УДК 531.36

С. П. Сосницкий

О грубой неустойчивости равновесия автономных систем

Как известно [1], свойство неустойчивости положения равновесия в общем случае не является грубым и, следовательно, малые возмущающие силы, учет которых в исходных уравнениях движения не всегда представляется возможным, могут существенно исказить качественную картину поведения системы и тем самым сделать проблематичной достоверность заключения о характере ее движения. В этой связи интересным является выделение такого класса систем, неустойчивость равновесия которых сохраняется при достаточно малых возмущениях. Оказывается, что данным свойством наряду с другими системами обладает достаточно широкий класс систем с сохраняющейся мерой, в частности консервативных, что является далеко не очевидным фактом, так как, например, устойчивость положения равновесия для них не является грубым свойством. В рассматриваемых ниже случаях грубость свойства неустойчивости автономных систем обусловлена существованием фазовых траекторий, примыкающих к положению равновесия при $t \to -\infty$ [1, с. 102].

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = f(x), \tag{1}$$

где $f(x) \in C^1(D \subset R^n)$, $t \in R$. Пусть точка $x = 0$ является состоянием равновесия системы (1), $f(0) = 0$.

Теорема 1. *Если существуют* $\varepsilon > 0$ $(\bar{s}_\varepsilon = \{x \in R^n, \|x\| \leqslant \varepsilon\} \subset D)$, *открытое множество* $\psi \subset s_\varepsilon$ *и функция* $V(x) \in C^1 : s_\varepsilon \to R$ *такие, что*:

1) $V(x) > 0$ *на* ψ;

2) $\dot{V}(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x) > 0$ *на* $I^+ \times \psi$ $(I^+ = [t_0, \infty[)$;

3) $0 \in \partial\psi$;

4) $V(x) = 0 \ \forall x \in \partial\psi \cap s_\varepsilon$;

5) *множество* $\partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$ *не содержит целых траекторий системы* (1);

то положение равновесия $x = 0$ *неустойчиво и существует траектория* $\gamma^-(t, x^*)$, $x^* \in \bar{\psi} \cap s_\varepsilon$, *примыкающая к точке* $x = 0$ *при* $t \to -\infty$.

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы Красовского о грубой неустойчивости [1, с. 77] и с учетом условий теоремы несколько видоизменяя ее, рассмотрим последовательность принадлежащих ψ точек $\{x_0^{(k)} \neq 0\}$, сходящуюся при $k \to \infty$ к точке $x = 0$. Поскольку на основании условий 1 — 4 теоремы множество $I^+ \times \psi$ сочетает в себе свойства абсолютного сектора и абсолютного экспеллера, то все положительные полутраектории системы (1), проходящие через ψ, являются уходящими из s_ε, и, таким образом, для каждого номера $k \geqslant 1$ можно указать число $t_k > 0$ такое, что $\| x(t_k, x_0^{(k)}) \| = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, и $\| x(t, x_0^{(k)}) \| < \varepsilon_1$ при $0 \leqslant t < t_k$.

Рассмотрим последовательность точек $\{x(t_k, x_0^{(k)})\}$, принадлежащих $\partial s_{\varepsilon_1}$. Так как последовательность $\{x(t_k, x_0^{(k)})\}$ ограничена, то она имеет предельную точку x^*. Из определения последней следует, что $x^* \in \overline{\psi} \cap \partial s_{\varepsilon_1}$. Покажем, что траектория $\gamma^-(t, x^*)$ примыкает к точке $x = 0$ при $t \to -\infty$.

Почти дословно повторяя рассуждения из [1, с. 78], заключаем, что данная траектория при $t \in I^- =]-\infty, t_0]$ остается в $\overline{\psi} \cap \overline{s}_{\varepsilon_1}$ и, таким образом, множество отрицательных предельных точек $\Lambda^- \neq \varnothing$. Так как, с одной стороны, множество Λ^- инвариантно [2, с. 280], с другой — все траектории из ψ являются уходящими при $t \in I^+$, то на основании условия 5 $\Lambda^- = \{0\}$. Стало быть, траектория $\gamma^-(t, x^*)$ примыкает к точке $x = 0$ при $t \to -\infty$. Теорема доказана.

Как следует из примера [1, с. 100], в котором удобно взять $V = z^2(x^4 + y^4)$, $\psi = \{x, y, z : V > 0\}$ (при этом $dV/dt = 2z^4(x^4 + y^4)$), наличие целых траекторий на $\partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$ может повлечь негрубость свойства неустойчивости положения равновесия.

Теорема 1 обобщает теорему Н. Н. Красовского [1, с. 77], теорема 12.1, в которой вместо условий 2, 5 требуется более жесткое условие $\dot{V}(x) > 0$ на $I^+ \times \overline{\psi} \cap \overline{s}_\varepsilon \setminus \{0\}$.

К сожалению, при решении конкретной задачи не всегда удается обнаружить отсутствие целых траекторий, принадлежащих множеству $\partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$. Поэтому представляется интересным нахождение такого условия, которое бы исключало «застревание» траектории на данном множестве. В этой связи справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если существуют $\varepsilon > 0$ ($\overline{s}_\varepsilon \subset D$), открытое множество $\psi \subset s_\varepsilon$ и функция $V(x) \in C^2 : s_\varepsilon \to R$ такие, что имеют место условия 1 — 4 теоремы 1, а вместо 5 выполняется условие*

$$5')\ d^2V/dt^2 \neq 0 \quad \forall x \in \partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\},$$

то справедливо заключение теоремы 1.

Доказательство. Покажем, что если имеет место условие 5′, то условие 5 теоремы 1 также выполняется. Действительно, предположим противное. Тогда без нарушения общности полагая $d^2V/dt^2 > 0$, в результате интегрирования данного неравенства вдоль положительной полутраектории, принадлежащей $\partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$, имеем

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) > (t - t_0) \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0}.$$

Поскольку согласно исходному предположению $x(t_0) = x_0 \in \partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$ и на основании условия 2 теоремы производная dV/dt неотрицательна $\forall x \in \partial\psi \cap s_\varepsilon$, то из последнего неравенства получаем $V(x(t)) > V(x(t_0))$, что противоречит наличию целых траекторий системы (1) на множестве $\partial\psi \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть существует функция $V(x) \in C^1 : s_\varepsilon \to R$ такая, что имеют место условия теоремы Красовского о неустойчивости* [1]:

1) $\dot{V}(x) \geqslant 0$ *на* $I^+ \times s_\varepsilon$;

2) *множество* $M = \{x \in s_\varepsilon : \dot{V}(x) = 0\} \setminus \{0\}$ *не содержит целых положительных полутраекторий;*

3) $\forall \delta > 0 \ \exists \ x_0 \in s_\delta \subset s_\varepsilon$, $V(x_0) > 0$, $V(0) = 0$.

Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\{x_0^{(k)} \neq 0\}$, сходящуюся при $k \to \infty$ к точке $x = 0$ и такую, что $V(x_0^{(k)}) > 0$. Поскольку множество $I^+ \times \{x \in s_\varepsilon : V(x) > 0\}$ согласно условиям данной теоремы и

[2, с. 141, с. 147], теоремы 4.2 и 5.6, является абсолютным сектором и абсолютным экспеллером, то, применяя далее схему доказательства теоремы 1, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Следствие. *Пусть существует функция* $V(x) \in C^2 : s_\varepsilon \to R$ *такая, что выполняются условия* 1, 3 *теоремы* 3 *и, кроме того,*

2′) $d^2V/dt^2 \neq 0 \ \forall x \in M$.

Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Справедливость следствия очевидна, поскольку аналогично случаю теоремы 2 выполнение условия 2′ влечет выполнение условия 2 предыдущей теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3 *и, кроме того,* $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$. *Тогда положение равновесия* $x = 0$ *системы* (1) *неустойчиво и существуют траектории, примыкающие к точке* $x = 0$ *при* $t \to -\infty$ *и* $t \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим производную от функции $(-V)$ по векторному полю, определяемому системой (1) при $t \in I^+$. Поскольку в данном случае производная $d(-V)/dt$ неположительна $\forall x \in s_\varepsilon$, то на основании условия 2 теоремы 3 и принципа инвариантности Ла-Салля [3] (см. также [2, с. 190]) заключаем, что множество положительных предельных точек Λ^+ для траекторий системы (1), принадлежащих s_ε при $t \in I^+$, совпадает с положением равновесия $x = 0$ системы (1). Аналогично рассматривая производную от функции V по векторному полю, определяемому системой (1) при $t \in I^-$, приходим к выводу, что множество отрицательных предельных точек Λ^- для траекторий системы (1), принадлежащих s_ε при $t \in I^-$, также совпадает с точкой $x = 0$.

С другой стороны, поскольку по условию теоремы система (1) обладает инвариантным фазовым объемом, то множество траекторий, притягивающихся к точке $x = 0$ соответственно при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$, имеет нулевую меру. Следовательно, почти все решения $x(t)$ системы (1) с началом в s_ε оставляют s_ε как при $t \to \infty$, так и при $t \to -\infty$, и, стало быть, положение равновесия $x = 0$ системы (1) неустойчиво как при $t \in I^+$, так и при $t \in I^-$. Учитывая обратимость теоремы Четаева о неустойчивости, отсюда заключаем, что выполняются условия 1 — 4 теоремы 1 соответственно при $t \in I^+$ и $t \in I^-$. А поскольку $\Lambda^+ = \Lambda^- = \{0\} \ \forall x(t) \subset s_\varepsilon$, то условие 5 теоремы 1 также выполняется. Теорема доказана.

2. В качестве приложения рассмотрим натуральную систему с n степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}, \tag{2}$$

где $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}$, причем квадратичная форма $\dot{q}^T A(0)\dot{q}$ положительно определена, $T(q, \dot{q})$, $\Pi(q) \in C_q^2(D \subset R_q^n)$, $t \in R$. Пусть точка $q = \dot{q} = 0$ соответствует положению равновесия системы (2), и $\Pi(0) = 0$.

Представив уравнения (2) в виде двух гамильтоновых систем

$$dq/dt = \partial H_1/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H_1/\partial q, \tag{3}$$

$$dq/dt = \partial H_2/\partial p, \quad dp/dt = -\partial H_2/\partial q, \tag{4}$$

$$H_i = (-1)^i\left(\frac{1}{2}p^T A^{-1}p + \Pi\right) = (-1)^i h, \quad i = 1, 2, \quad h = \text{const}, \tag{5}$$

использовав для удобства одинаковые обозначения для зависимых переменных, рассмотрим соответствующие функции действия по Гамильтону

$$S_i = \int_{t_0}^{t} (p\dot{q} - H_i)\, d\tau = (-1)^i \int_{t_0}^{t}\left(\frac{1}{2}p^T A^{-1}p - \Pi\right) d\tau. \tag{6}$$

Подставляя в подынтегральные выражения равенств (6) вместо q и p величины

$$q = q(t - t_0, q_0, p_0), \quad p = p(t - t_0, q_0, p_0), \quad q_0 = q(t = t_0), \quad p_0 = p(t = t_0), \tag{7}$$

которые являются общими решениями сооответственно систем (3) и (4), и производя интегрирование, получаем

$$S_i = S_i(t - t_0, q_0, p_0). \tag{8}$$

Обращая затем соотношения (7) на множестве $R \times s_\varepsilon^*$, $s_\varepsilon^* = \{(q, p) \in D \times R^n, \|q \oplus p\| < \varepsilon\}$, что всегда возможно согласно исходным допущениям, и подставляя результат обращения в (8), находим

$$S_i = S_i(t - t_0, q, p) \in C_{tqp}^{(1,1,1)}(R \times s_\varepsilon^*). \tag{9}$$

Полагая ниже, что в положении равновесия системы (2) потенциальная энергия $\Pi(q)$ не имеет минимума, определим множества

$$\omega = \{q \in s_\varepsilon = \{q \in D, \|q\| < \varepsilon\} : \Pi(q) < 0\}, \quad \Omega_i = \{(q, p) \in s_\varepsilon^* : H_i = 0\}.$$

Замечая, что системы (3), (4) переходят одна в другую при замене p на $(-p)$, а выражения для H_i при этом не меняются, видим, что множества Ω_i в соответствии с их структурой совпадают. Поэтому далее обозначим $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$.

Лемма. *Частные производные по t от функций S_i, определяемых в расширенном фазовом пространстве соотношениями* (9), *на множестве* Ω *равны нулю.*

Доказательство. Известно [4], что каждую из функций действия S_i с помощью первой группы равенств (7) и выражений (8) при условии $\det(\partial q/\partial p_0) \neq 0$, которое вследствие независимости обобщенных координат выполняется почти всюду, локально можно выразить в форме $S_i^* = S_i^*(t - t_0, q_0, q)$. При этом S_i^* — главная функция Гамильтона удовлетворяет соответствующему уравнению Гамильтона — Якоби

$$\partial S_i^*/\partial t + H_i(q, \partial S_i^*/\partial q) = 0, \quad p = \partial S_i^*/\partial q, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Так как на множестве Ω $\partial S_i^*/\partial t = 0$, то функция S_2^* удовлетворяет (10) как при $i = 1$, так и при $i = 2$. Учитывая это и ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением движения систем (3), (4) на множестве $I^+ \times \Omega$, вычислим производные по t от функций S_2^* и S_2 по векторному полю, определяемому уравнениями (3). В результате имеем

$$\frac{dS_2^*}{dt} = \frac{\partial S_2^*}{\partial q}\dot{q} = -p^T A^{-1} p \quad \forall \ (t, q, p) \in J^+ \times s_\delta^* \subset I^+ \times \Omega \setminus \theta, \tag{11}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q} \quad \forall \ (t, q, p) \in I^+ \times \Omega, \tag{12}$$

где $J^+ =]t_1, t_2[\subset I^+$, $s_\delta^* = \{(q, p) \in \Omega, \|(q - q_0) \oplus (p - p_0)\| < \delta\}$ — соответственно некоторые достаточно малые открытый интервал и открытая на Ω окрестность (поскольку функция S_2^* определяется локально), θ — множество фокальных ($\det(\partial q/\partial p_0) = 0$) точек функции S_2^*. На основании (11), (12) получаем равенства

$$S_2^*|_{t_0}^{t} = -\int_{t_0}^{t} p^T A^{-1} p \, d\tau, \quad [t_0, t] \subset J^+, \tag{13}$$

$$S_2|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q}\right) d\tau. \tag{14}$$

С учетом того, что на решениях системы (3) $H_1 = -H_2$, представим подынтегральное выражение в (14) в виде

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_1}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_1}{\partial q} = 2\frac{\partial S_2}{\partial t} - \left(\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_2}{\partial q}\right). \tag{15}$$

Рассматривая производную по t от функции S_2 по векторному полю, определяемому уравнениями (4) на $I^+ \times \Omega$, получаем

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial S_2}{\partial p}\frac{\partial H_2}{\partial q} = p^T A^{-1} p. \tag{16}$$

Замечая, что система (4) переходит в (3) при замене p на $(-p)$, заключаем, что левая часть равенства (16) не зависит от того, является ли p решением уравнений (3) или (4). На основании (15), (16) равенство (14) представим в виде

$$S_2 \big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t}\left(2\frac{\partial S_2}{\partial t} - p^T A^{-1} p\right) d\tau. \tag{17}$$

Так как S_2 — это главная функция Гамильтона S_2^*, только «поднятая» из (t, q)-пространства в расширенное фазовое пространство, то при подстановке решения системы (3) в выражения для S_2^* и S_2 имеем $S_2^* \big|_{t_0}^{t} = S_2 \big|_{t_0}^{t}$. Вычитая (13) из (17), получаем

$$2\int_{t_0}^{t} \frac{\partial S_2}{\partial t}\, d\tau = 0, \quad [t_0, t] \subset J^+. \tag{18}$$

Поскольку равенство (18) выполняется на сколь угодно малом промежутке $[t_0, t] \subset J^+$, то согласно произволу в выборе $(t_0, q_0, p_0) \in I^+ \times \Omega \setminus \theta$ заключаем, что подынтегральное выражение в его левой части обращается в нуль почти для всех $(t, q, p) \in I^+ \times \Omega$. А так как оно непрерывно на $I^+ \times \Omega$, то $\partial S_2/\partial t = 0$ $\forall (t, q, p) \in I^+ \times \Omega$, откуда с учетом (6) следует справедливость леммы.

Определение. *Множество Ω назовем односвязным, если:* 1) *любые две его точки можно соединить спрямляемым путем* γ: $[0, 1] \to \Omega$; 2) *всякий цикл в Ω гомотопен точке.*

Теорема 5. *Пусть при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ ($D \supset \bar{s}_\varepsilon$) выполняются условия:* 1) $\omega \neq \varnothing$; 2) $\partial \Pi/\partial q \neq 0$ $\forall q \in \partial\omega \cap s_\varepsilon \setminus \{0\}$; 3) *множество Ω односвязно. Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы* (2) *неустойчиво и существуют решения, асимптотически стремящиеся к точке $q = \dot{q} = 0$ при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$.*

Доказательство. Ограничиваясь рассмотрением движения системы (2) в форме (4) на множестве Ω, предположим, что $\Lambda^+ \cap \Omega \setminus \{0, 0\} = \Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}} \neq \varnothing$ и, стало быть, непусто минимальное множество $M \subset \Lambda^+_{\Omega \setminus \{0,0\}}$ (соответствующее определение см. в [5, с. 400]). Тогда согласно теореме Биркгофа [5, с. 402] все траектории, принадлежащие M, рекуррентны и, следовательно, устойчивы по Пуассону [5, с. 363].

Рассмотрим производную по t от функции S_2 по векторному полю, определяемому системой (4). В результате имеем равенство

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial S_2}{\partial p}\dot{p} = p^T A^{-1} p,$$

которое на Ω в соответствии с леммой целесообразно представить в форме

$$d'S_2 = \frac{\partial S_2}{\partial q}\,dq + \frac{\partial S_2}{\partial p}\,dp = p^T A^{-1} p\,dt \quad \forall\,(q, p) \in \Omega, \tag{19}$$

где штрих означает, что S_2 как функция лишь фазовых переменных $(q,\ p)$ вне Ω в общем случае не определена и, следовательно, результат интегрирования равенства (19) по траекториям системы (4), принадлежащим Ω, вообще говоря, может быть неоднозначным. Покажем, что условие 3 теоремы исключает последнюю возможность.

Действительно, для любых двух спрямляемых циклов $\gamma_1,\ \gamma_2 \subset \Omega$, гомотопных в Ω, имеем

$$\int\limits_{\gamma_1} dS_2 = \int\limits_{\gamma_2} dS_2.$$

Замечая, что $dS_2 = d'S_2\ \ \forall\,(q, p) \in \Omega$ и учитывая, что согласно определению односвязности любой спрямляемый цикл, принадлежащий Ω, гомотопен точке, из (19) в результате интегрирования вдоль фиксированной положительной полутраектории $\gamma^+ \subset M \subset \Omega$ получаем

$$S_2(q(t), p(t)) - S_2(q_0, p_0) = \int\limits_{t_0}^{t} p^T A^{-1} p\,d\tau. \tag{20}$$

Так как γ^+ обладает устойчивостью по Пуассону, то существует такая последовательность $\{t_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \|(q(t_k) - q_0) \oplus (p(t_k) - p_0)\| = 0. \tag{21}$$

Заменяя в (20) t на t_k, на основании (21) заключаем, что левая часть равенства (20) при $k \to \infty$ стремится к нулю, правая же всегда, поскольку на γ^+ согласно условию 2 данной теоремы $p^T A^{-1} p \not\equiv 0$, превышает достаточно малое положительное число. В итоге приходим к противоречию.

Итак, $\Lambda^+_{\Omega\setminus\{0,0\}} = \varnothing$, что позволяет предположить следующее: 1) система (4) допускает решение, стремящееся к точке $q = p = 0$ при $t \to \infty$; 2) все решения системы (4) с началом на $\Omega \setminus \{0, 0\}$ оставляют s^*_ε при $t \to \infty$.

В первом случае в соответствии с обратимостью исходной системы (2) по отношению к t заключаем также о существовании решения, асимптотически стремящегося к точке $q = p = 0$ при $t \to -\infty$, и тем самым теорема доказана, так как неустойчивость равновесия в данной ситуации очевидна. Если же имеет место вторая возможность, то замечая, что в данном случае множество $I^+ \times \Omega$ обладает свойствами абсолютного сектора и абсолютного экспеллера и, стало быть, применима схема доказательства теоремы 1, с учетом обратимости исходной системы (2) снова заключаем о справедливости теоремы.

Теорема 5 о грубой неустойчивости равновесия натуральных систем является новым критерием обращения известной теоремы Лагранжа—Дирихле (см. обзоры [2, 6]).

З а м е ч а н и е. Для линейных систем вида (3), (4) $S_i(t - t_0, q, p) = \frac{1}{2}qp + C_i,\ C_i = \text{const}$, что проверяется дифференцированием функций S_i по векторному полю, определяемому соответствующими уравнениями.

Следовательно, в рассматриваемом случае частные производные по t от функций S_i равны нулю, независимо от значений постоянной интеграла энергии h, что позволяет данные функции использовать в качестве функций Ляпунова, по крайней мере, на движениях систем (3), (4), соответствующих неположительным значениям постоянной h.

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.— 211 с.
2. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 300 с.
3. *Lasalle J. P.* Stability theory for ordinary differential equations // J. Different. Equat.— 1968.— **4**, N 1.— P. 57—65.
4. *Парс Л.* Аналитическая динамика.— М. : Наука, 1971.— 635 с.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л. : Гостехтеоретиздат, 1949. —550 с.
6. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssatze von Lagrange — Dirichlet und Routh // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1971.— **42**, N 4.— P. 281—316.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 24.02.86,
после доработки — 26.06.86