УДК 517.432

Ю. М. Березанский, В. Л. Островский,
Ю. С. Самойленко

Разложение по собственным функциям семейств коммутирующих операторов и представления коммутационных соотношений

В данной заметке спектральная теорема для семейств коммутирующих нормальных операторов [1, 2] применяется для построения так называемых коммутативных моделей операторов, удовлетворяющих определенного типа коммутационным соотношениям (см. п. 2). Полученная теорема позволяет единообразным способом построить коммутативные модели в ряде известных случаев, а также исследовать новые ситуации.

1. Напомним конструкцию разложения гильбертова пространства прямой интеграл по обобщенным собственным подпространствам [1, 2]. Пусть $A = (A_x)_{x \in X}$ — семейство произвольной мощности коммутирующих самосопряженных операторов A_x, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ и стандартно связанных с ядерным оснащением $\Phi' \supset \mathcal{H}_0 \supset \Phi$ ($\Phi = \operatorname{pr} \lim\limits_{\tau \in T} \mathcal{H}_\tau$ — ядерное пространство, плотно и непрерывно вложенное в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_\tau$ — образующие его гильбертовы пространства, Φ' — сопряженное пространство, $\forall x \in X$ Φ входит в область определения $\mathcal{D}(A_x)$ и $A_x \restriction \Phi : \Phi \to \Phi$ непрерывно).

Тогда справедливо разложение $\mathcal{H}_0$ в прямой «континуальный» интеграл

$$\mathcal{H}_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^X} \oplus\, l_2(N_{\lambda(\cdot)})\, d\rho(\lambda(\cdot)),\ (\varphi, \psi)_{\mathcal{H}_0} = \int\limits_{\mathbb{R}^X} (\tilde{\varphi}(\lambda(\cdot)), \tilde{\psi}(\lambda(\cdot)))_{l_2(N_{\lambda(\cdot)})} d\rho(\lambda(\cdot))$$
$$(\varphi, \psi \in \Phi). \qquad (1)$$

Здесь ρ — спектральная мера семейства A, определенная на σ-алгебре $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$, натянутой на цилиндрические множества из $\mathbb{R}^X$, $N_{\lambda(\cdot)} = 1, \ldots, \infty$ — кратность обобщенного собственного значения $\lambda(\cdot)$, $l_2(N_{\lambda(\cdot)})$ — пространство l_2 размерности $N_{\lambda(\cdot)}$, $\Phi \ni \varphi \mapsto \tilde{\varphi}(\lambda(\cdot)) = (\tilde{\varphi}_1(\lambda(\cdot)), \tilde{\varphi}_2(\lambda(\cdot)), \ldots) \in l_2(N_{\lambda(\cdot)})$ — преобразование Фурье по совместным обобщенным собственным векторам $\xi_\gamma(\lambda(\cdot)) \in \Phi'$, отвечающим $\lambda(\cdot)$ семейства $\tilde{A} : \varphi_\gamma(\lambda(\cdot)) = (\varphi, \xi_\gamma(\lambda(\cdot)))_{\mathcal{H}_0}$.

Если $\tau \in T$ таково, что вложение $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{H}_0$ квазиядерное, то $\xi_\gamma(\lambda(\cdot))$ лежит в соответствующем негативном пространстве $\mathcal{H}_{-\tau} \subset \Phi'$ (одном и том же для всех γ и ρ-почти всех $\lambda(\cdot)$). ρ-Почти для каждого $\lambda(\cdot)$ векторы $\tilde{\varphi}(\lambda(\cdot))$ плотны в $l_2(N_{\lambda(\cdot)})$, а Фурье-образ оператора A_x $\forall x \in X$ равен оператору умножения на функцию $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto \lambda(x)$ в прямом интеграле. Наконец, существует некоторое множество $\pi \subset \mathbb{R}^X$, входящее в обобщенный спектр $g(A)$ семейства A, такое, что в (1) $\mathbb{R}^X$ можно заменить любым $\omega \subset \mathbb{R}^X$, содержащим π (если оно неизмеримо, то нужно должным образом модифицировать меру ρ). Изложенное, справедливо и для нормальных операторов A_x, если заменить $\mathbb{R}^X$ на $\mathbb{C}^X$.

2. Опишем коммутационные соотношения, которые рассматриваются в статье. Зафиксируем взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto F(\lambda(\cdot))(\cdot)$

$\in \mathbb{R}^X$, сохраняющее σ-алгебру $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$. Тогда $\forall x \in X$ функции $\mathbb{R}^X \ni \lambda(\cdot) \mapsto F(\lambda(\cdot))(x)$, $F^{-1}(\lambda(\cdot))(x) \in \mathbb{R}^1$ измеримы относительно $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$. Пусть E — разложение единицы семейства A. Определим $\forall x \in X$ посредством спектрального интеграла самосопряженный оператор $F_x(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^X} F(\lambda(\cdot))(x) \times \times dE(\lambda(\cdot))$. Таким образом по заданному отображению F мы построили второе семейство $F(A) = (F_x(A))_{x \in X}$ коммутирующих самосопряженных операторов $F_x(A)$, действующих в $\mathcal{H}_0$ (при $F = \mathrm{id}$ $F(A) = A$). Будем предполагать, что $F(A)$ также стандартно связано с исходным ядерным оснащением $\Phi' \supset \supset \mathcal{H}_0 \supset \Phi$ (при произвольном F это, вообще говоря, не будет иметь места).

Предположим, что в $\mathcal{H}_0$ действует замкнутый оператор B, для которого Φ входит в его область определения $\mathcal{D}(B)$, является базой B и $B \restriction \Phi : \Phi \to \Phi$ непрерывно. Такие предположения будем считать выполненными для B^*. Пусть B связан с операторами A_x соотношением коммутации

$$A_x B \varphi = B F_x(A) \varphi, \quad \varphi \in \Phi; \quad x \in X. \tag{2}$$

Цель этой заметки — выяснить вид соотношения (2) в терминах преобразования Фурье, связанного с A. Такая запись (2) и называется его коммутативной моделью.

Теорема. *Предположим, что $\forall x \in X$ пространство Φ состоит из целых векторов A_x, $F_x(A)$ и 0 не является собственным значением оператора B. Тогда по B можно подобрать такое пространство $\mathcal{H}_\tau$ (вложенное в $\mathcal{H}_0$ квазиядерно), что в терминах преобразования Фурье коммутационное соотношение* (2) *эквивалентно следующему действию оператора B*:

$$(B\varphi)^\sim(\lambda(\cdot)) = \frac{d\rho(F^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho(\lambda(\cdot))} b(\lambda(\cdot), F^{-1}(\lambda(\cdot))) \tilde{\varphi}(F^{-1}(\lambda(\cdot))), \quad \varphi \in \Phi. \tag{3}$$

Здесь $\lambda(\cdot)$ изменяется по некоторому множеству из $\mathbb{R}^X$ полной меры ρ (не зависящему от φ), $b(\lambda(\cdot), F^{-1}(\lambda(\cdot)))$ — линейный оператор с плотной областью определения, действующий из пространства $l_2(N_{F^{-1}(\lambda(\cdot))})$ в $l_2(N_{\lambda(\cdot)})$ и в слабом смысле измеримо зависящий от $\lambda(\cdot)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$.

Теорема остается справедливой при замене в (1) пространства $\mathbb{R}^X$ на указанное в п. 1 множество ω, а также для операторов A_x, являющихся ограниченными нормальными и коммутирующими (в этом случае $\mathbb{R}^X$ следует заменить на $\mathbb{C}^X$).

3. Можно рассмотреть семейство $B = (B_y)_{y \in Y}$ произвольной мощности операторов в $\mathcal{H}_0$, каждый из которых удовлетворяет требованиям, налагавшимся выше на оператор B. Предположим, что семейства A и B связаны коммутационными соотношениями

$$A_x B_y \varphi = B_y F_x^y(A) \varphi, \quad \varphi \in \Phi; \qquad x \in X; \qquad y \in Y, \tag{4}$$

где $(F^y)_{y \in Y}$ — семейство взаимно однозначных сохраняющих $\mathcal{C}_\sigma(\mathbb{R}^X)$ отображений $\mathbb{R}^X$ на себя. Для семейства B можно написать представление (3) — коммутативную модель соотношений (4).

4. Изложенная схема позволяет охватить построение коммутативных моделей в ряде ситуаций. Укажем основные из них.

а). Сильно непрерывные унитарные представления T топологической группы $G = N \otimes K$ (полупрямого произведения коммутативной нормальной подгруппы N на подгруппу ее автоморфизмов K). Пусть существует ядерное оснащение, стандартно связанное с семейством $(T_g)_{g \in G}$. Тогда в спектральном представлении (1) для коммутативного семейства $(T_n)_{n \in N}$ можно перейти к интегрированию по множеству $\omega = \hat{N}$ непрерывных характеров группы N и так как $T_n T_g = T_g T_{n[g]}$, $n \in N$, $g \in G$, $n[g] = g^{-1} n g$, то удовлетворяется соотношение (4), где роль A_x играют операторы T_n, а B_g — операторы T_g ($X=N$, $Y=G$, F^y легко определяется).

Сформулированная теорема приводит к соответствующей коммутативной модели. Отметим, что операторы представления могут быть и не унитарными (например, самосопряженными), необязательна также непрерывность их зависимости от g. В ряде случаев требуемое оснащение $\Phi' \supset \mathcal{H}_0 \supset \Phi$ строится автоматически по заданному представлению. Коммутативные модели для представлений канонических коммутационных соотношений в форме Г. Вейля для систем с бесконечным числом степеней свободы приведены в работе [3], для унитарных представлений группы $SL(2, \mathbb{R})^X$ — в [4], для $S(\mathbb{R}^d) \otimes \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d)$ — в [6], для представлений ядерных нильпотентных групп токов — в [7].

б). Представления образующих C^*-алгебр. В указанную схему вкладываются классические результаты [8] о коммутативных моделях для операторов представления канонических антикоммутационных соотношений систем со счетным числом степеней свободы: $\{a_j, a_k\} = 0$, $\{a_j, a_k^*\} = \delta_{jk}\mathrm{I}$, $j, k = 1, 2, \ldots$. В порожденной $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ C^*-алгебре можно выбрать самосопряженные образующие $(z_k, x_k)_{k=1}^{\infty}$, связанные соотношениями (одномерной квантовой спиновой системы) вида (2), позволяющими для их представлений привести коммутативную модель [9]. В [10] доказывается, что в простой AK-C^*-алгебре всегда можно выбрать систему образующих, связанных соотношениями вида (2) и построить для их представлений коммутативные модели. Если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ — сепарабельные C^*-алгебры типа I, то для циклических фактор представлений C^*-алгебры $\mathfrak{A} = \mathrm{ind}\lim \mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$ можно выбрать систему образующих вида (2) и построить коммутативную модель [9]. Заметим, что во всех этих ситуациях требуемое оснащение существует автоматически.

в). Представления бесконечномерных алгебр Ли. В указанную схему вкладываются классические результаты [11] о коммутативных моделях для операторов $(P_k, Q_k)_{k=1}^{\infty}$ представления канонических коммутационных соотношений, так как операторы $N_k = \dfrac{P_k^2 + Q_k^2 - \mathrm{I}}{2}$ и $a_k = P_k - \mathrm{i}Q_k$ удовлетворяют соотношениям вида (2) $[N_k, a_k^*]\varphi = a_k^*\varphi$, $\varphi \in \Phi$; $k = 1, 2, \ldots$, и коммутативные модели для алгебр Ли счетных и ступенчатых $su(2)$-токов (см. [9]). Оснащения в этих ситуациях существуют.

Операторы $(\overset{(k)}{E}{}_{\underset{-}{0}}^{+})_{k\in\mathbb{Z}}$ представления алгебры гладких $su(2)$-токов на окружности связаны соотношениями коммутации $[E_0^{(k)}, E_0^{(j)}]\varphi = 0$, $[E_0^{(k)}, E_+^{(j)}]\varphi = E_+^{(k+j)}\varphi$, $[E_0^{(k)}, E_-^{(j)}]\varphi = -E_-^{(k+j)}\varphi$, $\varphi \in \Phi$; $k, j \in \mathbb{Z}$. Если операторы набора таковы, что на Φ имеют смысл операторы $E_+^{(\theta)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}E_+^{(k)}$, $\theta \in S^1$, то соотношения $[E_0^{(j)}, E_+^{(\theta)}]\varphi = e^{-ij\theta}E_+^{(\theta)}\varphi$ имеют вид (2) и позволяют для этих операторов строить коммутативные модели.

1. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, вып. 4.— С. 3—52.
2. *Berezanskiĭ Yu. M.* Selfadjoint operators in spaces of functions of infinitely many variables.// Providence : Amer. Math. Soc.— 1986.— **15**. — 383 p.
3. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз, 1961.— 472 с.
4. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций // Успехи мат. наук.— 1973.— **28**, вып. 5.— С. 83—128.
5. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой // Функц. анализ и его прил.— 1983.— **17**, вып. 2.— С. 70—72.
6. *Menikoff R., Sharp D. H.* Representations of a local current algebra: their dynamical determination // J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 12.— P. 2341—2360.
7. *Островский В. Л.* Аналог теоремы Нельсона для ядерных нильпотентных алгебр Ли токов // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 120—131.

8. *G˚arding N.*, *Wightman A.* Representations of the anticommutation relations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1954.— **40**, N 9.— P. 617—622.
9. *С˚амойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1984.— 232 с.
10. *Жолткевич Г. Н.* Представления простых *AK*-алгебр // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 4.— С. 9—11.
11. *G˚arding L.*, *Wightman A.* Represention‍s of the commutation relations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1954.— **40**, N 9.— P. 623—626.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 21.07.87