УДК 517.946

В. М. Кирилич

Нелокальная задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка

Постановка задачи. В верхней полуплоскости G рассмотрим кривые γ_s с уравнениями $x = a_s(t)$, $a_s(0) = 0$, $s = \overline{0, m+1}$, $m \geqslant 0$, $a_s(t) \in C^1$ ($\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$). Будем считать, что кривые γ_s, $s = \overline{0, m+1}$, заранее не заданы, а заданы только значения $a_s'(0)$, причем $a_0'(0) < \ldots < a_{m+1}(0)$. Обозначим через $G_\gamma \subset G$ область, ограниченную кривыми γ_0 и γ_{m+1}. Кривые $\gamma_s : x = a_s(t)$, $s = \overline{0, m+1}$, $a_{s+1}(t) > a_s(t)$ $\forall t > 0$, $a_s(0) = 0$ разбивают G_γ на $m+1$ компоненту связности G_γ^s, занумерованные слева направо. Пусть $G_{\gamma\varepsilon}^s = \{x, t : (x, t) \in G_\gamma^s,\ a_s(t) < x < a_{s+1}(t),\ 0 < t < \varepsilon\}$.

В G рассмотрим систему

$$\partial u_i/\partial t + \lambda_i(x, t)\, \partial u_i/\partial x = F_i(x, t, u_1, \ldots, u_n),\ i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Поскольку границы областей $G_{\gamma\varepsilon}^s$ заранее не заданы, то считаем, что все функции λ_i, F_i, $i = \overline{1, n}$, заданы при $t \geqslant 0$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ и непрерывны там вместе с λ_{ix}' и λ_{it}'; функции λ_i^s и т. п. комбинируются из λ_i после построения всех $a_s(t)$, т. е. областей $G_{\gamma\varepsilon}^s$, по правилу $\lambda_i(x, t) = \lambda_i^s(x, t)$ при $a_s(t) < x < a_{s+1}(t)$, $s = \overline{0, m}$.

Предполагается, что при каждом $s = \overline{0, m}$

$$\begin{aligned} &\lambda_i^s(0, 0) - a_s(0) > 0, \quad i = \overline{1, p_s}, \\ &\lambda_i^s(0, 0) - a_{s+1}(0) < 0, \quad i = \overline{p_s + 1, n}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $0 \leqslant p_s \leqslant n$. Положим $N = (m+1)n$.

Рассмотрим следующую задачу: для некоторого $\varepsilon > 0$ найти функции $a_i(t)$, $i = \overline{0, m+1}$, и в соответствующей области $G_{\gamma\varepsilon}$ — решение $u(x, t)$ системы (1) так, чтобы удовлетворялись условия

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\Big[\sum_{k=s}^{s+1}\alpha_{is}^{kp}(a(t), t)\, u_i^s(a_k(t), t) +$$

$$+\int\limits_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}\beta_{is}^{p}(y, t)\, u_i^s(y, t)\, dy\Big] = h^p(a(t), t), \quad p = \overline{1, N}, \quad t \in [0, \varepsilon], \tag{3}$$

$$a_r'(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=s}^{s+1}\gamma_{rj}^{ks}(a(t), t)\, u_j^s(a_k(t), t) + H_r(a(t), t),$$

$$r = \overline{0, m+1}, \quad t \in [0, \varepsilon], \tag{4}$$

где $a(t) = (a_0(t), \ldots, a_{m+1}(t))$.

Эта задача представляет собой вариант многофазной двухсторонней задачи типа Стефана (задачи с неизвестными границами) для системы (1) в случае вырождения интервала задания начальных условий в точку. Некоторые случаи задач с неизвестными границами рассмотрены в [1—3]. Задачи с нелокальными (неразделенными и интегральными) условиями для таких систем изучались в [3—5].

Введем в рассмотрение матрицы

$$\alpha_s^1(a, t) = \|\alpha_{is}^{sp}(a(t), t)\|, \quad p = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, p_s},$$

$$\alpha_s^2(a, t) = \|\alpha_{is}^{s+1, p}(a(t), t)\|, \quad p = \overline{1, N}, \quad i = \overline{p_s + 1, n}$$

и положим

$$A(a, t) = \|\alpha_0^1(a, t) \ldots \alpha_m^1(a, t)\, \alpha_0^2(a, t) \ldots \alpha_m^2(a, t)\|,$$

$$B(a, t) = (-1)\,\|\alpha_0^2(a, t) \ldots \alpha_m^2(a, t)\, \alpha_0^1(a, t) \ldots \alpha_m^1(a, t)\|.$$

Разрешимость задачи. Под кусочно-непрерывным обобщенным решением задачи (1) — (4) будем понимать набор функций $a_s(t)$, $s = \overline{0, m+1}$, $0 < t \leqslant \varepsilon$, для некоторого $\varepsilon > 0$ и кусочно-непрерывное обобщенное (в смысле [3, 4]) решение $u(x, t)$ в $G_{\gamma\varepsilon}$ задачи (1) — (3), удовлетворяющее условию (4) при всех $t \in [0, \varepsilon]$.

Теорема. *Предположим следующее:*

1) *коэффициенты* $\lambda_i^s(x, t) \in C^1(\bar{U}_0)$, $i = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, m}$, *где* $\bar{U}_0 = \{x, t: |x| \leqslant \leqslant \varepsilon_0,\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0\}$ *для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$;

2) *функции* $F_i^s(x, t, u^s) \in C^1(\bar{U}_0 \times \mathbb{R}^n)$ *и удовлетворяют по* u^s *локальному условию Липшица;*

3) *коэффициенты* α_{is}^{kp}, $h^p \in C^1([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^{m+1} \times [0, \varepsilon_0])$, $\beta_{is}^p \in C^1(\bar{U}_0)$, $i = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, m}$, $p = \overline{1, N}$, $k = \overline{s, s+1}$;

4) *коэффициенты* γ_{rj}^{sk}, $H_r \in C^1([-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^{m+1} \times [0, \varepsilon_0])$;

5) $\det A(0, 0) \neq 0$;

6) $|A^{-1}(0, 0)\, B(0, 0)| < 1$ (*через* $|\cdot|$ *обозначена одна из обычных норм матрицы*);

7) $|H_r(0, 0)| < 1$, $r = \overline{0, m+1}$;

8) $\det\|\alpha_{is}^{sp}(0, 0) + \alpha_{is}^{s+1, p}(0, 0)\| \neq 0$, *где строки выписанной матрицы занумерованы значениями* $p = \overline{1, N}$, *а столбцы-парами* (s, i), $s = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$;

9) *выполнены условия согласования; для их получения надо в* (3) *положить* $t = 0$, *что приведет к системе уравнений* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}[\alpha_{is}^{sp}(0, 0) + \alpha_{is}^{s+1, p}(0, 0)]\, u_i^s(0, 0) = h^p(0, 0)$, $p = \overline{1, N}$, *из которой в силу* 8) *можно однозначно определить все значения* $u_i^s(0, 0)$; *эти значения должны удов-*

летворять соотношениям, получающимся из (4) *при* $t=0$:

$$a_r'(0)=\sum_{s=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}[\gamma_{rj}^{ss}(0,0)+\gamma_{rj}^{s+1,s}(0,0)]\,u_j^s(0,0)+H_r(0,0),\quad r=\overline{0,m+1}.$$

Тогда существует такое значение $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$, *что задача* (1)—(4) *имеет в* $\overline{G}_{\gamma\varepsilon}$ *единственное кусочно-гладкое обобщенное решение, определенное для всех* $t\in[0,\ \varepsilon]$.

Доказательство. Обозначим заданные значения $a_s'(0)$ через $(a_s')_0$, зададимся некоторыми значениями $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, $h>0$ и обозначим через D_ε^h множество функций $a=(a_0,\ldots,a_{m+1})\in[C^1[0,\varepsilon]]^{m+2}$, для которых $|a_s(t)|<$ $<\varepsilon$, $a_s'(t)-(a_s')_0|\leqslant h$, $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$, $s=\overline{0,m+1}$. Величины ε и h будем считать столь малыми, чтобы для всех таких функций удовлетворялись соотношения (2) и $\det A(a,t)\neq0\ \forall\ t\in[0,\varepsilon]$.

Из работы [4] (теорема 1) следует, что каждой функции $a\in D_\varepsilon^h$ отвечает кусочно-непрерывное обобщенное решение в $\overline{G}_{\gamma\varepsilon}$; это решение обозначим через $U(x,\ t;\ a)$.

Легко доказать, используя 3), что при любых $j=\overline{1,n}$, $s=\overline{0,m}$, $k=$ $=\overline{s,s+1}$ зависимость $U_j^s(a_k(t),t;a)$ в метрике равномерного уклонения от a как элемента $[C^1[0,\varepsilon]]^{m+2}$ удовлетворяет условию Липшица: $\exists L\geqslant0$, $\forall a^1,\ a^2\in D_\varepsilon^h$:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}|U^s(a_k^1(t),t;\,a^1)-U^s(a_k^2(t),t;\ a^2)|\leqslant$$
$$\leqslant L\,[\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}|a^1(t)-a^2(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}|a^{1\prime}(t)-a^{2\prime}(t)|],$$

где вертикальными черточками обозначена любая из норм в $\mathbb{R}^{n+2}$ (от ее выбора зависит L).

Рассмотрим теперь на D_ε^h оператор $A:a\to Aa$, действующий по формуле

$$(Aa)_r\ (t)=\int_0^t\Big[\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{k=s}^{s+1}\gamma_{rj}^{ks}(a(\tau),\tau;a)+H_r(a(\tau),\tau)\Big]\,d\tau,$$
$$r=\overline{0,m+1},\quad t\in[0,\varepsilon].$$

Искомое решение является его неподвижной точкой. Из условия согласования 9) вытекает, что если при фиксированном h достаточно уменьшить ε, то этот оператор A отображает D_ε^h в себя и в метрике $[C^1[0,\varepsilon]]^{m+2}$ является сжимающим. Поэтому из теоремы Банаха вытекает существование и единственность неподвижной точки оператора, т. е. искомого решения, которое можно получить по методу итераций. Теорема доказана.

Замечание 1. Условия движения границ типа (4) можно задавать в более общем виде, например: $a_r'(t)=g_r(t,\ a(t),\ u\ (a(t),\ t))$, $r=\overline{0,m+1}$. В этом случае от функций g_r, кроме непрерывности по совокупности переменных, надо дополнительно требовать выполнения локального условия Липшица по переменным $a(t)$ и $u(x,\ t)$.

Замечание 2. В случае, когда F_i — линейные функции относительно u и наперед известно, что поведение функций $a_s(t)$ линейно, теорема имеет глобальный характер.

1. *Мельник З. О.* Смешанная задача с неизвестной границей для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 8.— С. 13—15.
2. *Казаков Ю. К., Морозов С. Ф.* Об определении неизвестной линии разрыва решения смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 4.— С. 443—450.
3. *Кирилич В. М.* Нелокальные задачи типа Дарбу для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1984.— 20 с.

4. *Мельник З. О., Кирилич В. М.* Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 6.— С. 721—727.
5. *Мельник З. О.* Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Диференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 2.— С. 246—253.

Львов. ун-т Получено 29.11.85