УДК 519.41/47

Ф. Н. Лиман

О периодических группах, все разложимые pd-подгруппы которых нормальны

Разложимая pd-подгруппа некоторой группы — это подгруппа, содержащая отличные от единицы p-элементы и разложимая в прямое произведение двух нетривиальных множителей.

В настоящей статье изучаются группы, все разложимые pd-подгруппы которых нормальны для некоторого простого числа p при условии существования таких подгрупп в группе (di_p-группы).

Общая задача изучения групп с различными системами нормальных подгрупп была сформулирована С. Н. Черниковым (см., например, [1]). Поэтому результаты о di_p-группах естественно рассматривать как решения отдельных вопросов этой общей задачи С. Н. Черникова.

Наряду с описанием di_p-групп в работе устанавливаются связи между этим классом групп и группами, все разложимые подгруппы которых нормальны (di-группами из [2]); группами, все pd-подгруппы которых нормальны (pdI-группами из [3]); p-группами, все абелевы нециклические подгруппы которых нормальны ($\overline{HA}_p$-группами из [4]).

Основные результаты анонсированы в [5].

Лемма 1. *Любая полная абелева подгруппа P di_p-группы G нормальна в G.*

Доказательство. По условию di_p-группа G содержит подгруппу $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, где $|a| = p$ и $A \lhd G$. Тогда подгруппа AP абелева, поскольку каждый элемент из A имеет в AP конечное число сопряженных элементов.

Если при этом $a \notin P$, то $\langle a, P\rangle \lhd G$ и $\langle a, P\rangle^p = P \lhd G$.

Если $a \in P$ и подгруппа P неразложима, то $\langle b\rangle \cap P = 1$ и потому $\langle b, P\rangle \lhd G$ как разложимая pd-подгруппа. Если $|b| < \infty$, то $\langle b, P\rangle^{|b|} = P \lhd G$. Если $|b| = \infty$, то $P \lhd G$ как периодическая часть подгруппы $\langle b, P\rangle$.

Если $a \in P$ и подгруппа P разложима, то $P \lhd G$ по определению di_p-групп. Лемма доказана.

Следующее утверждение является простым следствием леммы 1 и определения di_p- и $\overline{HA}_p$-групп.

Теорема 1. *Любая недедекиндова локально нильпотентная периодическая di_p-группа G является $\overline{HA}_p$-группой.*

Далее будем рассматривать периодические не локально нильпотентные группы.

Лемма 2. *Если в центре периодической не локально нильпотентной di_p-группы G содержится элемент a порядка p, то G является di-группой и представима в виде полупрямого произведения $G = G_{p'} \rightthreetimes G_p$, где $G_{p'}$ — абелева группа, все подгруппы которой нормальны в G, силовская подгруппа G_p либо циклическая составного порядка, либо кватернионная 2-группа, $|Z(G)| = p^n$, $n \geqslant 1$, и $p = \min \Pi(G)$.*

Доказательство. По условию леммы центр $Z(G)$ группы G содержит элемент a порядка p. Тогда для любого элемента $x \in G$ и $(|x|, p) = 1$ имеем $\langle x, a\rangle \lhd G$ и потому $\langle x\rangle \lhd G$. Так как группа G не локально нильпотентна, то силовская p-подгруппа $G_p \not\lhd G$. Но в рассматриваемом случае это возможно лишь при условии, что p — наименьший простой делитель порядков элементов группы G, т. е. $p = \min \Pi(G)$.

Убедимся в том, что подгруппа G_p имеет единственную подгруппу $\langle a\rangle$ порядка p. Пусть $a_1 \in G_p \setminus \langle a\rangle$ и $|a_1| = p$. Тогда $\langle a, a_1\rangle \lhd G$ и потому $(G_{p'} \times \langle a_1\rangle) \lhd G$. Отсюда $\langle a_1\rangle \lhd G$ и $a_1 \in Z(G_p)$. Тогда для любого элемента $g \in G_p$ подгруппа $\langle g, a, a_1\rangle$ абелева нециклическая и потому $\langle g, a, a_1\rangle \lhd G$ и $G_p \lhd G$, что противоречит условию. Значит, G_p имеет единственную подгруппу порядка p. Поскольку группа G, очевидно, локально конечна, то это означает, что G_p либо локально циклическая группа, либо кватернионная 2-группа. По лемме 1 C_p не может быть полной подгруппой. Следовательно, G_p — либо циклическая подгруппа составного порядка, либо кватернионная (конечная или бесконечная) 2-группа. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если периодическая не локально нильпотентная di_p-группа G содержит непримарную циклическую подгруппу $\langle a\rangle$ порядка pq и центр группы G не содержит элементов порядка p, то $G = C_G(a^q)\langle b\rangle$, где все подгруппы из $C_G(a^q)$ нормальны в G и $(|b|, p) = 1$. Если при этом некоторая разложимая pd-подгруппа группы G не содержится в $C_G(a^q)$, то силовская p-группа $G_p = \langle a^q\rangle$.*

Доказательство. По условию группа G содержит нормальную циклическую подгруппу $\langle a\rangle$ порядка pq, причем $a^q \notin Z(G)$. Обозначим $C_G(a^q) = C$ и $C_G(a^p) = C_1$. Далее рассмотрим два случая.

1. $p > q$. Поскольку фактор-группа G/C_1 циклическая и ее порядок делит число $q - 1 < p$, то силовская p-подгруппа $G_p \subset C_1$. Из этого включения и условия нормальности всех разложимых pd-подгрупп в группе G следует, что все подгруппы из G_p нормальны в G и подгруппа G_p абелева. Но тогда это означает, что все подгруппы из C нормальны в G. Так как группа G по условию недедекиндова, то $G \neq C$ и $G = C\langle b\rangle$, где $(|b|, p) = 1$. Очевидно, что в этом случае $C = C_G(G_p)$.

2. $p < q$. При анализе этого случая естественно считать, что в группе G нет непримарных циклических подгрупп порядка pr, где $r < p$. Так как $a^q \notin Z(G)$, то $G \neq C$ и $p \neq \min \Pi(G)$. В частности, $p \neq 2$. При этом подгруппа C содержит силовские подгруппы группы G по всем простым числам,

большим p, силовскую p-подгруппу и не содержит ни одного элемента (кроме единицы) порядка, меньшего p. При этом все p'-подгруппы из C нормальны в G. Значит, группа G представима в виде полупрямого произведения $G = C \rtimes \langle b \rangle$, где $(|b|, p-1) = |b|$.

Покажем теперь, что подгруппа C абелева и все ее подгруппы нормальны в G. Допустим противное. Тогда подгруппа C неабелева и ее строение описано в лемме 2. Так как $p \neq 2$, то $C = C_{p'} \rtimes C_p$, где $C_p = \langle x \rangle$ — циклическая группа непростого порядка. Далее рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle c_1, b, x \rangle$, где c_1 — любой отличный от единицы элемент из $C_{p'}$, если $\langle x \rangle \lhd \langle b, x \rangle$, и $c_1 = c \in C_{p'}$, если $\langle x \rangle \ntriangleleft \langle b, x \rangle$ и $b^{-1}xb = x^k c$. Очевидно, подгруппа G_1 имеет только циклические силовские подгруппы и потому представима в виде полупрямого произведения двух циклических подгрупп взаимно простых порядков. Но тогда подгруппа $\langle x \rangle$ включается в некоторую непримарную циклическую подгруппу и потому $\langle x \rangle = G_p \lhd G$. Значит, подгруппа C абелева и все ее подгруппы нормальны в G.

Пусть теперь некоторая разложимая pd-подгруппа H группы G не содержится в подгруппе C. Покажем, что в этом случае $G_p = \langle a^q \rangle$. По условию $H = A \times B$ и хотя бы один из множителей, например A, содержит отличные от единицы p-элементы. Тогда, очевидно, $B \subset C$ и все подгруппы из B нормальны в G. Так как $H \not\subset C$, то $A \not\subset C$ и B не содержит отличных от единицы p-элементов. Отсюда следует, что силовская p-подгруппа G_p не содержит элементарной абелевой подгруппы порядка p^2. Действительно, если $G_p \supset \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ и $|a_1| = |a_2| = p$, то из условий теоремы следует $\langle a_1 \rangle \lhd G$ и $\langle a_2 \rangle \lhd G$. Так как $A \not\subset C$, то существует элемент $h \in A \setminus C$. Тогда $F = (\langle a_1, h \rangle \times B) \ntriangleleft G$, так как $[a_2, h] \in \langle a_2 \rangle \not\subset F$, что невозможно для di_p-группы G. Поскольку из условия теоремы следует, что $p \neq 2$ и группа G, очевидно, локально конечна, то это означает, что G_p — локально циклическая группа.

Пусть, как и ранее, $h \in A \setminus C$. Тогда разложимая pd-подгруппа $\langle a^q, h \rangle \times B = D \lhd G$. Поэтому $[G_p, h] \subset D \cap G_p = \langle a^q \rangle$. Но тогда в группе $G_1 = \langle G_p, h \rangle \times B$ нормальны все pd-подгруппы, так как $G_1/\langle a^q \rangle$ — дедекиндова группа. Из описания таких групп в работе [3] следует, что $G_p = \langle a^q \rangle$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Периодическая не локально нильпотентная группа G, у которой все циклические pd-подгруппы примарны, тогда и только тогда является di_p-группой, когда она группа Фробениуса и представима в виде полупрямого произведения $G = G_p \rtimes B$, в котором подгруппы G_p и B удовлетворяют следующим условиям*:

1) *подгруппа G_p либо абелева не локально циклическая, либо $G_p = (F \times \langle c \rangle) \rtimes \langle h \rangle$, где F — локально циклическая p-группа, $p \neq 1 + 2^n$, $n \geqslant 0$, $[F, c] = [F, h] = 1$, $[h, c] = a_1 \in F$, $a_1^p = c^p = h^p = 1$;*

2) *все абелевы нециклические подгруппы из G_p нормальны в G;*

3) *если подгруппа G_p не является минимальной нормальной подгруппой G, то $p \neq 2$, B — циклическая подгруппа и ее порядок делит $p-1$;*

4) *если G_p — минимальная нормальная подгруппа группы G,* то $|G_p| = p^2$.

Доказательство. Доказываем только необходимость условий теоремы, поскольку их достаточность очевидна. По условию в группе G нет циклических непримарных pd-подгрупп. Но так как G содержит разложимые pd-подгруппы, то $G \supset A = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $a^p = b^p = 1$. Далее рассмотрим два случая.

1. Подгруппа A не является минимальной нормальной подгруппой группы G. Не нарушая общности будем считать, что $\langle a \rangle \lhd G$. Тогда $C_G(a) = G_p$, $p \neq 2$ и $G \neq G_p$. Следовательно, группа G представима в виде полупрямого произведения $G = G_p \rtimes \langle x \rangle$ и является группой Фробениуса. Выясним строение ее нормального множителя G_p. Ввиду леммы 1 все абелевы нециклические подгруппы из G_p нормальны в G. Поэтому подгруппа G_p либо абелева, либо $\overline{HA}_p$-группа. Но $\overline{HA}_p$-группы при $p \neq 2$ могут быть только следующих типов [4]:

a) $H = \langle h \rangle \rightthreetimes \langle c \rangle,\ h^{p^m} = c^{p^n} = 1,\ m \geqslant 2,\ n \geqslant 1,\ [h, c] = h^{p^{m-1}}$;

b) $H = (\langle h \rangle \times \langle f \rangle) \langle c \rangle,\ h^9 = f^3 = c^9 = 1,\ [h, c] = f,\ [f, c] = c^3 = h^{-3}$;

c) $H = (F \times \langle h \rangle) \rightthreetimes \langle c \rangle$, где F — локально циклическая p-группа, $[F, h] = [F, c] = 1,\ [h, c] = a_1 \in F,\ a_1^p = h^p = c^p = 1$.

Покажем, что G_p не может быть группой типа а). Для этого используем теорему 1.5 из работы Хупперта [6]: если силовская p-подгруппа ($p \neq 2$) конечной группы G метациклическая и неабелева, то группа G имеет нетривиальную p-фактор-группу. С другой стороны, известно, что любая нормальная подгруппа конечной группы Фробениуса либо содержит ядро группы, либо сама в нем содержится. Это одначает, что G_p не может быть группой типа а).

Так как порядок подгруппы $\langle x \rangle$ делит $p - 1$, то при $p = 3$ подгруппа $\langle x \rangle$ имеет порядок 2. При этом условии ядро группы Фробениуса является абелевой подгруппой и потому G_p не может быть группой типа b).

Допустим, что G_p является группой типа с). Так как подгруппа G_p неабелева, то дополнительный множитель $\langle x \rangle$ не содержит инволюций. При этом также $p \neq 2$, так как в G все циклические pd-подгруппы примарны. Поэтому $p \neq 1 + 2^n$ для любого целого числа $n \geqslant 0$.

Заметим, что для любого простого числа $p \neq 1 + 2^n$ существует группа Фробениуса, нормальный множитель G_p которой является группой типа с). Среди этих di_p-групп будут и такие, у которых дополнительный множитель непримарный. Они не принадлежат di-группам.

2. Подгруппа A является минимальной нормальной подгруппой группы G. Тогда $C_G(A) = A$, группа G конечна и $|G_p| \leqslant p^3$. Покажем, что $G_p = A$. Допустим противное. Тогда $|G_p| = p^3$ и подгруппа G_p метациклическая неабелева, так как иначе A не будет минимальной нормальной подгруппой. По той же причине $p \neq 2$. Тогда по теореме Хупперта [6] группа G содержит такую нормальную подгруппу N, что G/N является p-группой. Следовательно, $A \subset N$, $|G/N| = p$ и $N = A \rightthreetimes C$, где C — одно из возможных дополнений подгруппы A в N. Ввиду того, что дополнения к A в N сопряжены и в группе G все циклические pd-подгруппы примарны, $G = A \rightthreetimes N_G(C)$. Из дополняемости подгруппы A в группе G следует ее дополняемость в подгруппе G_p, что невозможно. Значит, $G_p = A$ и $G = G_p \rightthreetimes B$ — группа Фробениуса. Теорема доказана.

Следствие. *Любая периодическая неразрешимая di_p-группа G конечна и является группой Фробениуса, ядро которой — минимальная нормальная элементарная абелева подгруппа порядка p^2 для некоторого простого числа p.*

1. *Черников С. Н.* Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. — 1969.— **21**, № 2.— С. 193—200.
2. *Лиман Ф. Н.* Группы, все разложимые подгруппы которых инвариантны // Там же.— 1970.— **22**, № 6.— С. 725—733.
3. *Лиман Ф. Н.* Группы с некоторыми системами инвариантных pd-подгрупп // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 100—118.
4. *Лиман Ф. Н.* Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 65—96.
5. *Лиман Ф. Н.* О периодических группах, все разложимые pd-подгруппы которых нормальны // IX Всесоюз. симпоз. по теории групп : Тез. докл.— М., 1984.— С. 33—34.
6. *Huppert B.* Gruppen mit modularer Sylow-Gruppe // Math. Z.— 1961.— **75**.— P. 140—153.

Сум. пед. ин-т

Получено 18.11.85,
после доработки — 11.04.86