозмущенному, обстоятельства неустойчивости которого и рассматривались выше.

В невозмущенном движении ось Oz тела вращается вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью ω, описывая при этом прямой круговой конус с вершиной в точке O, образующая которого составляет угол ϑ^* с вертикалью $O\zeta$. Этот угол может быть определен по формуле

$$\vartheta^* = P \sqrt{\left[\frac{x_c}{(C-A)\,\omega^2 - P\bar{z}_c}\right]^2 + \left[\frac{y_c}{(C-B)\,\omega^2 - P\bar{z}_c}\right]^2}. \tag{75}$$

Неподвижный аксоид вырождается в ось $O\zeta$; подвижным аксоидом служит прямой круговой конус с осью Oz.

Исследование возмущенного движения тела в принятой здесь постановке, требующее построения интеграла Коши для системы (29), требует специального рассмотрения.

1. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Укр. мат. журн.— 1973.— **25**, № 5.— С. 677—681.
2. *Кошляков В. Н.* О применении параметров Родрига—Гамильтона и Кэйли — Клейна к задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Там же.— 1974.— **26**, № 2.— С 179—187
3. *Кошляков В. Н.* Уравнения тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в унитарных и эрмитовых матрицах // Там же.— 1981.— **33**, № 1.— С. 9—16.
4. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига — Гамильтона // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1983.— № 4.— С. 16—25.
5. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов.— М.: Наука, 1985.— 286 с.
6. *Кошляков В. Н.*, *Богуславская Е. С.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела в параметрах Родрига — Гамильтона // Системы курсоуказания и инерциальной навигации.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 3—9.
7. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применение: В 2-х т.— М.: Изд-во иностр. лит., 1952. — Т. 1.— 351 с.
8. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикл. математика и механика.— 1956.— **29**, вып. 1.— С. 51—66.
9. *Лурье А. И.* Аналитическая механика.— М. : Физматгиз, 1961.— 819 с.
10. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения.— М. : Наука, 1971.— 312 с.
11. *Онищенко С. М.*, *Полищук А. Н.* О поведении гирогоризонткомпаса при экваториальном дебалансе чувствительного элемента // Навигационные гироскопические системы.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 186—220.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 16.02.87