УДК 517.95

Е. В. Булавенко

О задаче Дирихле для оператора теории упругости

В данной работе рассматривается задача Дирихле для оператора линейной теории упругости в случае неоднородного и анизотропного тела, занимающего произвольную открытую область $\Omega \subset R^n$. В случае открытой ограниченной области $\Omega \subset R^n$ гладкости C^∞ теорема существования задачи доказана в работе [1]. Аналогичным образом, воспользовавшись результатами работы [2], можно показать существование и единственность обобщенного решения однородной задачи Дирихле для оператора теории упругости и в случае произвольной открытой ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с липшицевой границей.

Введем обозначения. Пусть $D(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, содержащимися в $\Omega \subset R^n$, $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева, $H_0^1(\Omega)$ — замыкание $D(\Omega)$ (по норме $\|\cdot\|_1$ пространства $H^1(\Omega)$). Оператор линейной теории упругости обозначим через L; это дифференциальный оператор — матрица второго порядка, его вид указан, например, в [3].

Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — перемещения в $\Omega \subset R^n$, $\varepsilon_{ik}(u)$, $\sigma_{ik}(v)$ — соответствующие этим векторам перемещений компоненты тензоров деформаций и напряжений. Введем функцию $W(u, v) = \dfrac{1}{2}[\varepsilon_{11}(u)\sigma_{11}(v) + \ldots$ $\ldots + \varepsilon_{n-1n}(u)\sigma_{n-1n}(v)]$, упругий потенциал $W(u)$ определим равенством $W(u) = W(u, u)$.

Пусть Ω — произвольная открытая область в R^n. В этом случае, если u — классическое решение задачи, то без дополнительной информации относительно поведения u на бесконечности не ясно, принадлежит ли u пространству $H^1(\Omega)$. Во-вторых, очевидно, невозможно показать $H_0^1(\Omega)$-коэрцитивность формы $B[u, v] = (L, v)$, так как здесь не имеет места неравенство Пуанкаре — Фридрихса.

Рассмотрим пополнение $D(\Omega)$ по норме $\|u\| = \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \|D_j u_i\|_{L_2(\Omega)}\Big)^{1/2}$. Обозначим это пространство через Z. Так как $\|u\| \leqslant \|u\|_1$, то имеем $H_0^1(\Omega) \subset Z$. Известно, что справедливо непрерывное вложение $Z \subset \{u : u \in L^\alpha(\Omega),\ D_i u \in L^2(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $\alpha = 2n/(n-2)$. Из этого вложения видно, что функции из Z стремятся к нулю на бесконечности. Применив тождество Бетти, положительную определенность формы $B[u, v]$ как формы компонент деформации ε_{ik}, а также неравенство Корна к некоторому открытому ограниченному подмножеству $\Omega' \subset \Omega$ с границей Γ' и устремив радиус-вектор Γ' к бесконечности, можно показать коэрцитивность $B[u, v]$ на $D(\Omega)$. Продолжим последнее свойство формы $B[u, v]$ по непрерывности на Z-замыкание пространства $D(\Omega)$ в норме $\|\cdot\|$. Имеем

$$(Lu, u) = 2\int_{\Omega} W(u)\,dx \geqslant k_1 \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{n} \varepsilon_{ik}^2 dx \geqslant k_2 \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx = k_2 \| u \|^2,$$

где все константы положительны.

Таким же образом, используя неравенство Шварца, можно доказать ограниченность формы $B[u, v]$ на Z. Действительно,

$$|(Lu, v)| = 2\left|\int_{\Omega} W(u, v)\,dx\right| \leqslant 2\int_{\Omega} |W(u, v)|\,dx =$$

$$= 2\sum_{i,j,k,m=1}^{n} \int_{\Omega} |a_{ijkm}|\,|D_i u_k|\,|D_j v_m|\,dx \leqslant \gamma \sum_{i,jk,m=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u_k|\,|D_j v_m|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \left(\int_{\Omega} |D_i u_k|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |D_j v_m|^2\,dx\right)^{1/2} = \gamma \|u\|\,\|v\|,$$

где a_{ijkm} — коэффициенты в $W(u, v)$ — ограниченные измеримые функции в Ω, $\gamma > 0$.

И, наконец, из тождества Бетти и симметричности $W(u, v)$ следует симметричность $B[u, v]$ на Z. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *Форма $B[u, v]$ коэрцитивна, ограничена и симметрична на Z.*

Из этой леммы следует, что форма $B[u, v]$ задает на пространстве Z норму эквивалентную норме самого Z. Обозначим пространство с этой нормой через Y. Пусть элемент $f \in Y'$. Рассмотрим задачу определения функции $u \in Y$, удовлетворяющей равенству

$$(Lu, v) = \langle f, v\rangle \qquad \forall v \in Y. \tag{1}$$

Поскольку выражение слева в (1) представляет собой скалярное произведение в Y, по теореме Рисса существует единственное решение $u \in Y$ задачи (1). Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть Ω — произвольная открытая область в R^n и $f \in Y'$. Тогда существует единственный элемент $u \in Y$ такой, что $(Lu, v) = \langle f, v\rangle$ $\forall v \in Y$.*

Замечание. Можно показать, что решение задачи (1) минимизирует функционал $J(v) = (Lv, v) - 2\langle f, v\rangle$ на Y.

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости.— М. : Мир, 1974.— 160 с.
2. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.— Prague : Academia, 1967.— 351 p.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М. : Наука, 1970.— 940 с.

Ин-т кибернетики АН УССР, Киев

Получено 08.10.86,
после доработки — 06.01.87