УДК 517.5

П. М. Тамразов

Усиленные контурно-телесные теоремы для субгармонических функций

В работе дается усиление результатов из [1, 2] и обобщение результатов препринта [3].

Пусть L — класс всех функций $\lambda:(0,+\infty)\to[-\infty,+\infty)$, для каждой из которых множество $I_\lambda=\{x:\lambda(x)>-\infty\}$ связно и сужение функции $\lambda(x)$ на I_λ вогнуто относительно $\log x$. Пусть L^* — класс всех $\lambda\in L$, для которых I_λ не пусто. Для $\lambda\in L^*$ через x_λ^- и x_λ^+ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка, коим является множество I_λ (в частности, оно может выродиться в точку). Очевидно, $0\leqslant x_\lambda^-\leqslant x_\lambda^+\leqslant\leqslant+\infty$. Когда $\lambda(\cdot)$ пробегает класс L или L^*, функция $\exp\lambda(\cdot)$ пробегает соответственно класс $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{M}^*$ из работы [4]. Нетрудно убедиться, что при $x_\lambda^-<x_\lambda^+$ фигурирующее в определении L условие вогнутости равносильно тому, что функция $\lambda(\cdot)$ на интервале $(x_\lambda^-,x_\lambda^+)$ вогнута относительно $\log x$ (а потому непрерывна) и в каждом конце I_λ, отличном от 0 и $+\infty$, полунепрерывна снизу со стороны интервала $(x_\lambda^-,x_\lambda^+)$. Через $\tilde\lambda$ условимся обозначать верхнюю регуляризацию функции λ. Очевидно, она совпадает с λ для всех $x\notin\partial I_\lambda$ и непрерывна на замыкании I_λ в $(0,+\infty)$. Можно показать, что существуют пределы $\lambda^0=\lim\limits_{x\to0}\lambda(x)/\log x$, $\lambda^\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda(x)/\log x$ и выполнены соотношения $\lambda^0\geqslant\lambda^\infty$, $\lambda^0>-\infty$, $\lambda^\infty<+\infty$.

Ниже термин «субгармоническая функция» будем понимать в широком смысле, допуская, что такая функция может тождественно обращаться в $-\infty$ на связных компонентах открытого множества, где она задана. Аналогичным образом будем понимать термин «наименьшая гармоническая мажоранта» субгармонической функции.

Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $G\subset\mathbb{C}$ — открытое множество, $\overline{\partial G}$ — его граница в $\overline{\mathbb{C}}$, $\partial G=\mathbb{C}\cap\overline{\partial G}$, $\overline{G}==G\cup\partial G$.

Пусть в G задана субгармоническая функция u. Через $\gamma_G(u,\zeta)$ будем обозначать ее наименьшую гармоническую мажоранту (если последняя существует). Для $a\in\mathbb{C}\setminus G$ и $r>0$ введем также величины

$$u_G^a=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{\zeta\to a,\ \zeta\in G}}\,u(\zeta)/|\log|\zeta-a|| & \text{при } a\in\partial G,\\ 0 & \text{при } a\notin\partial G,\end{cases}$$

$$u_G^\infty=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{\zeta\to\infty,\ \zeta\in G}}\,u(\zeta)/\log|\zeta| & \text{при } \infty\in\overline{\partial G},\\ 0 & \text{при } \infty\notin\overline{\partial G},\end{cases}$$

$$M_{G,a}(u,r)=\inf\{v\log r+\delta: v\in(-\infty,+\infty),\quad \delta\in(-\infty,+\infty],$$

$$u(w)\leqslant v\log|w-a|+\delta\quad\forall w\in G\}.$$

Очевидно, либо $M_{G,a}(u,r)=+\infty$ $\forall r>0$, либо $M_{G,a}(u,r)<+\infty$ $\forall r>0$.

Предположим, что верно последнее неравенство. Тогда при фиксированном a, рассматривая $M_{G,a}(u,r)$ как функцию от r, имеем $M_{G,a}(u,\cdot)\in L$. Пусть r^-,r^+ — концы промежутка, где эта функция не обращается в $-\infty$. На замыкании названного промежутка в $(0,+\infty)$ рассматриваемая функция обобщенно непрерывна. Функция $M_{G,a}(u,|\zeta-a|)$ супергармонична по ζ при $r^-<|\zeta-a|<r^+$ и $M_{G,a}(u,|\zeta-a|)=-\infty$ при $|\zeta-a|<r^-$ и при $|\zeta-a|>r^+$. Кроме того, в этом случае существует наименьшая гармоническая мажоранта $\gamma_G(u,\zeta)$ функции u и верны соотношения $u(\zeta)\leqslant\gamma_G(u,\zeta)\leqslant \leqslant M_{G,a}(u,|\zeta-a|)\ \forall\zeta\in G$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ класс всех множеств $E\subset\overline{\mathbb{C}}$ нулевой логарифмической емкости (имеется в виду, что всякая ограниченная в $\mathbb{C}$ порция E имеет нулевую логарифмическую емкость).

Теорема 1. *Пусть $a\in\mathbb{C}$ — фиксированная точка; $G\subset\mathbb{C}\setminus\{a\}$ — открытое множество; $\lambda\in L$; u — субгармоническая в G функция, ограниченная сверху на всякой ограниченной части G, отделимой от точки a. Пусть*

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\ \zeta\in G} u(\zeta)\leqslant\lambda(|z-a|)\quad\forall z\in(\partial G)\setminus\{a\}. \tag{1}$$

Предположим, что $z_1=a$, $z_2=\infty$ и при $s=1,2$ (независимо друг от друга) либо z_s является внешней точкой для каждой связной компоненты G, либо существует окрестность V_s точки z_s такая, что выполнено одно из следующих условий:

1) *z_s есть регулярная граничная точка для G и*

$$\sup_{\zeta\in G\cap V_s} u(\zeta)/|\log|\zeta-a||<+\infty; \tag{2}$$

2) *z_s есть предельная точка для ∂G, выполнены соотношения (2) и $V_s\setminus G\in\mathfrak{N}$, а функция u гармонична в $G\cap V_s$ и ограничена на всякой части этого множества, отделимой от z_s;*

3) *при некоторой постоянной $b<+\infty$ верно $u(\zeta)\leqslant\lambda(|\zeta-a|)+ +b\,\forall\zeta\in G\cap V_s$.*

Тогда u имеет наименьшую гармоническую мажоранту $\gamma_G(u,\zeta)$ и выполняется одна и только одна из следующих двух возможностей: либо $u_G^a\leqslant-\lambda^0$, $u_G^\infty\leqslant\lambda^\infty$ и

$$u(\zeta)\leqslant\gamma_G(u,\zeta)\leqslant\lambda(|\zeta-a|)\quad\forall\zeta\in G, \tag{3}$$

$$M_{G,a}(u,|\zeta-a|)\leqslant\tilde\lambda(|\zeta-a|)\quad\forall\zeta\in G, \tag{4}$$

либо имеет место следующий исключительный случай: $G=\mathbb{C}\setminus\{a\}$, $\lambda(x)= =\log(\beta x^\alpha)\ \forall x>0$, $u(\zeta)=\gamma_G(u,\zeta)=M_{G,a}(u,|\zeta-a|)=\log(c|\zeta-a|^\alpha)\ \forall\zeta\in G$,

$c>\beta\geqslant 0$, α,β,c — постоянные.

Для рассматриваемых G,a,u,λ при $s=1,2$ введем величины $\sigma^s= =\sigma^s(G,a,u,\lambda)$, определяемые следующими условиями. Если $\lambda\in L^*$, то положим

$$\sigma^1=\begin{cases}(u(\cdot)-\lambda(|\cdot-a|))_G^a & \text{при } x_\lambda^-=0,\\ 0 \text{ при } x_\lambda^->0,\end{cases}$$

$$\sigma^2=\begin{cases}(u(\cdot)-\lambda(|\cdot-a|))_G^\infty & \text{при } x_\lambda^+=+\infty,\\ 0 \text{ при } x_\lambda^+<+\infty.\end{cases}$$

Если $\lambda\equiv-\infty$, то полагаем $\sigma^1=\sigma^2=0$.

Для $\lambda\in L^*$ очевидны следующие соотношения: если $\lambda^0\neq+\infty$, то $\sigma^1= =u_G^a+\lambda^0$, а если $\lambda^\infty\neq-\infty$, то $\sigma^2=u_G^\infty-\lambda^\infty$.

Пусть G — открытое множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\partial G\notin\mathfrak{N}$. Для точек w,ζ, принадлежащих одной и той же связной компоненте G_j множества G, через $g_G(w,\zeta)$ обозначим обобщенную функцию Грина $g_{G_j}(w,\zeta)$ области G_j. Для точек w, ζ, принадлежащих разным связным компонентам множества G, положим $g_G(w,\zeta)=0$. Обобщенной функцией Грина открытого множества G (с переменной $\zeta\in G$ и полюсом $w\in\overline{\mathbb{C}}$), согласно [5, с. 121], назовем функцию.

$$\bar g_G(w,\zeta)=\begin{cases}g_G(w,\zeta)\quad\forall w\in G,\\ 0\,\forall w\in\overline{\mathbb{C}}\setminus(G\cup\overline{\partial G}),\\ \varlimsup\limits_{z\to w,z\in G} g_G(z,\zeta)\quad\forall w\in\overline{\partial G}.\end{cases}$$

Как установил Брело [5, с. 121], при каждом $\zeta \in G$ функция $\bar{g}_G(w, \zeta)$ субгармонична по w в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta\}$ и является единственным субгармоническим продолжением в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta\}$ функции $g_G(w, \zeta)$ от w.

Пусть j пробегает конечное или счетное множество значений, соответствующих всем связным компонентам G_j множества G. Возможным неопределенным выражениям условимся приписывать следующие значения: $(\pm\infty) \cdot 0 = 0$, $-\infty + \infty = -\infty$.

Обозначим через $\mathfrak{N}_*$ класс всех множеств $E \subset \bar{\mathbb{C}}$ нулевой внутренней логарифмической емкости.

Теорема 1 содержится в следующем более сильном утверждении.

Теорема 2. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка; $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ — открытое множество; $Q \subset \bar{\mathbb{C}} \setminus G$ — множество, содержащее точки a и ∞; $Q \in \mathfrak{N}_*$, $\lambda \in L$, u — субгармоническая в G функция, ограниченная сверху на всякой ограниченной части G, отделимой от точки a. Пусть*

$$\overline{\lim_{\zeta \to z,\ \zeta \in G}} u(\zeta) \leqslant \lambda(|z - a|) \quad \forall z \in \Big(\bigcup_j \partial G_j\Big) \setminus Q. \tag{1'}$$

Предположим, что $z_1 = a$, $z_2 = \infty$ и при $s = 1, 2$ (независимо друг от друга) либо z_s является внешней точкой для каждой связной компоненты множества G, либо существует окрестность V_s точки z_s такая, что выполнено одно из условий 1, 3 теоремы 1 или условие:

2′) z_s есть предельная точка для $(\partial G) \setminus Q$, выполнены соотношения (2) и $V_s \setminus G \in \mathfrak{N}_*$, а функция u гармонична в $G \cap V_s$ и ограничена на всякой части этого множества, отделимой от z_s.

Тогда функция u имеет наименьшую гармоническую мажоранту $\gamma_G(u, \zeta)$ и в обозначениях $\sigma^s = \sigma^s(G, a, u, \lambda)$, $s = 1, 2$, выполняется одна и только одна из следующих двух возможностей: либо $u_G^a \leqslant -\lambda^0$, $u_G^\infty \leqslant \lambda^\infty$, $-\infty \leqslant \sigma^1 \leqslant 0$, $-\infty \leqslant \sigma^2 \leqslant 0$ и верны соотношения (3), (4), либо имеет место следующий исключительный случай: $G = \mathbb{C} \setminus Q$, $\lambda(x) = \log(\beta x^\alpha)$ $\forall x > 0$, $u(\zeta) = \gamma_G(u, \zeta) = M_{G,a}(u, |\zeta - a|) = \log(c|\zeta - a|^\alpha)$ $\forall \zeta \in G$, $c > \beta \geqslant 0$, α, β, c — постоянные.

Если $\partial G \notin \mathfrak{N}$, то верно также

$$\gamma_G(u, \zeta) \leqslant \lambda(|\zeta - a|) + \sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta) + \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) \quad \forall \zeta \in G, \tag{3'}$$

$$M_{G,a}(u(\cdot) - \sigma^1 \bar{g}_G(a, \cdot) - \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \cdot),\ |\zeta - a|) \leqslant \tilde{\lambda}(|\zeta - a|) \quad \forall \zeta \in G. \tag{4'}$$

Учет членов $\sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta)$ и $\sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta)$ аналогичен усилению для аналитических функций, рассмотренному в [6].

Опираясь на теорему 3 работы [7], можно показать, что в условии 1 теорем 1, 2 предположение о регулярности точки z_s нельзя опустить.

Условие (1′) является очевидным обобщением условия (1).

Доказательство теоремы 2 опирается на результат, установленный в [8] и формулируемый ниже в виде леммы.

Пусть открытое множество $B \subset \mathbb{C}$ ограничено, $\varepsilon \in (0, 1)$, w, $z \in \mathbb{C}$. Введем функцию $l_\varepsilon(w, \zeta) = \log \max\{\varepsilon, |w - z|\}$ и через $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)$ обозначим решение обобщенной задачи Дирихле в B для функции $l_\varepsilon(w, \cdot)$ от $z \in \partial B$.

Лемма. *Для любых $\zeta \in B$ и $w \in \mathbb{C}$ существует предел*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) \overset{\mathrm{def}}{=} h_B(w, \zeta), \tag{5}$$

который субгармоничен по $w \in \mathbb{C}$ и удовлетворяет соотношению

$$h_B(w, \zeta) - \log|w - \zeta| = \bar{g}_B(w, \zeta) \quad \forall \zeta \in B,\ \forall w \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Доказательство. Если B_j — связная компонента множества B и $\zeta \in B_j$, то для всякого множества $E \subset \partial B$, для которого определена гармоническая мера множества $E \cap \partial B_j$ в точке ζ относительно области B_j, будем обозначать эту меру через $\omega(\zeta, B, E)$ (если $E \cap \partial B_j$ пусто, то $\omega(\zeta, B, E) = 0$).

Для $\varepsilon \in (0, 1)$ и $w, z \in \mathbb{C}$ введенная выше функция $l_\varepsilon(w, z)$ субгармонична по каждой из переменных w и z.

Справедлива формула [9, с. 299; 10, с. 265]

$$H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) = \int\limits_{\partial B} l_\varepsilon(w, x)\, \omega(\zeta, B, dx). \tag{7}$$

Функция $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)$ гармонична и ограничена по ζ в B.

При каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$ функция $l_\varepsilon(w, z)$ равномерно непрерывна по $w \in \mathbb{C}$ равностепенно относительно $z \in \mathbb{C}$, ибо $|l_\varepsilon(w_1, z) - l_\varepsilon(w_2, z)| \leqslant \log\left(1 + \frac{|w_1 - w_2|}{\varepsilon}\right) \forall z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Поэтому на основании (7) функция $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)$ непрерывна по $w \in \mathbb{C}$.

Для $r > 0$ определим оператор $P_{r,w}$, переводящий функции f от $w \in \mathbb{C}$ в функции от $t \in \mathbb{C}$ по формуле

$$(P_{r,w} f(w))(t) = f(t) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Очевидно, при любых $r > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ для $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $(P_{r,w} l_\varepsilon(w, z))(t) \leqslant 0 \ \forall t \in \mathbb{C}$, а для $\zeta \in B$ верно равенство

$$(P_{r,w} H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta))(t) = \int\limits_{\partial B} (P_{r,w} l_\varepsilon(w, x))(t)\, \omega(\zeta, B, dx) \ \forall t \in \mathbb{C}.$$

Поэтому $P_{r,w} H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta))(t) \leqslant 0 \ \forall t \in \mathbb{C}$.

Из изложенного следует, что функция $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)$ субгармонична по w в $\mathbb{C}$ (при каждых фиксированных $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\zeta \in B$).

Функция $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) - l_\varepsilon(w, \zeta)$ ограничена и супергармонична по ζ в B (при каждом фиксированном $w \in \mathbb{C}$) и потому $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) \geqslant l_\varepsilon(w, \zeta)$ $\forall \zeta \in B$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Функции $l_\varepsilon(w, \zeta)$, а вместе с нею и функция $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)$ не возрастают при $\varepsilon \searrow 0$. Поэтому существует предельная функция (5) и

$$h_B(w, \zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} l_\varepsilon(w, \zeta) \geqslant \log|w - \zeta| \ \forall w \in \mathbb{C}, \ \forall \zeta \in B.$$

Кроме того, если $w \notin \partial B$, то для $\zeta \in B$ имеем

$$h_B(w, \zeta) - \log|w - \zeta| = \begin{cases} g_B(w, \zeta) \ \forall w \in B, \\ 0 \ \forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}. \end{cases} \tag{8}$$

Семейство $\{H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ функций $H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta)$ от w при $\varepsilon \searrow 0$ фильтруется влево, и потому на основании известных результатов [5, с. 24; 9, с. 77] функция $h_B(w, \zeta)$ субгармонична по w в $\mathbb{C}$. Следовательно, функция $h_B(w, \zeta) - \log|w - \zeta|$ субгармонична по w в $\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ и, удовлетворяя соотношению (8), является субгармоническим по $w \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$ продолжением обобщенной функции Грина $g_B(\cdot, \zeta)$ равным нулю вне $\overline{B}$. В силу упомянутой выше теоремы единственности Брело верно соотношение

$$h_B(w, \zeta) - \log|w - \zeta| = \overline{g}_B(w, \zeta) \quad \forall w \in \partial B, \ \forall \zeta \in B. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует (6). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $G \cap \{\zeta : |\zeta - a| < 1\} = D_a$, $G \cap \{\zeta : |\zeta - a| > 1\} = D^a$. Зафиксируем произвольные σ, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что

$$\lambda(x) \leqslant \alpha \log x + \sigma \quad \forall x > 0 \tag{10}$$

(это возможно в силу условия $\lambda \in L$). Пусть $q > \sigma$ таково, что

$$u(\zeta) < q \quad \forall \zeta \in G \cap \{\zeta : |\zeta - a| = 1\}. \tag{11}$$

Предположим, что соотношение

$$u(\zeta)\leqslant\alpha\log|\zeta-a|+q\quad\forall\zeta\in D_a \tag{12}$$

не выполнено. Пусть D — произвольная связная компонента множества D_a, в какой-нибудь точке ζ' которой $u(\xi')>\alpha\log|\zeta'-a|+q$. Пусть D_* — множество всех $\zeta\in D$, в которых

$$u(\zeta)\geqslant\alpha\log|\zeta-a|+q,\quad\zeta\in D_*. \tag{13}$$

Тогда $D\setminus D_*$ — непустое открытое множество, а D_* — непустое замкнутое в D множество. Так как в каждой точке $z\in(\partial D)\setminus Q$

$$\varlimsup_{w\to z,\ w\in D} u(w)<\alpha\log|z-a|+q,$$

(что следует из условия (1′)), то должно быть $\partial D_*\subset D\cup Q$. Значит, $(\partial G)\setminus Q$ не пересекается с ∂D_*, и так как $Q\cap\mathbb{C}\subset\partial G$, то $Q\cap\partial D_*=(\partial D)\cap\partial D_*$. Следовательно, множество $Q\cap\partial D_*$ замкнуто в $\mathbb{C}$ и потому имеет логарифмическую емкость нуль. На непустом множестве $(\partial D)\setminus(Q\cap\partial D_*)=(\partial D)\setminus\partial D_*$ верно неравенство

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\ \zeta\in D} u(\zeta)<\alpha\log|z-a|+q\quad\forall z\in(\partial D)\setminus(Q\cap\partial D_*) \tag{14}$$

Если a является внешней точкой для каждой связной компоненты множества G, то из (14), соотношения $Q\cap\partial D_*\in\mathfrak{N}$ и принципа максимума для ограниченных сверху субгармонических функций следует противоречие с (13). Значит, в данном случае верно (12).

Пусть теперь a есть граничная точка одной из связных компонент множества G.

Если для $z_1=a$ верно условие 3 теоремы 1, то из (10) видно, что функция

$$u(\zeta)-\alpha\log|\zeta-a| \tag{15}$$

ограничена сверху в D_a и D, и потому из (14) и включения $Q\cap\partial D_*\in\mathfrak{N}$ на основании принципа максимума снова следует противоречие с (13). Таким образом, и в этом случае верно (12).

Теперь предположим, что для $z_1=a$ имеет место условие 2′ теоремы 2. Можно считать, что множества V_1 и $W=V_1\setminus\{a\}$ открыты. Тогда функция u продолжается до функции, гармонической в W, так как множество $W\setminus G$, принадлежащее классу $\mathfrak{N}_*$, принадлежит также классу $\mathfrak{N}$. На основании (2) справедлива формула

$$u(\zeta)=\alpha_0\log|\zeta-a|+\gamma(\zeta\quad\forall\zeta\in W \tag{16}$$

с некоторой действительной постоянной α_0 и гармонической в W функцией γ. Но a есть предельная точка для $(\partial G)\setminus Q$ и имеют место (4), (10), (16). Отсюда следует, что $\alpha_0\geqslant\alpha$, и потому функция (15) ограничена сверху в $G\cap W$. Поэтому из (14) снова вытекает противоречие с (13). Итак, и при выполнении условия 2′ теоремы 2 верно (12).

Пусть теперь выполнено условие 1 теоремы 1. Из (2) следует существование постоянной $A\geqslant|\alpha|$ такой, что функция $v(\zeta)=u(\zeta)+A\log|\zeta-a|$. ограничена сверху в D_a, и на основании (13) и (14) для нее верно

$$v(\zeta)\geqslant(\alpha+A)\log|\zeta-a|+q\quad\forall\zeta\in D_*, \tag{17}$$

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\ \zeta\in D} v(\zeta)<(\alpha+A)\log|z-a|+q\quad\forall z\in(\partial D)\setminus(Q\cap\partial D_*). \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon\in(0,1)$. Из определения l_ε и (18) вытекает оценка

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\ \zeta\in D} v(\zeta)<(\alpha+A)\,l_\varepsilon(a,z)+q\quad\forall z\in(\partial D)\setminus(Q\cap\partial D_*). \tag{19}$$

В D функция v ограничена сверху и субгармонична, функция $H_D(l_\varepsilon(a,\cdot),\zeta)$ ограничена снизу и гармонична по ζ при каждом $\varepsilon\in(0,1)$. Поэтому с учетом (19) и включения $Q \cap \partial D_* \in \mathfrak{N}$ при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$ верно $v(\zeta) \leqslant (\alpha + A) H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), \zeta) + q \ \forall \zeta \in D$. Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, на основании леммы получаем $v(\zeta) \leqslant (\alpha + A) h_D(a, \zeta) + q = (\alpha + A)[\log|a - \zeta| + \bar{g}_D(a, \zeta)] + q \ \forall \zeta \in D$. Теперь используем регулярность точки a для G, откуда следует ее регулярность для D. Последнее означает, что $\bar{g}_D(a, \zeta) = 0$. Следовательно, $v(\zeta) \leqslant (\alpha + A)\log|a - \zeta| + q \ \forall \zeta \in D$, откуда с учетом (17) получаем $v(\zeta) = (\alpha + A)\log|a - \zeta| + q \ \forall \zeta \in D$. Но это противоречит (18), поскольку $(\partial D) \setminus [Q \cap \partial D_*] \neq \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что при условии 1 теоремы 1 снова верно (12).

Итак, мы доказали, что при условиях теоремы 2 всегда справедлива оценка (12).

Используем этот факт применительно к образам множеств D^a, Q, G при отображении $\zeta_1 = 1/(\zeta - a)$, точке $a_1 = 0$, функциям $u_1(\zeta_1) = u(\zeta)$, $\lambda_1(x) = \lambda(1/x)$ и числам $\alpha_1 = -\alpha$, $\sigma_1 = \sigma$, $q_1 = q$, что законно в силу инвариантности условий теоремы 2 относительно указанной замены объектов. В результате получаем аналог соотношения (12), из которого при обратной замене объектов получается соотношение

$$u(\zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + q \quad \forall \zeta \in D^a. \tag{20}$$

Из (12), (20) и (11) следует, что в G

$$u(\zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + q. \tag{21}$$

Предположим, что в G оценка

$$u(\zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma \tag{22}$$

не верна. Фиксируем произвольную связную компоненту G' множества G такую, что (22) не выполнено хотя бы в одной ее точке. Пусть G_* — множество всех тех $\zeta \in G'$, в которых $u(\zeta) \geqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma$. По аналогии с доказательством соответствующих свойств множества ∂D_* (см. выше) можно убедиться, что множество $Q \cap \partial G_*$ замкнуто в $\mathbb{C}$ и принадлежит классу $\mathfrak{N}$, и верно неравенство

$$\varlimsup_{\zeta \to z,\ \zeta \in G'} u(\zeta) \leqslant \alpha \log|z - a| + \sigma \quad \forall z \in (\partial G') \setminus (Q \cap \partial G_*). \tag{23}$$

Функция

$$u(\zeta) - \alpha \log|\zeta - a| - \sigma \tag{24}$$

субгармонична и ограничена сверху в G'. Если допустить, что $(\partial G') \setminus Q \neq \varnothing$, то к функции (24) применим принцип максимума, и на основании (23) получаем $u(\zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma \ \forall \zeta \in G'$, что противоречит предположению о нарушении в G' оценки (22). Тем самым доказана несостоятельность допущения $(\partial G') \setminus Q \neq \varnothing$. Следовательно, нужно рассмотреть случай, когда $(\partial G') \setminus Q = \varnothing$. Тогда $G' \subset G \subset \mathbb{C} \setminus Q \subset \mathbb{C} \setminus \partial G' \subset G'$ и потому $G' = G = \mathbb{C} \setminus \partial G = \mathbb{C} \setminus Q$, $Q \cap \mathbb{C} = \partial G$, а множество $(\partial G) \setminus \{a\}$, принадлежащее классу $\mathfrak{N}_*$ и замкнутое в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, принадлежит также классу $\mathfrak{N}$ и на основании известной теоремы Брело [5, с. 44, 62] устранимо для функции (24).

При этом G связно, точки a и ∞ являются граничными точками G относительно $\bar{\mathbb{C}}$, а функция u субгармонически продолжима на множество $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ с сохранением неравенства (21). Значит, функция (24) продолжается до ограниченной сверху субгармонической функции в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, а потому и в $\mathbb{C}$. Применяя известный результат об ограниченных сверху субгармонических функциях в $\mathbb{C}$ [10, с. 147, 84], получаем формулу

$$u(\zeta) \equiv \alpha \log|\zeta - a| + p \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \tag{25}$$

с некоторой постоянной $p \in (\sigma, q]$. Так как множество $(\partial G) \setminus \{a\}$ принадлежит классу $\mathfrak{N}$, то точки a и ∞ не могут быть регулярными граничными точками для G. Отсюда и из соотношения $\mathbb{C} \setminus G = \partial G \subset Q$ в соответствии с условием теоремы 2 приходим к выводу, что для точек a и ∞ выполнено условие 3 теоремы 1. Поэтому в G функция

$$u(\zeta)-\lambda(|\zeta-a|) \qquad (26)$$

конечна, ограничена сверху и субгармонична. Применяя к функции (26) рассуждения, проведенные применительно к функции (24), можем проверить, что верно

$$u(\zeta)-\lambda(|\zeta-a|)\equiv\alpha\log|\zeta-a|+\delta \quad \forall\zeta\in\mathbb{C} \qquad (27)$$

с некоторой действительной постоянной δ. Из (25) и (27) следует, что $\lambda(x)\equiv\equiv\alpha\log x+p-\delta$ в $(0,+\infty)$, и потому из (10) вытекает соотношение $\sigma\geqslant\geqslant p-\delta$. Следовательно, $\delta>0$.

Итак, доказано, что если в G оценка (22) не верна, то имеет место исключительный случай утверждения теоремы 2, причем $\beta>0$, а постоянная α определяется однозначно функцией u.

Теперь предположим, что исключительный случай утверждения теоремы 2 не имеет места. Тогда при любых $\sigma,\alpha\in(-\infty,+\infty)$, удовлетворяющих условию (10), в G верно (22) и существует наименьшая гармоническая мажоранта $\gamma_G(u,\zeta)$. Пусть $\zeta_0\in G$ и $G(\zeta_0)$ — связная компонента множества G, содержащая ζ_0.

Сначала примем, что $\lambda\in L^*$. Если $x_\lambda^-<|\zeta_0-a|<x_\lambda^+$, то можно выбрать $\sigma,\alpha\in(-\infty,+\infty)$ такие, что выполнено (10) и $\lambda(|\zeta_0-a|)==\alpha\log|\zeta_0-a|+\sigma$. Отсюда и из (22) следуют оценки

$$u(\zeta_0)\leqslant\gamma_G(u,\zeta_0)\leqslant M_{G,a}(u,|\zeta_0-a|)\leqslant\lambda(|\zeta_0-a|). \qquad (28)$$

Если $|\zeta_0-a|$ не лежит на сегменте $[x_\lambda^-,x_\lambda^+]$, то за счет выбора $\sigma,\alpha\in\in(-\infty,+\infty)$ можно добиться того, что число $\alpha\log|\zeta_0-a|+\sigma$ станет меньше любого наперед заданного $M>-\infty$, а условие (10) сохранится. Поэтому из справедливости (22) в G следует, что

$$u(\zeta_0)=\gamma_G(u,\zeta_0)=M_{G,a}(u,|\zeta_0-a|)=-\infty, \qquad (29)$$

и потому также

$$u(\zeta)=\gamma_G(u,\zeta)=-\infty \quad \forall\zeta\in G(\zeta_0). \qquad (30)$$

Если же $|\zeta_0-a|$ равно x_λ^- или x_λ^+, то согласно доказанному $G(\xi_0)$ содержит круг, где $u(\zeta)\equiv-\infty$. Значит, в этом случае имеет место (30). Следовательно, при $\lambda\in L^*$ верны оценки (3).

Если $\lambda\equiv-\infty$, то при всяких $\sigma,\alpha\in(-\infty,+\infty)$ справедливо (10), откуда следуют соотношения (28)—(30) для всякого $\zeta_0\in G$, а также оценки (3), (4), (3′), (4′).

Итак, доказано, что при условиях теоремы 2 оценка (3) всегда верна.

Из (3) с учетом определений вытекают оценки $u_G^a\leqslant-\lambda^0$, $u_G^\infty\leqslant\lambda^\infty$, $-\infty\leqslant\sigma^s\leqslant0$ для $s=1,2$.

Пусть либо $\sigma_s=0=\sigma^s$, либо $\sigma_s\in(\sigma^s,0]$, $s=1,2$. Зафиксируем произвольные $\sigma,\alpha\in(-\infty,+\infty)$, для которых верно (10). Тогда имеет место (22). Для $r>0$ и всякой функции $v:G\to[-\infty,+\infty)$ обозначим

$$\sup_{\zeta\in G,\ |\zeta-a|=r}v(\zeta)=m_{G,a}(v,r).$$

Сначала предположим, что $\partial G\notin\mathfrak{N}$ и введем обозначение

$$u(\zeta)-(\alpha\log|\zeta-a|+\sigma)-\sigma_1\bar g_G(a,\zeta)-\sigma_2\bar g_G(\infty,\zeta)=v_{\sigma_1,\sigma_2}(\zeta).$$

Функция v_{σ_1,σ_2} субгармонична в G и ограничена сверху на всякой ограниченной части G, отделимой от a. Кроме того, во всех регулярных граничных точках $z\in(\partial G)\setminus\{a\}$ имеем

$$\overline{\lim_{\zeta\to z,\ \zeta\in G}}\,v_{\sigma_1,\sigma_2}(\zeta)\leqslant0.$$

Если $\sigma_2=0$, то из (22) следует существование конечной постоянной c_1 такой, что $m_{G,a}(v_{\sigma_1,\sigma_2},r)\leqslant-s_1c_1\ \ \forall r\geqslant1$.

Если $\sigma_2 \in (\sigma^2, 0)$, то существуют конечные постоянные c_1, c_2 такие, что при всех достаточно больших r

$$m_{G,a}(v_{\sigma_1,\sigma_2}, r) \leqslant m_{G,a}(u, r) - (\alpha \log r + \sigma) - \sigma_1 c_1 - \sigma_2 (\log r + c_2) \leqslant O(1),$$
$$r \to +\infty,$$

ибо либо $u_G^\infty = -\infty$ и $m_{G,a}(u, r) < (\alpha + \sigma_2) \log r$ при всех достаточно больших r, либо $u_G^\infty \neq -\infty$, $\lambda^\infty \neq -\infty$ и при всех больших r

$$m_{G,a}(u, r) - (\alpha + \sigma_2) \log r < (u_G^\infty - \alpha - \sigma^2) \log r = (\lambda^\infty - \alpha) \log r \leqslant 0.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что функция $m_{G,a}(v_{\sigma_1,\sigma_2}, r)$ ограничена сверху при всех $r \in (0, 1]$.

Тем самым доказано, что функция v_{σ_1,σ_2} ограничена сверху в G и потому на основании принципа максимума получаем

$$v_{\sigma_1,\sigma_2}(\zeta) \leqslant 0 \quad \forall \zeta \in G,$$
$$u(\zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma + \sigma_1 \bar{g}_G(a, \zeta) + \sigma_2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) \quad \forall \zeta \in G.$$

Устремляя σ_s к σ^s для $s = 1, 2$, в пределе получаем

$$u(\zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma + \sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta) + \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) \quad \forall \zeta \in G, \tag{31}$$

где при каждом $\zeta \in G$ приняты следующие соглашения: если $\bar{g}_G(a, \zeta) = 0$, то $\sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta) = 0$ (даже при $\sigma^1 = -\infty$), а если $\bar{g}_G(\infty, \zeta) = 0$, то $\sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) = 0$ (даже при $\sigma^2 = -\infty$). Если при некотором $\zeta_0 \in G$ выполнено условие $\sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta_0) + \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) = -\infty$, то имеем $u(\zeta) = \gamma_G(u, \zeta) = -\infty$ $\forall \zeta \in G(\zeta_0)$, и в этом случае неопределенному выражению $u(\zeta) - \sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta) - \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta)$ в $G(\zeta_0)$, согласно нашему соглашению, приписывается значение $-\infty$. При указанных соглашениях из (31) вытекают соотношения

$$\gamma_G(u, \zeta) \leqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma + \sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta) + \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) \quad \forall \zeta \in G, \tag{32}$$

$$M_{G,a}(u(\cdot) - \sigma^1 \bar{g}_G(a, \cdot) - \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \cdot), |\zeta - a|) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \log|\zeta - a| + \sigma \quad \forall \zeta \in G. \tag{33}$$

Пусть $\zeta_0, \zeta_1 \in G$ и $\lambda \in L^*$. Если $x_\lambda^- < |\zeta_0 - a| < x_\lambda^+$, то можно выбрать $\sigma, \alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что выполнено (10) и $\lambda(|\zeta_0 - a|) = \alpha \log|\zeta_0 - a| + \sigma$. Отсюда и из (32), (33) следуют неравенства из (3′), (4′) для $\zeta = \zeta_0$ и оценка

$$u(\zeta_1) - \sigma^1 \bar{g}_G(a, \zeta_1) - \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \zeta_1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{d^+\lambda(x)}{d \log x}\bigg|_{x=|\zeta_0 - a|} \log\left|\frac{\zeta_1 - a}{\zeta_0 - a}\right| + \lambda(|\zeta_0 - a|), \tag{34}$$

где $\frac{d^+\lambda(x)}{d \log x}$ есть правосторонняя производная. Пусть $|\zeta_1 - a|$ равно x_λ^- или x_λ^+. Тогда, устремляя в (34) ζ_0 к ζ_1, получаем

$$M_{G,a}(u(\cdot) - \sigma^1 \bar{g}_G(a, \cdot) - \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \cdot), |\zeta_1 - a|) \leqslant \tilde{\lambda}(|\zeta_1 - a|). \tag{35}$$

Если $|\zeta_0 - a|$ не лежит на сегменте $[x_\lambda^-, x_\lambda^+]$, то за счет выбора σ, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ можно добиться того, что число $\alpha \log|\zeta_0 - a| + \sigma$ станет меньше любого наперед заданного $M > -\infty$, а условие (10) сохранится. Поэтому из (33) следует

$$M_{G,a}(u(\cdot) - \sigma^1 \bar{g}_G(a, \cdot) - \sigma^2 \bar{g}_G(\infty, \cdot), |\zeta_0 - a|) = -\infty.$$

Из изложенного следуют оценки (3′), (4′), (4).

Пусть теперь $\partial G \in \mathfrak{N}$. В этом случае используем (28)—(30) и по аналогии с выводом оценок (34), (35) получаем (4). Теорема 2 доказана.

Исследуем вопрос о достижении знака равенства в установленных оценках. Решение этого вопроса дается следующим утверждением.

Предложение. *Пусть $a \in \mathbb{C}$, $\lambda \in L$, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ — открытое множество, v — субгармоническая в G функция, удовлетворяющая в G неравенству $v(\zeta) \leqslant \lambda(|\zeta - a|)$, ζ_0 — фиксированная в G точка, $G(\zeta_0)$ — связная компонента множества G, содержащая ζ_0. Тогда, обозначая $|\zeta_0 - a| = r_0$, имеем:*

а) *если $\gamma_G(v, \zeta_0) \geqslant \lambda(r_0)$, то существуют постоянные $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ и $c \geqslant 0$ такие, что*

$$\gamma_G(v, \zeta) = \log(c|\zeta - a|^\alpha) \quad \forall \zeta \in G(\zeta_0) \tag{36}$$

и, кроме того, либо $c = 0$, либо

$$\lambda(|\zeta - a|) = \log(c|\zeta - a|^\alpha) \quad \forall \zeta \in G(\zeta_0); \tag{37}$$

б) *если $M_{G,a}(v, r_0) \geqslant \tilde{\lambda}(r_0)$ и окружность $\{\zeta : |\zeta - a| = r_0\}$ содержится в G, то существуют $r_1 \in [0, r_0)$, $r_2 \in (r_0, +\infty)$, $c \geqslant 0$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что*

$$M_{G,a}(v, r) = \log(cr^\alpha) \quad \forall r \in (r_1, r_2) \tag{38}$$

и если $c > 0$, то функция $M_{G,a}(v, r)$ непрерывна на замыкании интервала (r_1, r_2) в $(0, +\infty)$ и

$$\lambda(r) = \log(cr^\alpha) \quad \forall r \in (r_1, r_2), \tag{39}$$

а при каждом $i = 1, 2$, для которого $0 < r_i < +\infty$, выполнено

$$\varlimsup_{r \to r_i} m_{G,a}(v, r) = M_{G,a}(v, r_i) = \log(cr_i^\alpha) = \tilde{\lambda}(r_i). \tag{40}$$

Замечание. Если $v(\zeta_0) = \gamma_G(v, \zeta_0)$, то $v(\zeta) \equiv \gamma_G(v, \zeta)$ в $G(\zeta_0)$.

Сформулированное предложение и замечание к нему, если в них под v понимать u или функцию $u - \sigma^1\bar{g}_G(a, \cdot) - \sigma^2\bar{g}_G(\infty, \cdot)$, дают решение вопроса о достижении знака равенства в утверждениях теорем 1, 2.

Доказательство предложения. Из условий предложения на основании теоремы 1 вытекает существование наименьшей гармонической мажоранты $\gamma_G(v, \zeta)$ и справедливость оценок вида (3), (4) для v.

Предположим, что $\gamma_G(v, \zeta_0) \geqslant \lambda(r_0)$. Тогда при $\gamma_G(v, \zeta_0) \neq -\infty$ существуют σ, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что имеет место (10) и $\gamma_G(v, \zeta_0 \geqslant \alpha \log r_0 + \sigma$. В этом случае согласно второму неравенству из (3) для v и (10) функция $\gamma_G(v, \zeta) - \alpha \log|\zeta - a| - \sigma$ субгармонична и неположительна в G_0, равна нулю в точке ζ_0 и по этой причине тождественно равна нулю в G_0. Следовательно, верно (36). Теперь из (3) (для v), (10) и 36) следует (37).

При $\gamma_G(v, \zeta_0) = -\infty$ верно $\gamma_G(v, \zeta) \equiv -\infty$ в $G(\zeta_0)$. Утверждение а) доказано.

Пусть теперь выполнены условия утверждения б). Легко видеть, что $M_{G,a}(v, e^t)$ как функция от $t \in (-\infty, +\infty)$ является наименьшей полунепрерывной сверху функцией класса L, мажорирующей функцию $m_{G,a}(v, e^t)$. Так как окружность $\{\zeta : |\zeta - a| = r_0\}$ содержится в G, то существуют $r_1 \in [0, r_0)$, $r_2 \in (r_0 + \infty]$, $c \geqslant 0$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что выполнено (38) и при $c > 0$ функция $M_{G,a}(v, r)$ непрерывна на замыкании интервала (r_1, r_2) в $(0, +\infty)$, а при каждом $i = 1, 2$, для которого $0 < r_i < +\infty$, выполнено первое равенство в (40). С учетом (4) (для v) при $c > 0$ функция $M_{G,a}(v, r) - \lambda(r)$ на интервале (r_1, r_2) неположительна, выпукла, при $r = r_0$ обращается в нуль, и потому тождественно равна нулю в (r_1, r_2). Следовательно, верно (39). Из (38), (39), (4) (для v) и свойства полунепрерывности сверху функции $M_{G,a}(v, r)$ следуют остальные равенства в (40). Предложение доказано.

1. *Тамразов П. М.* Локальная контурно-телесная задача для субгармонических функций.— Киев, 1984.— 17 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.52).
2. *Tamrazov P. M.* Local Contour — and — solid Problem for Subharmonic Functions // Complex Variables.— 1986.— **7**.— P. 235—246.
3. *Тамразов П. М.* Субгармонические функции в контурно-телесной задаче.— Киев. 1985.— 24 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.47).
4. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).
5. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 213 с.
6. *Алиев Т. Г., Тамразов П. М.* Мероморфные функции в контурно-телесной задаче с учетом нулей и неоднолистности.— Киев, 1985.— 15 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.46).
7. *Fuchs W. H. J.* A Phragmen — Lindelöf theorem conjectured by D. J. Newman // Trans. Amer. Math. Soc.— 1981.— **267**.— N 1.— *P*. 285—293.
8. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные теоремы с билогарифмически вогнутыми мажорантами.— Киев, 1983.— 18 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.11).
9. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 516 с.
10. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Мир, 1980.— 304 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.03.86