УДК 517.986.2

О. В. ЛОПУШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов)

Непрерывные полугруппы в локально выпуклых алгебрах

Изучаются условия непрерывности однопараметрических полугрупп в локально выпуклых алгебрах общего вида.

Вивчаються умови неперервності однопараметричних півгруп в локально опуклих алгебрах загального вигляду.

В настоящей работе известная теорема об условиях непрерывности однопараметрических полугрупп ограниченных линейных операторов банавых пространств (см., например, [1], гл. 9, п. 1) распространяется на более общий случай — полугрупп элементов ненормируемых локально выпуклых алгебр. Отмечается дифференцируемость непрерывных полугрупп, обладающих в алгебре слабым генератором. Результаты применяются при изучении полугрупп в сверточных алгебрах распределений Шварца, в алгебрах неограниченных операторов.

Локально выпуклой алгеброй (ЛВА) называем алгебру с единицей $\mathbf{1}$, заданную над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, являющуюся хаусдорфовым локально выпуклым пространством с раздельно непрерывным умножением элементов. Произвольную ЛВА обозначим через $\mathcal{A}$, топологически сопряженное к $\mathcal{A}$ пространство — через $\mathcal{A}'$. (В работе используем стандартные обозначения и понятия из [2, 3].) Полугруппой (однопараметрической) в $\mathcal{A}$ называется функция $x(t):[0, \infty) \to \mathcal{A}$, удовлетворяющая уравнению $x(t+s) = x(t)\cdot x(s)$ и условию $x(0) = \mathbf{1}$.

Теорема 1. *Если умножение в ЛВА $\mathcal{A}$ ограничено, то каждая полугруппа $x(t)$ в $\mathcal{A}$, удовлетворяющая в слабой топологии $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ условию $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = \mathbf{1}$, непрерывна.*

Доказательство. Операция умножения в $\mathcal{A}$ также слабо непрерывна, поэтому $x(t_0) = \lim\limits_{t\to+t_0} x(t) = \lim\limits_{t-t_0\to+0} x(t-t_0)\,x(t_0)$ в топологии $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$, т. е. во всех точках $t_0 \geqslant 0$ функция $x(t)$ слабо непрерывна справа. Тогда для любого $\varphi \in \mathcal{A}$ и вещественного числа α множество $\{t \geqslant 0 : \alpha > \mathrm{Re}\langle x(t), \varphi\rangle\}$ представимо в виде счетного объединения интервалов с положительными длинами. Следовательно, для любого $\varphi \in \mathcal{A}'$ функция $\langle x(t), \varphi\rangle$ интегрируема на компактах из $[0, \infty)$. Кроме того, в силу слабой непрерывности справа полугруппа $x(t)$ ограничена в окрестности нуля. Поэтому $x(t)$ ограничена на компактах из $[0, \infty)$.

Пусть $\widetilde{S}[\alpha, \beta]$ — слабое пополнение выпуклой уравновешенной оболочки $S[\alpha, \beta]$ множества $\{x(t): t \in [\alpha, \beta]\}$, где $\alpha, \beta \geqslant 0$. Поскольку $S[\alpha, \beta]$ ограничено, то $\widetilde{S}[\alpha, \beta]$ содержится во втором сильном сопряженном пространстве $\mathcal{A}''$ к алгебре $\mathcal{A}$ (см. [2], п. 8.3.1). Образуем векторное пространство $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]} = \{\lambda \widetilde{S}[\alpha, \beta]: \lambda \in \mathbb{C}\}$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]} = \inf\{\lambda : x \in \lambda \widetilde{S}[\alpha, \beta]\}$. Ввиду непрерывности вложения $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]} \subset [\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]$ и компактности $\widetilde{S}[\alpha, \beta]$ в $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]$, пространство $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$ банахово.

Для всякой окрестности нуля U пространства $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\widetilde{S}[\alpha, \beta] \subset \varepsilon U$. Ввиду слабой непрерывности справа $x(t)$, если $t_0 \in [\alpha, \beta)$ и $t_n \to +t_0$, то для всякого числа $\delta > 0$ существует номер n_0 такой, что $\{x(t_n) - x(t_0): n \geqslant n_0\} \subset \delta\varepsilon U$. Следовательно, $\{x(t_n) - x(t_0): n \geqslant n_0\} \subset \delta \widetilde{S}[\alpha, \beta]$ и $x(t)$ непрерывна справа на $[\alpha, \beta)$ в $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$.

Пусть $\{r_n\}$ — совокупность всех рациональных чисел в $[\alpha, \beta]$. Тогда линейные комбинации вида $\sum_k (\alpha_k + i\beta_k)\, x(r_k)$, где α_k и β_k — рациональные числа, образуют некоторое счетное множество $Q[\alpha, \beta]$ в $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$. Из непрерывности справа $x(t)$ в $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$ следует, что множество $\{x(t): t \in [\alpha, \beta]\}$ принадлежит замыканию $\overline{Q}[\alpha, \beta]$ множества $Q[\alpha, \beta]$ в $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$, т. е. $\{x(t): t \in [\alpha, \beta]\}$ сепарабельно в $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$. Тогда в силу известной теоремы [2] (п. 8.15.2) функция $x(t)$ в $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$ интегрируема по Бохнеру на $[\alpha, \beta]$.

Модифицируем известные рассуждения классического доказательства. Пусть $0 < s < t$, тогда $x(t) = x(t-s)\,x(s)$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем числа α и β такими, чтобы $0 \leqslant \alpha < s < \beta < t - \varepsilon < t$. Тогда $(\beta - \alpha)[x(t \pm \varepsilon) - x(t)] = \int_\alpha^\beta x(s)[x(t \pm \varepsilon - s) - x(t-s)]\,ds \in \mathcal{A}$. В силу ограниченности умножения в $\mathcal{A}$ произведение $S[\alpha, \beta] \cdot S[\alpha, \beta]$ ограничено. Пусть $L(S(\alpha, \beta])$ — образ множества $S[\alpha, \beta]$ при левом регулярном представлении L алгебры $\mathcal{A}$ [4]. Поскольку L допускает $\sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')$-непрерывное расширение на $\mathcal{A}''$ и $\widetilde{S}[\alpha, \beta] \subset \mathcal{A}''$, то множество $L(S[\alpha, \beta])\,\widetilde{S}[\alpha, \beta]$ ограничено в $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]$. Поэтому ограничена его замкнутая выпуклая уравновешенная оболочка $\widetilde{D}[\alpha, \beta]$ в $[\mathcal{A}'', \sigma(\mathcal{A}'', \mathcal{A}')]$. Поскольку выполняется неравенство $\|xy\|_{\widetilde{D}[\alpha,\beta]} \leqslant \|x\|_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]} \|y\|_{S[\alpha,\beta]}$ при $x \in \mathcal{A}''_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$ и $y \in \mathcal{A}''_{S[\alpha,\beta]}$, где $\|\cdot\|_{S[\alpha,\beta]}$ и $\|\cdot\|_{\widetilde{D}[\alpha,\beta]}$ определяются так же, как $\|\cdot\|_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}$, то в предположении, что $1 \in S[\alpha, \beta]$, убеждаемся в сепарабельности $\{x(t): t \in [\alpha, \beta]\}$ в $\mathcal{A}''_{\widetilde{D}[\alpha,\beta]}$. Тогда

$$\|x(t \pm \varepsilon) - x(t)\|_{\widetilde{D}[\alpha,\beta]} \leqslant \max_{s \in [\alpha,\beta]} \frac{\|x(s)\|_{S[\alpha,\beta]}}{|\beta - \alpha|} \times$$

$$\times \int_\alpha^\beta \|x(t \pm \varepsilon - s) - x(t-s)\|_{\widetilde{S}[\alpha,\beta]}\,ds.$$

Поскольку пространства вида $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[s-\alpha, s-\beta]}$ банаховы и функции $\|x(t)\|_{\widetilde{S}[s-\alpha, s-\beta]}$ интегрируемы на $[s-\alpha, s-\beta]$, то полугруппа $x(t)$ допускает аппроксимацию $\mathcal{A}''_{\widetilde{S}[s-\alpha, s-\beta]}$-значными непрерывными функциями относительно нормы

Примеры. 4. В алгебре $\mathscr{D}'_+$ генератор группы сдвигов $\{x(t) = \delta(\xi + t) : t \geqslant 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, равен $-\delta'(\xi)$.

5. В алгебре $\mathscr{D}'_+$ генератор полугруппы операторов дробного дифференцирования $\{x(t) = f_{-t}(\xi) : t \geqslant 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, равен $\delta'(\xi) - C\delta(\xi)$, где C — константа Эйлера. Действительно, для любого $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ и $0 < t < 1$

$$\lim_{t \to +0} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi'(\xi)\, d\xi \right] = \lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \left[\frac{-1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi(\xi)\, d\xi - \varphi(0) \right] =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{-1}{\Gamma(1-1)} \left[\frac{d}{dt} \int_0^\infty \xi^{-1} \varphi(\xi)\, d\xi \right] - C\varphi(0) =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{-1}{\Gamma(1-t)} \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\xi^{1-t}}{1-t} \varphi'(\xi) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\xi^{1-t}}{1-t} \varphi''(\xi)\, d\xi \right] - C\varphi(0) =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{1}{\Gamma(1-t)} \int_0^\infty \xi^{-t} \varphi''(\xi)\, d\xi - C\varphi(0) = -\varphi'(0) - C\varphi(0).$$

6. В алгебре $\mathscr{D}'_+$ генератор полугруппы операторов дробного интегрирования $\{x(t) = f_t(\xi) : t \geqslant 0\}$, где $\xi \in \mathbb{R}$, равен $-(1 + C)\delta(\xi)$.

Действительно, при $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ и $0 < t < 1$ имеем

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \left[\frac{t}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t-1} \varphi(\xi)\, d\xi - \varphi(0) \right] = \lim_{t \to +0} \frac{1}{t} \left[\frac{-1}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t} \varphi'(\xi)\, d\xi + \varphi(0) \right] =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{d}{dt} \left[\frac{-1}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t} \varphi'(\xi)\, d\xi \right] =$$

$$= \lim_{t \to +0} \left[\frac{\Gamma'(1+t)}{\Gamma^2(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t} \varphi'(\xi)\, d\xi - \frac{t}{\Gamma(1+t)} \int_0^\infty \xi^{t-1} \varphi'(\xi)\, d\xi \right] = -C\varphi(0) - \varphi(0).$$

1. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 624 с.
2. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1969.— 1071 с.
3. *Mallios A.* Topological algebras.— Amsterdam : North-Holland, 1986.— 535 p.
4. *Лопушанский О. В.* Свойства непрерывности умножения в топологических алгебрах // Мат. методы и физ.-мат. поля. — 1985.— № 21.— С. 26—29.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 318 с.

Получено 19.06.89