УДК 517.968:519

М. М. Нореддин, Н. Я. Тихоненко

Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений первого рода методом ортогональных многочленов

В настоящей работе обосновывается метод ортогональных многочленов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода

$$K\varphi \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \lambda \int_{-1}^{1} K(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \quad t \in [-1; 1], \tag{1}$$

где λ — числовой параметр, а $K(t, \tau)$, $f(t)$ — неизвестные функции, которые подчинены вполне определенным условиям, указанные ниже.

Метод ортогональных многочленов широко применяется при нахождении решений конкретных интегральных уравнений, в том числе и сингулярных, к которым сводится широкий круг задач теории упругости, термоупругости, газовой динамики [1—5]. Метод ортогональных многочленов является одной из модификаций метода Бубнова—Галеркина и его основы разработаны Г. Я. Поповым [1—3]. Суть метода ортогональных многочленов состоит в том, что классические ортогональные многочлены являются собственными функциями многих интегральных операторов с ядрами, которые согласно [1] будем называть полиномиальными, или П-ядрами, и для них выполняются известные спектральные соотношения [1]. В работе [1] дано описание метода ортогональных многочленов и общие соображения его применимости к приближенному решению различных классов интегральных уравнений, в том числе и сингулярных, а также практическая реализация метода ортогональных многочленов при решении конкретных интегральных уравнений, к которым сводятся конкретные контактные задачи теории упругости. В работах [1—5] при решении конкретных интегральных уравнений методом ортогональных многочленов доказывается регулярность или квазирегулярность соответствующих алгебраических систем, которые затем решаются методом редукции, однако не устанавливается скорость сходимости приближенных решений интегральных уравнений к их точным решениям, т. е. по существу не оценивается погрешность приближенного решения. В работе [6] дано обоснование метода ортогональных многочленов, т. е. доказательство разрешимости соответствующих алгебраических систем, и устанавливается скорость сходимости приближенного решения к точному, для интегральных уравнений первого рода с полиномиальными ядрами при достаточно жестких предположениях относительно гладкости функций $K(t, \tau)$ и $f(t)$. Однако до настоящего времени в общем случае метод ортогональных многочленов не обоснован.

В настоящей работе методом, отличным от метода, изложенного в [6], обосновывается метод ортогональных многочленов приближенного решения уравнения (1).

Согласно [1] для применимости метода ортогональных многочленов к решению уравнения (1) необходимо изучить свойства решений уравнения (1). Этой проблеме посвящено значительное число работ, однако окончательные результаты в этом направлении получены в работах [7, 8]. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функции* $f(t)$, $K(t,\tau)\in H_\alpha^{(r)}$ *по* t *и* τ, $0<\alpha\leqslant 1$, $r\geqslant 0$. *Тогда в классе функций, неограниченных на концах сегмента* $[-1;1]$, *решение уравнения* (1) *имеет вид*

$$\varphi(t)=\frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{1-t^2}},\tag{2}$$

где $\varphi_0(t)\in H_\gamma^{(r)}$, $\gamma=\min\{\alpha_0, 1/2\}$.

Пусть $p(t)=\sqrt{1-t^2}$. Обозначим через $L_{2p}=L([-1;1], p(t))$ пространство функций $g(t)$ таких, что $\int\limits_{-1}^{1} p(t)\,|g(t)|^2\,dt<+\infty$. В пространстве L_{2p} введем скалярное произведение обычным способом.

Пусть функции $f(t)$, $K(t,\tau)\in L_{2p}$ по t и τ. Тогда согласно работам [6—8] решение уравнения (1) также принадлежит L_{2p}. Представим уравнение (1) в виде

$$K\varphi\equiv K_0\varphi+\lambda T\varphi=f,\tag{3}$$

где

$$K_0\varphi\equiv\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},\tag{4}$$

$$T\varphi\equiv\int\limits_{-1}^{1}K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.\tag{5}$$

Тогда, согласно работе [9], справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Если функция* $K(t,\tau)\in L_{2p}$ *по* t *и* τ, *то оператор* $T: L_{2p}\to L_{1p}$ *является вполне непрерывным оператором.*

Приближенное решение $\varphi_n(t)$ уравнения (1) ищем в виде

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(t),\tag{6}$$

где $T_k(t)$ — многочлены Чебышева первого рода, а неизвестные коэффициенты c_k определяются из системы уравнений

$$(K\varphi_n-f, U_j)=0,\quad j=\overline{0,n},\tag{7}$$

где $U_j(t)$ — многочлены Чебышева второго рода, т. е. коэффициенты c_k определяются из системы уравнений

$$c_0\alpha_j+\frac{\pi^2}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k\delta_{jk-1}+\lambda\sum_{k=0}^{n}c_k\alpha_{jk}=f_j,\quad j=\overline{0,n},\tag{8}$$

где α_j, α_{jk}, f_j — коэффициенты Фурье соответственно функций

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)},\quad \int\limits_{-1}^{1}\frac{K(t,\tau)\,T_k(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau,\quad f(t)$$

в пространстве L_{2p} по системе многочленов $U_j(t)$, а δ_{jk-1} — символ Кронекера.

Докажем теперь разрешимость системы (7) и установим скорость сходимости приближенного решения $\varphi_n(t)$ уравнения (1) к его точному решению.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(t)$, $K(t,\tau)\in L_{2p}$ *по* t *и* τ, *а* λ *не является характеристическим числом. Тогда система* (7) *разрешима начиная* *с некоторого номера n, а приближенное решение $\varphi_n\xi(t)$ уравнения* (1) *при $n\to\infty$ стремится в пространстве L_{2p} к его точному решению.*

Доказательство. Обозначим через P_n оператор проектирования пространства L_{2p} на конечномерное подпространство X_n, базисными функциями которого являются функции $(1-t^2)^{-1/2}T_k(t)$. Через Q_n обозначим оператор проектирования пространства L_{2p} на конечномерное подпространство Y_n, базисными функциями которого являются многочлены $U_j(t)$. Так как любую функцию из L_{2p} можно разложить в сходящийся ряд Фурье по системам функций $\{(1-t^2)^{-1/2}T_k(t)\}$ и $\{U_j(t)\}$, то из этого следует, что операторы P_n и Q_n обладают свойством $P_n^2=P_n$, $Q_n^2=Q_n$ и ограничены. Более того, $\|P_n\|=\|Q_n\|=1$. Покажем теперь, что проекционный процесс $\{P_n, Q_n\}$ [10] применим к оператору K. Так как оператор $T: L_{2p}\to L_{2p}$ вполне непрерывен, то для доказательства данного утверждения согласно [10] достаточно показать, что проекционный процесс $\{P_n, Q_n\}$ применим к оператору K_0, т. е. достаточно доказать разрешимость системы

$$(K_0\varphi_n-f, U_j)=0, \quad j=\overline{0, n}, \tag{9}$$

и установить скорость сходимости приближенного решения уравнения

$$K_0\varphi=f \tag{10}$$

к его точному решению.

Легко видеть, что система (9) разрешима при любых n и ее решение определяется по формулам

$$c_0=\alpha_n^{-1}f_n, \quad c_k=\frac{2}{\pi^2}(f_{k-1}-\alpha_{k-1}c_0), \quad k=\overline{1, n}. \tag{11}$$

Кроме того, $\|Q_nK_0\varphi-Q_nK_0\varphi_n\|_{L_{2p}}\to 0$ при $n\to\infty$, так как $\|Q_n\|=1$, оператор K_0 ограничен в L_{2p} [9], а $\|\varphi-P_n\varphi\|_{L_{2p}}\to 0$ при $n\to\infty$.

Следовательно, выполнены все условия сходимости схемы Бубнова—Галеркина [11]. Тогда приближенное решение уравнения (10) сходится к его точному решению в пространстве L_{2p}. Это означает, что к оператору K_0 применим проекционный процесс $\{P_n, Q_n\}$. Тогда на основании [10] к оператору $K=K_0+T$ применим проекционный процесс $\{P_n, Q_n\}$, т. е. система (7) разрешима начиная с некоторого номера n_0, а приближенные решения $\varphi_n(t)$ уравнения (1) сходятся к его точному решению по метрике пространства L_{2p}.

Если же функции $f(t)$ и $K(t,\tau)$ являются более гладкими, то справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $f(t)$, $K(t,\tau)\in H_\alpha^{(r)}$ по t и τ, $0<\alpha\leqslant 1$, $r\geqslant 0$, и λ не является характеристическим числом. Тогда система* (7) *разрешима при всех n, удовлетворяющих неравенству $d_1n^{-r-\gamma}<1$, а приближенное решение $\varphi_n(t)$ уравнения* (1) *стремится к его точному решению по метрике пространства L_{2p} со скоростью*

$$\|\varphi(t)-\varphi_n(t)\|_{L_{2p}}\leqslant d_2n^{-r-\gamma}, \tag{12}$$

где постоянные d_1, d_2 не зависят от n.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим также, что оценка скорости сходимости (12) неулучшаема на классах функций $K(t,\tau)$, $f(t)\in H_\alpha^{(r)}$ по t и τ, $0<\alpha\leqslant 1$, $r\geqslant 0$.

Замечание. Аналогично обосновывается метод ортогональных многочленов приближенного решения уравнения

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\varphi(\tau)\,d\tau+\lambda\int_{-1}^{1}K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad \|t\|\leqslant 1,$$

в предположении, что функции $f(t)$, $K(t,r)\in H_\alpha^{(r)}$, по t и τ, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $r\geqslant 0$.

1. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.— М. : Наука, 1982.— 342 с.
2. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам // Прикл. математика и механика.— 1963.— **27**, вып. 5.— С. 821—832; 1964.— **28**, вып. 3.— С. 442—451.
3. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости // Там же.— **33**, вып. 3.— С. 518—531.
4. *Александров В. М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Там же.— 1967.— **31**, выр. 6.— С. 1117—1131.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* О двух эффективных методах решения линейных смешанных задач механики сплошных сред // Там же.— 1977.— **41**, вып. 4.— С. 688—698.
6. *Моисеев Н. Г.* Краевые задачи плоской теории упругости при наличии дефектов внутри области : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1985.— 16 с.
7. *Светной А. П., Тихоненко Н. Я.* К выделению особенностей решений задачи Римана // Изв. вузов. Математика.— 1981.— № 6.— С. 78—82.
8. *Светной А. П.* Выделение особенностей решений задачи Римана на разомкнутом контуре.— Казань, 1981.— 9 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1429-81 Деп.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Мир, 1968.— 512 с.
10. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 496 с.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 496 с.
12. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.— 184 с.

Одес. ун-т

Получено 03.06.86