УДК 519.21

М. Алмазов, Г. Л. Кулинич

Предельные теоремы для одномерных неоднородных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра

Исследуется предельное поведение решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, коэффициенты которых могут быть δ-образными последовательностями или иметь вырождения другого характера. Рассматривается приложение полученных результатов к исследованию предельного поведения решения задачи Коши параболических дифференциальных уравнений в частных производных.

Досліджується гранична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто, коефіцієнти яких можуть бути δ-видними послідовностями або мати виродження іншого характеру. Розглядається застосування одержаних результатів при дослідженні граничної поведінки розв'язку задачі Коші параболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Пусть при каждом значении параметра $\alpha > 0$ существует решение $\xi_\alpha(t)$ стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_\alpha(t) = a_\alpha(t, \xi_\alpha(t))\,dt + \sigma_\alpha(t, \xi_\alpha(t))\,dw_\alpha(t), \tag{1}$$

где $a_\alpha(t, x)$, $\sigma_\alpha(t, x)$, $t \in [0, 1]$, $x \in (-\infty, \infty)$, — такие измеримые действительные функции, что

$$a_\alpha^2(t, x) + \sigma_\alpha^2(t, x) \leqslant K_\alpha(1 + x^2)$$

и $\sigma_\alpha(t, x) \geqslant \delta_{\alpha,N} > 0$ при $|x| \leqslant N$ для любого $N > 0$, $w_\alpha(t)$ — семейство винеровских процессов, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, $\xi_\alpha(0)$ — заданная случайная величина, не зависящая от $w_\alpha(t)$. В настоящей статье при условии близости (в определенном ниже смысле) для $\alpha \to 0$ коэффициентов $a_\alpha(t, x)$, $b_\alpha(t, x)$ уравнения (1) к некоторым измеримым функциям $a_\alpha(x)$, $b_\alpha(x)$ исследуется слабая сходимость решения $\xi_\alpha(t)$ к определенному процессу.

Полученные результаты обобщают аналогичные результаты [1] на случай неоднородных уравнений и охватывают некоторые классы уравнений, в которых, в частности, допускается неограниченный рост коэффициентов $a_\alpha(t, x)$ и $\sigma_\alpha(t, x)$ как в некоторых точках x_k пространственной, так и в точках t_k временной переменных. Ранее результаты в этом направлении были получены лишь при специальной зависимости коэффициентов от параметра $\sigma_\alpha(t, x) = \sigma(t/\alpha^2, x/\alpha)$, $a_\alpha(t, x) = 1/\alpha\, a(t/\alpha^2, x/\alpha)$ [2—5].

Л е м м а. *Пусть A — ограниченное измеримое множество. Тогда при условиях теоремы 1*

$$\varlimsup_{\alpha\to 0} \int_0^1 p\{\zeta_\alpha(s) \in A\}\,ds \leqslant C\lambda(A),$$

где $\lambda(A)$ — мера Лебега множества A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Ито для процесса $Q_\alpha(\zeta_\alpha(t))$, где

$$Q_\alpha(x) = 2\int_0^x \left(\int_0^u \mathrm{X}_A(v)\,\widehat{\sigma}_\alpha^{-2}(v)\,dv\right) du,$$

получаем оценку

$$\int_0^1 \mathbf{P}\{\zeta_\alpha(s)\in A\}\,ds \leqslant \lambda(A)\,C\delta^{-2}\left\{\mathbf{M}\,|\zeta_\alpha(1)-\zeta_\alpha(0)| + \mathbf{M}\int_0^1\left(\left|\frac{a_\alpha(\xi_\alpha(s))}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))}\right| + 1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left|\frac{\Delta\sigma_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))}\right|^2 + 2\left|\frac{\Delta\sigma_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))}\right|\right)ds + \mathbf{M}\int_0^1\left|\frac{\Delta a_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))}\right|ds\right\},$$

из которой вытекает доказательство леммы.

Теорема 1. *Пусть $\xi_\alpha(t)$ — решение уравнения* (1) *и существуют такие измеримые функции $a_\alpha(x)$, $\sigma_\alpha(x)$, что*

1. *При $\alpha\to 0$*

$$\sup_x\left\{\int_0^1\left|\frac{a_\alpha(t,x)-a_\alpha(x)}{\sigma_\alpha(x)}\right|dt + \int_0^1\left|\frac{\sigma_\alpha(t,x)}{\sigma_\alpha(x)}-1\right|^2 dt + \right.$$

$$\left.+\left|\frac{a_\alpha(x)}{\sigma_\alpha(x)}\right|\int_0^1\left[\left|\frac{\sigma_\alpha(t,x)}{\sigma_\alpha(x)}-1\right| + \left|\frac{\sigma_\alpha(t,x)}{\sigma_\alpha(x)}-1\right|^2\right]dt\right\}\to 0;$$

2. *При некотором семействе постоянных $c_\alpha^{(1)}$, $c_\alpha^{(2)}$ $0<\delta\leqslant f_\alpha(x)\times\times\sigma_\alpha(x)\leqslant C$, где*

$$f_\alpha(x) = c_\alpha^{(1)}\int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u a_\alpha(v)\,\sigma_\alpha^{-2}(v)\,dv\right\}du + c_\alpha^{(2)};$$

3. $\lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{\alpha\to 0}\mathbf{P}\{|f_\alpha(\xi_\alpha(0))|>N\}=0.$

Тогда семейство случайных процессов $f_\alpha(\xi_\alpha(t))$ слабо компактно и его предельные точки $\zeta(t)$ являются решениями стохастических дифференциальных уравнений $d\zeta(t)=[G'(\zeta(t))]^{-1/2}\,dw(t)$, где $G'(x)$ — производная функции $G(x)$, которая является предельной точкой семейства функций

$$G_\alpha(x) = \int_0^x [f'_\alpha(\varphi_\alpha(u))\,\sigma_\alpha(\varphi_\alpha(u))]^{-2}\,du,$$

$\varphi_\alpha(x)$ — функция, обратная к функции $f_\alpha(x)$.

Доказательство. Обозначим $\zeta_\alpha(t)=f_\alpha(\xi_\alpha(t))$. К этому процессу можно применить формулу Ито [6], на основании которой получим

$$\zeta_\alpha(t) = \zeta_\alpha(0) + \gamma_\alpha(t) + \sum_{k=1}^{3} I_\alpha^{(k)}(t), \tag{2}$$

где

$$\gamma_\alpha(t) = \int_0^t \hat{\sigma}_\alpha(\zeta_\alpha(s))\,dw_\alpha(s), \quad \hat{\sigma}_\alpha(x) = f'_\alpha(\varphi_\alpha(x))\,\sigma_\alpha(\varphi_\alpha(x)),$$

$$I_\alpha^{(1)}(t) = \int_0^t f'_\alpha(\xi_\alpha(s))\,\Delta a_\alpha(s)\,ds, \quad \Delta a_\alpha(s) = a_\alpha(s,\xi_\alpha(s)) - a_\alpha(\xi_\alpha(s)),$$

$$I_\sigma^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t f''_\alpha(\xi_\alpha(s))\,\Delta\sigma_\alpha^2(s)\,ds, \quad \Delta\sigma_\alpha^2(s) = \sigma_\alpha^2(s,\xi_\alpha(s)) - \sigma_\alpha^2(\xi_\alpha(s)),$$

$$I_\alpha^{(3)}(t) = \int_0^t f'_\alpha(\xi_\alpha(s))\,\Delta\sigma_\alpha(s)\,dw_\alpha(s), \quad \Delta\sigma_\alpha(s) = \sigma_\alpha(s,\xi_\alpha(s)) - \sigma_\alpha(\xi_\alpha(s)).$$

Так как $\sup_t |I_\alpha^{(1)}(t)| \leqslant C \int_0^1 \left| \frac{\Delta a_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))} \right| ds,$

$$\sup_t |I_\alpha^{(2)}(t)| \leqslant C \int_0^1 \left| \frac{a_\alpha(\xi_\alpha(s))}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))} \right| \left[\left| \frac{\Delta\sigma_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))} \right|^2 + 2 \left| \frac{\Delta\sigma_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))} \right| \right] ds,$$

$$\mathbf{M} \sup_t |I_\alpha^{(3)}(t)|^2 \leqslant C\, \mathbf{M} \int_0^1 \left| \frac{\Delta\sigma_\alpha(s)}{\sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))} \right|^2 ds,$$

то

$$\mathbf{M} \sup_t |I_\alpha^{(k)}(t)|^2 \to 0, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{3}$$

при $\alpha \to 0$. Семейство монотонных функций $G_\alpha(x)$ слабо компактно. Поэтому для любой последовательности $\alpha_n'' \to 0$ существуют подпоследовательность $\alpha_n' \to 0$ и функция $G(x)$ такие, что $G_{\alpha_n'}(x) \to G(x)$ в каждой точке x, почти везде существует производная $G'(x)$ и $0 < C^{-2} \leqslant G'(x) \leqslant \delta^{-2}$. Введем процесс

$$\eta_{\alpha_n'}(t) = \int_0^t [G'(\zeta_{\alpha_n'}(s))]^{1/2}\, d\gamma_{\alpha_n'}(s). \tag{4}$$

Учитывая (3) и ограниченность функции $\hat\sigma_\alpha(x)$, легко показать

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{\alpha_n' \to 0} \sup_t \mathbf{P}\{|\zeta_{\alpha_n'}(t)| > N\} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \lim_{\alpha_n' \to 0} \sup_{|t_2 - t_1| \leqslant h} \mathbf{P}\{|\zeta_{\alpha_n'}(t_2) - \zeta_{\alpha_n'}(t_1)| > \varepsilon\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Аналогичные соотношения выполняются и для процессов $(\eta_{\alpha_n'}(t), \gamma_{\alpha_n'}(t), w_{\alpha_n'}(t))$. Следовательно, существуют [7] подпоследовательность $\alpha_n \to 0$ последовательности α_n', вероятностное пространство $(\tilde\Omega, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{P}})$ и случайные процессы $(\tilde\zeta_{\alpha_n}(t), \tilde\eta_{\alpha_n}(t), \tilde\gamma_{\alpha_n}(t), \tilde w_{\alpha_n}(t))$ на этом вероятностном пространстве такие, что конечномерные распределения процессов $(\tilde\zeta_{\alpha_n}(t), \tilde\eta_{\alpha_n}(t), \tilde\gamma_{\alpha_n}(t), \tilde w_{\alpha_n}(t))$ совпадают с соответствующими конечномерными распределениями процессов $(\zeta_{\alpha_n}(t), \eta_{\alpha_n}(t), \gamma_{\alpha_n}(t), w_{\alpha_n}(t))$ и $\tilde\zeta_{\alpha_n}(t) \to \tilde\zeta(t)$, $\tilde\eta_{\alpha_n}(t) \to \tilde\eta(t)$, $\tilde\gamma_{\alpha_n}(t) \to \tilde\gamma(t)$ для всех $t \geqslant 0$ по вероятности при $\alpha_n \to 0$. Путем сглаживания функций $\hat\sigma_{\alpha_n}(x)$ и $G'(x)$ [6, § 6, гл. 11] нетрудно показать, что для процессов $(\tilde\zeta_{\alpha_n}(t), \tilde\eta_{\alpha_n}(t), \tilde\gamma_{\alpha_n}(t), \tilde w_{\alpha_n}(t))$ имеют место соотношения, аналогичные соотношениям (2) — (4). Следовательно, для последовательности $\alpha_n' \to 0$ можно подобрать подпоследовательность $\alpha_n \to 0$, для которой будем считать, что $\zeta_{\alpha_n}(t) \to \zeta(t)$, $\gamma_{\alpha_n}(t) \to \gamma(t)$, $\eta_{\alpha_n}(t) \to \eta(t)$ по вероятности при $\alpha_n \to 0$, где $\zeta(t)$, $\gamma(t)$, $\eta(t)$ — некоторые случайные процессы. В данном случае в силу (2), (3)

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \gamma(t). \tag{5}$$

Покажем, что характеристика $\langle \eta_{\alpha_n}(t) \rangle$ семейства мартингалов $\eta_\alpha(t)$, сходится к t при $\alpha_n \to 0$. Для этого введем функции

$$\Phi_{\alpha_n}(x) = 2 \int_0^x [G(u) - G_{\alpha_n}(u)]\, du. \tag{6}$$

Учитывая (2) и формулу Ито, получаем

$$\langle \eta_{\alpha_n}(t)\rangle - t = \Phi_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(t)) - \Phi_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(0)) - \sum_{k=1}^{5} E_{\alpha_n}^{(k)}(t),$$

где

$$E_{\alpha_n}^{(k)}(t) = \int_0^t \Phi'_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(s))\, dI_{\alpha_n}^{(k)}(s), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$E_{\alpha_n}^{(4)}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(s))\, f'_{\alpha_n}(\varphi_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(s)))\, \Delta\sigma^2_{\alpha_n}(s)\, ds,$$

$$E_{\alpha_n}^{(5)}(t) = \int_0^t \Phi'_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(s))\, \hat{\sigma}_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(s))\, dw_{\alpha_n}(s).$$

На основании того, что $|\Phi'_{\alpha_n}(x)| \leqslant C|x|$, $|\Phi''_{\alpha_n}(x)| \leqslant C$ для произвольн $\varepsilon > 0$, $N > 0$ имеют место оценки

$$\mathbf{P}\{\sup_t |E_{\alpha_n}^{(1)}(t)| > \varepsilon\} \leqslant P_N + (2/\varepsilon) NC\, \mathbf{M}\int_0^1 \left| \frac{\Delta a_{\alpha_n}(s)}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right| ds,$$

$$\mathbf{P}\{\sup_t |E_{\alpha_n}^{(2)}(t)| > \varepsilon\} \leqslant P_N + (2/\varepsilon) NC\, \mathbf{M}\int_0^1 \left| \frac{a_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right| \times$$

$$\times \left[\left| \frac{\Delta\sigma_{\alpha_n}(s)}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right|^2 + 2 \left| \frac{\Delta\sigma_{\alpha_n}(s)}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right| \right] ds,$$

$$\mathbf{P}\{\sup_t |E_{\alpha_n}^{(3)}(t)| > \varepsilon\} \leqslant P_N + (2/\varepsilon)^2 N^2 C\mathbf{M} \int_0^1 \left| \frac{\Delta\sigma_{\alpha_n}(s)}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right|^2 ds,$$

$$|E_{\alpha_n}^{(4)}(t)| \leqslant C \int_0^1 \left(\left| \frac{\Delta\sigma_{\alpha_n}(s)}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right|^2 + 2 \left| \frac{\Delta\sigma_{\alpha_n}(s)}{\sigma_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))} \right| \right) ds,$$

$$\mathbf{P}\{\sup_t |E_{\alpha_n}^{(5)}(t)| > \varepsilon\} \leqslant P_N + \mathbf{P}\{\sup_t |\zeta(t)| > N\} +$$

$$+ (2/\varepsilon)^2 N^2 C \left\{ \mathbf{M}\int_0^1 (|\zeta_{\alpha_n}(s) - \zeta(s)|^2\, \mathrm{X}_{|\zeta_{\alpha_n}(s)| \leqslant N} \mathrm{X}_{|\zeta(s)| \leqslant N} + \right.$$

$$\left. + [\Phi'_{\alpha_n}(\zeta(s))]^2\, \mathrm{X}_{|\xi(s)| \leqslant N})\, ds \right\},$$

где $P_N = \mathbf{P}\{\sup_t |\zeta_{\alpha_n}(t)| > N\}$, кроме того,

$$|\Phi_{\alpha_n}(x)|\, \mathrm{X}_{|x| \leqslant N} \leqslant 2\int_{-N}^{N} |G(u) - G_{\alpha_n}(u)|\, du \to 0$$

при $\alpha_n \to 0$. Из соотношений (2), (3) и ограниченности $\hat{\sigma}_\alpha(x)$ легко пол чить

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\alpha_n \to 0}} P_N = 0.$$

В силу этого и того, что $\zeta_{\alpha_n}(t) \to \zeta(t)$ по вероятности, $\Phi'_{\alpha_n}(x) \to 0$ п $\alpha_n \to 0$, из предыдущих оценок получаем

$$\sup_t |E_{\alpha_n}^{(k)}(t)| \to 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5,$$

по вероятности при $\alpha_n \to 0$. Следовательно,

$$\langle \eta_{\alpha_n}(t) \rangle \to t \tag{7}$$

по вероятности при $\alpha_n \to 0$. Поэтому предельный процесс $\eta(t)$ для последовательности $\eta_{\alpha_n}(t)$ является винеровским процессом, который обозначим через $\hat{w}(t)$.

Для дальнейшего доказательства используем приведенную выше лемму. Для любых $\varepsilon > 0$, $N > 0$ в области $|x| \leqslant N$ существует измеримое множество A_ε и непрерывная функция $\hat{G}'(x)$ такие, что $\lambda(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, $\hat{G}'(x) = G'(x)$ при $x \bar{\in} A_\varepsilon$ [8]. Используя этот факт, в стохастическом интервале соотношения (4) нетрудно обосновать предельный переход при $\alpha_n \to 0$ под знаком интеграла. Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (4) при $\alpha_n \to 0$, учитывая при этом равенство (5), получаем

$$\hat{w}(t) = \int_0^t [G'(\zeta(s)]^{1/2}\, d\zeta(s).$$

Отсюда

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t [G'(\zeta(s))]^{-1/2}\, d\hat{w}(s). \tag{8}$$

Из слабой единственности решения уравнения (8) [9], произвольности последовательности $\alpha_n'' \to 0$ имеем сходимость конечномерных распределений процесса $\xi_\alpha(t)$ при $\alpha \to 0$ к соответствующим конечномерным распределениям решения $\zeta(t)$ уравнения (8). Учитывая соотношения (2) и (3), легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, \mathbf{P}\{\sup_{|t_2-t_1|\leqslant h} |\zeta_\alpha(t_2) - \zeta_\alpha(t_1)| > \varepsilon\} = 0. \tag{9}$$

Поэтому [10] процесс $\zeta_\alpha(t)$ слабо сходится при $\alpha \to 0$ к решению $\zeta(t)$ уравнения (8).

Теорема 2. *Пусть $\xi_\alpha(t)$ — решение уравнения* (1) *и выполняются условия* 1 *и* 2 *теоремы* 1. *Если при* $\alpha \to 0$

1) $G_\alpha(x) \to G(x)$, $f_\alpha(x) \to f(x)$ *в каждой точке* x, *где* $f(x)$ — *непрерывная монотонная функция;*

2) $0 < \delta \leqslant f'_\alpha(x) \leqslant C$;

3) *распределение случайной величины* $\xi_\alpha(0)$ *сходится к распределению случайной величины* $\xi(0)$, *то случайный процесс* $\xi_\alpha(t)$ *слабо сходится при* $\alpha \to 0$ *к процессу* $\varphi(\zeta(t))$, *где* $\varphi(x)$ — *функция, обратная к* $f(x)$, $\zeta(t)$ — *решение уравнения* (8) *при* $\zeta(0) = f(\xi(0))$.

Доказательство. На основании теоремы 1 процесс $\zeta_\alpha(t) = f_\alpha(\xi_\alpha(t))$ слабо сходится при $\alpha \to 0$ к решению $\zeta(t)$ уравнения (8). Более того, из доказательства теоремы 1 вытекает, что $\zeta_{\alpha_n}(t) \to \zeta(t)$ по вероятности при $\alpha_n \to 0$. Из неравенства

$$|x - \varphi_\alpha(f(x))| \leqslant \delta^{-1}\, |f_\alpha(x) - f(x)|$$

следует сходимость $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, и сходимость $\xi_{\alpha_n}(t) \to \varphi(\zeta(t))$ по вероятности при $\alpha_n \to 0$.

Так как $|\xi_\alpha(t_2) - \xi_\alpha(t_1)| \leqslant \delta^{-1}\, |\zeta_\alpha(t_2) - \zeta_\alpha(t_1)|$, то для процесса $\xi_\alpha(t)$ выполняется соотношение, аналогичное соотношению (9). Следовательно, имеет место слабая сходимость при $\alpha \to 0$ процесса $\xi_\alpha(t)$ к процессу $\varphi(\zeta(t))$.

Теорема 3. *Пусть $\xi_\alpha(t)$ — решение уравнения* (1), $\mathbf{M}\xi_\alpha^2(0) \leqslant C$ *и существуют такие измеримые функции* $a_0(x)$, $\sigma_\alpha(x)$ *и* $G(x)$, *что*

1) $|a_0(x)| \leqslant C,\ 0 < \delta \leqslant \sigma_\alpha(x) \leqslant C,$

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_x \left(\int_0^1 |a_\alpha(s, x) - a_0(x)|\, ds + \int_0^1 |\sigma_\alpha(s, x) - \sigma_\alpha(x)|^k\, ds \right) = 0, \quad k = 1, 2;$$

2) $\int_0^x \sigma_\alpha^{-2}(u)\, du \to G(x)$ *в каждой точке* x *при* $\alpha \to 0$;

3) *распределение случайной величины* $\xi_\alpha(0)$ *сходится при* $\alpha \to 0$ *к распределению случайной величины* $\xi(0)$.

Тогда случайный процесс $\xi_\alpha(t)$ *слабо сходится при* $\alpha \to 0$ *к решению* $\xi(t)$ *стохастического уравнения*

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a_0(\xi(s))\, ds + \int_0^t [G'(\xi(s))]^{-1/2}\, dw(s). \tag{10}$$

Доказательство. Уравнение (1) можно представить в виде

$$\xi_\alpha(t) = \xi(0) + \int_0^t a_0(\xi_\alpha(s)\, ds + \gamma_\alpha(t) + o(1),$$

где $o(1)$ — величина, для которой $\mathbf{M}\sup_t |o(1)|^2 \to 0$ при $\alpha \to 0$,

$$\gamma_\alpha(t) = \int_0^t \sigma_\alpha(\xi_\alpha(s))\, dw_\alpha(s).$$

Далее, рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получаем доказательство теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $\xi_\alpha(t)$ — *решение уравнения* (1), *в котором* $0 < \delta \leqslant \sigma_\alpha(t, x) \leqslant C$, $M\xi_\alpha^2(0) \leqslant C$, *и существуют такие измеримые функции* $a_0(x)$, $\sigma_\alpha(x)$, $G(x)$, *что*

1) $|a_0(x)| \leqslant C,\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \sup\limits_x \int_0^1 |a_\alpha(s, x) - a_0(x)|\, ds = 0;$

2) $\sup\limits_x \left| \int_0^t [\sigma_\alpha^2(s, x)\, \sigma_\alpha^{-2}(x) - 1]\, ds \right| = 0$

для каждого $t \geqslant 0$ *при* $\alpha \to 0$ *и выполняются условия* 2 *и* 3 *теоремы* 3.

Тогда случайный процесс $\xi_\alpha(t)$ *слабо сходится при* $\alpha \to 0$ *к решению* $\xi(t)$ *уравнения* (10).

Доказательство этой теоремы нетрудно получить аналогично доказательству теоремы 3, с тем лишь отличием, что процесс $\gamma_\alpha(t)$ берется в виде

$$\gamma_\alpha(t) = \int_0^t \sigma_\alpha(s, \xi_\alpha(s))\, dw_\alpha(s),$$

и для доказательства аналога соотношения (7) используется соотношение

$$\langle \eta_{\alpha_n}(t) \rangle - t = \Phi_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(t)) - \Phi_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(0)) -$$

$$- \int_0^t \Phi'_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))\, a_0(\xi_{\alpha_n}(s))\, ds - \int_0^t \Phi'_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))\, \Delta a_{\alpha_n}(s)\, ds -$$

$$- \int_0^t \Phi'_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))\, \sigma_{\alpha_n}(s, \xi_{\alpha_n}(s))\, dw_{\alpha_n}(s) + \int_0^t [\sigma_{\alpha_n}^2(s, \xi_{\alpha_n}(s))\, \sigma_{\alpha_n}^{-2}(\xi_{\alpha_n}(s)) - 1]\, ds,$$

где функция $\Phi_{\alpha_n}(x)$ вида (6) с

$$G_\alpha(x) = \int_0^x \sigma_\alpha^{-2}(u)\, du.$$

Теорема 5. *Пусть* $\xi_\alpha(t)$ — *решение уравнения* (1), *в котором*

$$|a_\alpha(t, x)| \leqslant C, \quad 0 < \delta \leqslant \sigma_\alpha(t, x) \leqslant C, \quad \mathbf{M}\xi_\alpha^2(0) \leqslant C,$$

и существуют такие измеримые функции $a_0(x)$, $\sigma_\alpha(x)$, $G(x)$, *что*

$$\sup_x \left| \int_0^t [a_\alpha(s, x) - a_0(x)] \, ds \right| \to 0,$$

$$\sup_x \left| \int_0^t [\sigma_\alpha^2(s, x)\sigma_\alpha^{-2}(x) - 1] \, ds \right| \to 0$$

в каждой точке $t \geqslant 0$ *при* $\alpha \to 0$ *и выполняются условия* 2 *и* 3 *теоремы* 3.

Тогда случайный процесс $\xi_\alpha(t)$ *слабо сходится при* $\alpha \to 0$ *к решению* $\xi(t)$ *уравнения* (10).

Доказательство этой теоремы можно получить аналогично доказательству теоремы 4 с тем лишь отличием, что при доказательстве для процесса $\xi_\alpha(t)$ аналога леммы используются оценки Н. В. Крылова (гл. 11, теорема 4, [6]) для стохастических интегралов, справедливость которых вытекает из равномерной ограниченности коэффициентов $a_\alpha(t, x)$, $\sigma_\alpha(t, x)$ и неравенства $\sigma_\alpha(t, x) \geqslant \delta > 0$.

Заметим, что теорема 5 является существенным обобщением аналогичного результата работы [11], в которой $\sigma_\alpha(x) = \sigma_0(x)$ и рассматривается среднеквадратическая сходимость. В частности, из этой теоремы вытекает объединение временного и пространственного усреднения для коэффициента диффузии.

Далее, рассмотрим приложения полученных результатов о предельном поведении решения $\xi_\alpha(t)$ к асимптотическому поведению решения $u_\alpha(t, x)$ задачи Коши параболического дифференциального уравнения

$$-\partial u_\alpha(t, x)/\partial t = a_\alpha(t, x)(\partial u_\alpha(t, x)/\partial x) + \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2(t, x)(\partial^2 u_\alpha(t, x)/\partial x^2),$$

$$t < s, \quad u_\alpha(s, x) = g(x). \tag{11}$$

Теорема 6. *Пусть функции* $a_\alpha(t, x)$, $\sigma_\alpha(t, x)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные по* x *до второго порядка включительно. Пусть, кроме того, для этих функций выполняются условия теоремы* 2. *Тогда решение задачи Коши* (11), *где функция* $g(x)$ *непрерывна и имеет ограниченные непрерывные производные, сходится при* $\alpha \to 0$ *к функции*

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\rho(s - t, f(x), f(y)) f'(y) \, dy,$$

где $\rho(t, x, y)$—*переходная плотность процесса* $\zeta(t)$—*решения уравнения* (8).

Доказательство. Пусть $\xi^{t,x}(s)$ — решение уравнения

$$\xi_\alpha^{t,x}(s) = x + \int_t^s a_\alpha(v, \xi_\alpha^{t,x}(v)) \, dv + \int_t^s \sigma_\alpha(v, \xi_\alpha^{t,x}(v)) \, dw_\alpha(v).$$

Тогда [10]

$$u_\alpha(t, x) = \mathbf{M}\, g(\xi_\alpha^{t,x}(s)).$$

Из доказательства теоремы 2 имеем, что процесс $\xi_\alpha^{t,x}(s)$ слабо сходится к процессу $\varphi(\zeta^{t,f(x)}(s))$, где

$$\zeta^{t,f(x)}(s) = f(x) + \int_t^s [G'(\zeta^{t,f(x)}(v))]^{-1/2} \, dw(v).$$

Поэтому

$$u_\alpha(t, x) \to \mathbf{M}\, g(\varphi(\zeta^{t,f(x)}(s))) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\rho(s - t, f(x), f(y)) f'(y) \, dy.$$

Теорема 7. *Если в предположениях теоремы 6 функции* $a_\alpha(t, x)$, $\sigma_\alpha(t, x)$ *вместо условий теоремы 2 удовлетворяют условиям теоремы 3, или 4, или 5, то решение* $u_\alpha(t, x)$ *задачи Коши уравнения* (11) *сходится при* $\alpha \to 0$ *к функции*

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\rho(s-t, x, y)\,dy,$$

где $\rho(t, x, y)$ — *переходная плотность решения* $\xi(t)$ *уравнения* (10).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

Замечание. Если в теореме 7 функции $a_0(x)$, $[G(x)]^{-1}$ дважды непрерывно дифференцируемы, то $u_\alpha(t, x)$ сходится к решению $u(t, x)$ уравнения

$$-\partial u(t, x)/\partial t = a_0(x)(\partial u(t, x)/\partial x) + \frac{1}{2}[G'(x)]^{-1}(\partial^2 u(t, x)/\partial x^2),$$

$$t < s, \ u(s, x) = g(x).$$

Действительно [10], в этом случае $u(t, x) = \mathbf{M}(g(\xi(s))/\xi(t) = x)$, где $\xi(t)$ — решение уравнения (10).

Примеры. 1. Пусть

$$\sigma_\alpha(t, x) = \sigma_\alpha(x) = \left[3 - \frac{(x-1)^2\alpha^{-1}}{1+(x-1)^2\alpha^{-1}}\sin\ln\sqrt{1+(x-1)^2\alpha^{-1}} + \right.$$

$$\left. + \cos\ln\sqrt{1+(x-1)^2\alpha^{-1}}\ \right]^{-1},$$

$$a_\alpha(t, x) = \frac{1}{2}\sigma'_\alpha(x)\sigma_\alpha(x) + \alpha^{-1/2}[1+t^2\alpha^{-2}]^{-1}\sin(x-1)\alpha^{-1}, \qquad \xi(0) = 1.$$

Тогда

$$a_\alpha(x) = \frac{1}{2}\sigma'_\alpha(x)\sigma_\alpha(x), \qquad c_\alpha^{(1)} = \sigma_\alpha^{-1}(0), \qquad c_\alpha^{(2)} = -(3+\cos\ln\sqrt{1+\alpha^{-1}}),$$

имеет место равенство $f'_\alpha(x)\sigma_\alpha(x) = 1$.

На основании теоремы 1 процесс

$$(\xi_\alpha(t)-1)(3+\cos\ln\sqrt{1+(\xi_\alpha(t)-1)^2\alpha^{-1}})$$

слабо сходится при $\alpha \to 0$ к винеровскому процессу $w(t)$.

2. Пусть $\sigma_\alpha(t, x) = 1$, $\xi_\alpha(0) = 0$,

$$a_\alpha(t, x) = \alpha^{-1}\sin(x-1)\alpha^{-1} + \alpha^{-1/2}[1+(t-1/2)^2\alpha^{-2}]^{-1}\sin x\alpha^{-1}.$$

Тогда при $a_\alpha(x) = \alpha^{-1}\sin(x-1)\alpha^{-1}$, $c_\alpha^{(1)} = \exp\{2\cos\alpha^{-1}\}$, $c_\alpha^{(2)} = 0$ выполняются условия теоремы 2 и можно заключить, что процесс $\xi_\alpha(t)$ слабо сходится к процессу $2\pi b_0^{-1}w(t)$, где

$$b_0 = \int_0^{2\pi}\exp\{-2\cos x\}\,dx.$$

3. Пусть $a_\alpha(t, x) = \sin x\sin^2 t\alpha^{-1}$, $\sigma_\alpha(t, x) = 2+\exp\{\sin(x-1)\alpha^{-1}\} + \sin^2 t\alpha^{-1}$, $\xi_\alpha(0) = 0$.

Тогда выполняются условия теоремы 5 при $a_0(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $G'(x) = 2\pi c_0^{-1}$, где

$$c_0 = \int_0^{2\pi}[5/4+\exp\{\sin x\}]^{-1}\,dx.$$

1. *Кулинич Г. Л.* О необходимых и достаточных условиях сходимости решений одномерных стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра // Теория вероятностей и ее применения.— 1982.— **27**, вып. 4.— С. 795—801.

2. *Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении распределения решения стохастического неоднородного диффузионного решения // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1971.— Вып. 4.— С. 95—102.
3. *Кулинич Г. Л.* О сходимости решения одномерного стохастического диффузионного уравнения к бесселевскому диффузионному процессу // Аналитические методы исследований в теории вероятностей.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 106—113.
4. *Кулинич Г. Л.* О предельном поведении решений стохастических дифференциальных уравнений диффузионного типа со случайными коэффициентами // Предельные теоремы для случайн. процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977.— С. 137—151.
5. *Алмазов М., Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении неустойчивого решения стохастического неоднородного диффузионного уравнения // Теория случайн. процессов.— 1987.— Вып. 15.— С. 3—10.
6. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М. : Наука, 1977.— 400 с.
7. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1961.— 216 с.
8. *Натансон И. П.* Теория функций вещественного переменного.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
9. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— **24**, вып. 2.— С. 348—360.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1965.— 656 с.
11. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зимняя шк. по теории вероятностей и мат. статистике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1964.— С. 42—85.

Киев. ун-т

Получено 07.07.88