УДК 519.46

Л. И. Вайнерман, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О РАБОТАХ М. Г. КРЕЙНА ПО ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ГАРМОНИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

The brief survey of M. G. Krein's papers on the representation theory and the harmonic analysis on topological groups is presented. It is well known that these papers are classical and form a basis for the modern researches in this field.

Наведено короткий огляд робіт М. Г. Крейна з теорії зображень і гармонічного аналізу на топологічних групах, які є класичними і складають фундамент багатьох сучасних досліджень в даній галузі.

Перу М. Г. Крейна принадлежит лишь несколько статей [40–47], непосредственно относящихся к теории представлений и гармоническому анализу на топологических группах. Однако эти работы богаты глубокими идеями, получившими развитие в различных направлениях современных исследований (например, в алгебраической комбинаторике [1] и в теории представлений квантовых групп [86, 87]). Уже из приведенных примеров видно насколько сложно дать достаточно полный обзор идей М. Г. Крейна в указанной области и показать их дальнейшее развитие. Поэтому основное внимание в настоящей работе уделено вопросам, наиболее близким научным интересам автора. При этом автор пользовался комментариями, содержащимися в монографиях Э. Хьюитта и К. Росса [64], а также М. А. Наймарка [54].

Изложение ведется в современных терминах. Все линейные пространства рассматриваются над полем C комплексных чисел.

Автор благодарен Ю. М. Березанскому, А. А. Калюжному, Г. Л. Литвинову, С. Г. Крейну за полезные обсуждения.

1. Положительно определенные ядра и функции. Обсуждаемые работы М. Г. Крейна характерны систематическим использованием алгебр положительно определенных (п. о.) ядер и функций. Напомним соответствующие определения и факты.

Пусть Q — множество. Комплекснозначная функция $F(p, q)$ на $Q \times Q$ называется ядром. Ядро называется эрмитовым, если $F(p, q) = \overline{F(q, p)}$, и п. о., если для любых наборов $p_1, \dots, p_n \in Q$, $c_1, \dots, c_n \in C$ (n — натуральное число) имеем

$$\sum_{j,k=1}^{n} F(p_j, q_k)\, c_j \overline{c_k} \ \geq\ 0, \tag{1}$$

т. е. любая матрица $\left| F(p_j, q_k) \right|_{j,k=1}^{n}$ неотрицательна. Очевидно, п. о. ядро автоматически эрмитово. Каждому п.о. ядру естественным образом соответствует гильбертово пространство H_F. Действительно, сопоставим каждому $p \in Q$ символ δ_p и рассмотрим линейное пространство L всевозможных линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{p_i}$, где $p_1, \dots, p_n \in Q$, $c_1, \dots, c_n \in C$, $n \in N$. Введем в L квазискалярное произведение, полагая для любых $x = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{p_i}$ и $y = \sum_{j=1}^{n} c'_j \delta_{q_j}$: $(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} F(p_j, q_j) c_j \overline{c}'_j$. Факторизируя L по подпространству всех таких элементов x, для которых $\|x\|^2 = (x, x) = 0$, и пополняя по полученному скалярному произведению, построим искомое гильбертово пространство H_F. Некоторые свойства п. о. ядер удобно устанавливать, используя H_F. Например, неравенство $|F(p,q)| \le F(p,p)F(q,q)$ есть просто неравенство Шварца в H_F. Поэтому п. о. ядро ограничено, если оно ограничено на диагонали (заметим, что $F(p,p) = (\delta_p, \delta_p) \ge 0$).

Далее будем считать Q сепарабельным локально компактным (л. к.) топологическим пространством, а п. о. ядро $F(p,q)$ непрерывным на $Q \times Q$. Зафиксируем ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ в H_F и положим $\Phi_k(p) = (\delta_p, \varphi_k)$. Из непрерывности ядра следует непрерывность вектор-функции $p \to \delta_p$ со значениями в H_F, поэтому $\Phi_k(p)$ — непрерывная функция; равенство $(x,y) = \sum_k (x,\varphi_k)(\varphi_k, y)$ при $x = \delta_p$, $y = \delta_q$ приводит к разложению

$$F(p,q) = \sum_k \Phi_k(p)\overline{\Phi_k(q)}, \tag{2}$$

которое в силу теоремы Дини сходится равномерно на каждом компактном подпространстве из Q. Система функций $\Phi_k(p)$ определяется разложением (2) однозначно с точностью до унитарного преобразования в H_F. В [47] изучается гладкость или аналитичность функций $\Phi_k(p)$ в (2) в зависимости от аналогичных свойств $F(p,q)$, а также аналитическое продолжение $F(p,q)$. Однако анализ этих результатов и вызванного ими потока работ выходит за пределы данного обзора (по этому поводу см., например, [5, 75]).

Пусть P_Q — множество всех ограниченных непрерывных п. о. ядер на Q, R_Q — его линейная оболочка. $\Phi \in R_Q$ тогда и только тогда, когда каждая из его эрмитовых компонент

$$\Phi^+(p,q) = \frac{1}{2}\left[\Phi(p,q) + \overline{\Phi(q,p)}\right] \quad \text{и} \quad \Phi^-(p,q) = \frac{1}{2i}\left[\Phi(p,q) - \Phi(q,p)\right]$$

представима в виде разности двух функций из P_Q. Для $F \in P_Q$ положим $\|F\| = \sup\limits_{p,q\in Q} |F(p,q)|$, а для эрмитова ядра Φ из R_Q $\|\Phi\| = \inf\{\|F'\| + \|F''\|\}$, где инфимум берется по всем представлениям $\Phi = F' - F''$ $(F', F'' \in P_Q)$. Наконец, для $\Phi \in R_Q$ положим $\|\Phi\| = \sup\limits_{0\le\alpha<2\pi} \|\Phi^+\cos\alpha + \Phi^-\sin\alpha\|$.

R_Q вместе с поточечным умножением и комплексным сопряжением ядер, а также вместе с только что введенной нормой $\|\cdot\|$ образует коммутативную банахову $*$-алгебру, причем если Q — компакт, то спектр этой алгебры совпадает с Q. В последнем случае для того, чтобы $\Phi \in R_Q$, достаточно, чтобы оно локально принадлежало R_Q (т. е. чтобы для любого $x \in Q \times Q$ нашлись окрестность O_x и $\psi \in R_Q$ такие, что $\Phi = \psi$ на O_x). Пусть далее Q — однородное пространство. т. е. на нем транзитивно и непрерывно по совокупности переменных действует л. к. группа G (действие преобразования $g \in G$ на элемент $p \in Q$ обозначим через gp).

Ядро F называется инвариантным, если $F(gp, gq) = F(p,q)$ $\forall\, g \in G$, $p, q \in Q$. Пусть P_{QG} — множество всех непрерывных инвариантных п. о. ядер. Для любого такого ядра $F(p,p) \equiv \text{const}$ и если для $x = \sum_{i=1}^n c_i\delta_{p_i} \in H_F$ положим

$U_g x = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{g p_i}$, то отображение $g \to U_g$ продолжается до непрерывного унитарного представления G в H_F. Для ядер Φ_1 и Φ_2 пишут $\Phi_1 \prec \Phi_2$, если $\Phi_2 - \Phi_1$ — п. о. ядро. Ядро Z из P_{QG} называется зональным, если $Z(p, p) \equiv 1$ и из соотношения $0 \prec \Phi \prec Z$, где Φ инвариантно, имеем $\Phi = \lambda Z$ $(0 < \lambda < 1)$. Роль зональных ядер показывает следующее утверждение [47] (теорема 5): ядро Z из P_{QG} является зональным тогда и только тогда, когда соответствующее унитарное представление U_g является неприводимым.

Геометрически свойство ядра быть зональным эквивалентно тому, что оно является крайней точкой [48] выпуклого множества всех нормированных ядер из P_{QG}. Как отмечает М. Г. Крейн, „основная задача в теории зональных ядер заключается в доказательстве того, что всякое ядро $F \in P_{QG}$ может быть в определенном смысле „собрано" из зональных функций". Более точно это означает, что для заданных Q и G требуется доказать существование измеримого пространства T и набора зональных ядер $Z(p, q, t)$ таких, что для любого F из P_{QG} найдется конечная неотрицательная счетно-аддитивная мера σ, через которую F представимо в виде

$$F(p, q) = \int_T Z(p, q, t)\, d\sigma(t). \tag{3}$$

Отдельный вопрос — выяснение единственности меры σ в представлении (3). Во многих случаях (например, если Q дискретно) интегральное представление (3) удается получить с помощью известной теоремы Крейна – Мильмана о крайних точках [48] или ее модификаций [62]. Для этого прежде всего нужно решить нелегкую задачу нахождения всех зональных ядер. Однако возможны и другие подходы к получению представления (3) — например, в случае симметрического риманова пространства Q, за счет использования обобщенных собственных функций оператора Бельтрами – Лапласа [11, 25, 27, 63]. Возможно также использование для этой цели общей теории разложения по обобщенным собственным функциям нормальных операторов (см. [5, 75] и приведенную там библиографию). Так или иначе, учитывая связь между инвариантными п. о. ядрами и представлениями, видим, что получение разложения (3) по существу означает доказательство теоремы о разложении опеределенного класса представлений группы G по неприводимым представлениям. Получению представлений вида (3) для л. к. риманова пространства Q должна была быть посвящена третья часть работы [47], основанная на развитом М. Г. Крейном методе направляющих функционалов. Однако она так и не была опубликована. В некотором смысле этот пробел восполняет работа [75].

Линейная оболочка R_{QG} конуса P_{QG} является коммутативной банаховой $*$–алгеброй. Для групп с инвариантным средним (т. е. с инвариантным относительно сдвигов состоянием на C^*–алгебре всех ограниченных непрерывных функций) она совпадает со множеством всех инвариантных ядер из R_Q.

Функция $f(g)$ на G называется п.о., если п. о. ядро $F(g, h) = f(h^{-1}g)$ на $Q = G$. Пусть $P(G)$ — множество всех непрерывных функций, $R(G)$ — его линейная оболочка. В прежних обозначениях $P(G) = P_{GG}$, $R(G) = R_{GG}$ (группа действует сдвигами на себе). Поэтому $R(G)$ — коммутативная банахова $*$–алгебра, инвариантная относительно сдвигов и относительно инверсии $f(g) \mapsto f(g^{-1})$. Впервые это установлено в [40], где также доказано неравенство

$|f(g) - f(h)|^2 \le 2f(e)(f(e) - \mathrm{Re} f(g^{-1}h))$ для п.о. функции $f(\cdot)$, $g, h \in G$, e — единица в G (оно вытекает из неравенства Коши – Буняковского в H_F)[1]; поэтому если п. о. функция непрерывна в точке e, то она равномерно непрерывна на G. П. о. функция называется зональной (или элементарной), если ядро $f(g^{-1}h)$ зонально. Такая функция порождает в H_F неприводимое унитарное представление U_g, причем так получаются все (с точностью до унитарной эквивалентности) неприводимые представления G [26].

Как известно, унитарные представления л. к. группы находятся во взаимно однозначном соответствии с невырожденными представлениями ее групповой $*$–алгебры $L_1(G)$ [24, 26, 54]. Как нам представляется, в работах М. Г. Крейна подчеркнута важность для теории представлений изучения свойств $*$–алгебры $R(G)$ (ее называют алгеброй Фурье – Стилтьеса). Поскольку $P(G)$ можно отождествить с множеством всех положительных функционалов на $L_1(G)$ [54], в некотором смысле $R(G)$ двойственно $L_1(G)$ (более точно — как банахово пространство $R(G)$ двойственно к групповой C^*–алгебре $C^*(G)$–пополнению $L_1(G)$ по норме $\|f\| = \sup \| U(f)\|$, где супремум берется по всем ее представлениям [30]). Для общей л. к. группы структура $R(G)$ необозримо сложна; она удовлетворительно изучена для коммутативных групп благодаря теореме Бохнера и для компактных групп в работах М. Г. Крейна [41, 47]. Важная подалгебра $F(G)$ (алгебра Фурье) в $R(G)$, порожденная матричными элементами регулярного представления G, изучена П. Эймаром [71], вероятно, не знавшим работ М. Г. Крейна.

Введем пространство $M(G)$ конечных борелевских мер на G и пространства $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых функций относительно меры Хаара μ. Если G — коммутативна и $\hat{G}$ — дуальная группа с мерой Хаара λ, аналогичный смысл имеют пространства $M(\hat{G})$ и $L_p(\hat{G})$. В этом случае преобразованием Фурье – Стилтьеса меры m из $M(G)$ называется заданная на $\hat{G}$ функция

$$\hat{m}(\chi) = \int_G \chi(g)\, dm(g). \tag{4}$$

Обратным преобразованием Фурье – Стилтьеса меры $n \in M(\hat{G})$ называется заданная на G функция

$$\check{n}(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g)\, dn(\chi). \tag{5}$$

В частности, прямым (обратным) преобразованием Фурье функции f из $L_1(G)$ (из $L_1(\hat{G})$) называется $\hat{f} = (f\mu)^\wedge$ (соответственно $\check{f} = (f\lambda)^\vee$). Каждое из этих преобразований переводит свертку в произведение. Теорема Бохнера утверждает, что $P(G)$ есть множество обратных преобразований Фурье – Стилтьеса неотрицательных мер из $M(\hat{G})$. Отсюда имеем описание $R(G)$ как $[M(\hat{G})]^\vee$. Другое описание $R(G)$ получено М. Г. Крейном [40, 47]: $f \in R(G)$ тогда и только тогда, когда найдется положительное число M такое, что для любых конечных наборов $g_1, \ldots, g_n \in G$ и $c_1, \ldots, c_n \in C$ (n — натуральное) выполняется неравенство

[1] Это неравенство использовали И. М. Гельфанд и Д.А. Райков [26] при доказательстве полноты системы неприводимых унитарных представлений л. к. группы.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i f(g_i) \right| \le M \sup_{\chi \in \hat{G}} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \chi(g_i) \right|. \tag{6}$$

Это условие является достаточным в случае любой л. к. группы. Для $G = R$ этот результат получен С. Бохнером и И. Шенбергом в 1934 г.

Важнейшее свойство преобразования Фурье на коммутативной л.к. группе выражается классической **теоремой Планшереля**: преобразование Фурье является линейной изометрией $L_2(G)$ на $L_2(\hat{G})$, а обратное преобразование Фурье — линейной изометрией $L_2(\hat{G})$ на $L_2(G)$. Эти два отображения являются взаимно обратными (при определенном согласованном выборе мер μ и λ [64]).

Эта теорема имеет долгую историю, начинающуюся с работы Парсеваля 1799 г. В случае, когда G — окружность, $\hat{G} = Z$, она доказана Ф. Рисом и Е. Фишером в 1907 г., в случае $G = \hat{G} = R$ — М. Планшерелем в 1910 г. В случае общей л. к. коммутативной группы ее доказал А. Вейль [21]. При этом он использовал структурные теоремы для таких групп и не упоминал о том, что обратное преобразование Фурье является обратным для прямого преобразования. Независимое доказательство этой важнейшей теоремы принадлежит М. Г. Крейну [44]. Дополненное в некоторых деталях К. Иосидой, оно вошло в учебники [54]. Это доказательство существенно использует свойства п. о. функций. Прежде всего, устанавливается, что линейная оболочка множества $P(G) \cap L_1(G)$ плотна в $L_1(G)$ и в $L_2(G)$, поскольку ей принадлежат свертки всевозможных непрерывных финитных функций на G. Затем устанавливается теорема, представляющая самостоятельный интерес и независимо доказанная А. Картаном и Р. Годеманом [67]: если $f \in P(G) \cap L_1(G)$, то $\hat{f}$ — неотрицательная функция из $L_1(\hat{G})$ и $(\hat{f})^{\vee} = f$. После этого теорема Планшереля доказывается несложно. Близкий к описанному подход к доказательству теоремы Планшереля развит Д. А. Райковым [59].

Из многочисленных обобщений теоремы Планшереля (см., например, [58]), мы упомянем лишь свойство унитарности преобразования Фурье на общей л.к. группе. Напомним некоторые определения. Пусть G — л. к. группа, $\hat{G}$ — множество классов эквивалентности всех ее неприводимых унитарных представлений (дуальное пространство). Для любых m из $M(G)$ и U из $\hat{G}$ построим линейный оператор $\hat{m}(U) = \int_G U(g)\, dm(g)$ в пространстве представлений H_U. Функция $U \mapsto \hat{m}(U)$ на $\hat{G}$ называется преобразованием Фурье – Стилтьеса меры m. Для $f \in L_1(G)$ преобразованием Фурье называется $\hat{f} = (f\mu)^{\wedge}$. И. Сигал [78] показал, что если G — унимодулярная сепарабельная л. к. группа типа 1 (в смысле классификации фон Неймана), то существует единственная положительная мера λ на $\hat{G}$ такая, что

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}\left(\hat{f}(U)[\hat{f}(U)]^* \right) d\lambda(U), \tag{7}$$

$$f(g) = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}\left(\hat{f}(U) U^*(g) \right) d\lambda(U),$$

где $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$, Tr — след оператора. Первую из формул (7) называют формулой Планшереля (λ — мера Планшереля), а вторую — формулой обращения. Для общих л. к. групп справедливы аналогичные утверждения, однако мера Планшереля при этом сосредоточена на квазидуальном пространстве, связанном с фактор–представлениями G [30], а вместо обычного следа используются веса на алгебрах фон Неймана, порожденных этими представлениями [79]. Мы не рассматриваем здесь работы, в которых вычисляется мера Планшереля для конкретных групп и однородных пространств (см., например, [27]).

2. Компактные однородные пространства. Приведем, следуя [47], некоторые факты из гармонического анализа на компактных группах и однородных пространствах. Если G компактна, то $\hat{G}$ дискретно и каждое пространство H_π, $\pi \in \hat{G}$, конечномерно. Для любого $m \in M(G)$ введем операторные коэффициенты $A_\pi = \int_G U_\pi(g^{-1})\,dm(g)$. Ряд $\sum_\pi d_\pi \operatorname{Tr}(A_\pi U_\pi)$ называется рядом Фурье–Стилтьеса меры m (d_π — размерность H_π). Если $dm = f d\mu$, $f \in L_1(G)$, этот ряд называется рядом Фурье функции f; он называется абсолютно сходящимся, если $|||f||| = \sum_\pi d_\pi \|A_\pi\|_1 < \infty$, где $\|\cdot\|_1$ — ядерная норма матрицы. Пространство $A(G)$ всех таких функций с нормой $|||\cdot|||$ является банаховым и непрерывно вложено в $C(G)$. Функция f п. о. тогда и только тогда, когда $f \in A(G)$,

$$f(g) = \sum_\pi d_\pi \operatorname{Tr}(A_\pi U_\pi(g)) \tag{8}$$

и каждый оператор A_π неотрицателен. Отсюда $A(G) = R(G)$. Эта алгебра „является наиболее естественным аналогом кольца абсолютно сходящихся тригонометрических рядов" [46], ее спектр гомеоморфен G и если A и B — непустые непересекающиеся замкнутые подмножества G, то найдется функция f из $R(G)$, принимающая значения в $[0, 1]$ и равная тождественно единице на A и нулю на B. Формула обращения и формула Планшереля имеют соответственно вид (8) и

$$\int_{\hat{G}} |f(g)|^2 d\mu(g) = \sum_\pi d_\pi \operatorname{Tr}(A_\pi A_\pi^*). \tag{9}$$

Пусть теперь G — компактная группа, действующая транзитивно и непрерывно на однородном компактном пространстве Q. Как известно, Q гомеоморфно множеству G/H левых классов смежности G по стационарной подгруппе H любой точки O из Q. Каждой функции f из $C(Q)$ отвечает функция $\varphi(s) = f(sO)$ из $C(G)$, постоянная на этих классах. Наоборот, если $\varphi(s) \in C(G)$, то функция $\int_H \varphi(sh)\,d\mu_H(h)$ непрерывна и постоянна на левых классах смежности, следовательно, ей соответствует непрерывная функция на Q. Аналогично, если $\pi \in \hat{G}$, то $P = \int_H \pi(h)\,d\mu_H(h)$ — ортопроектор и найдется непрерывная матрица–функция $\Omega_\pi(q)$ на Q такая, что $\Omega_\pi(sO) = \pi(s)P$. При этом $\Omega_\pi(sq) = \pi(s)\Omega_\pi(q)$ и $\Omega_\pi^*(q)\Omega_\pi(q) = P$ для любых $s \in G$, $q \in Q$. Каждой непрерывной на Q функции $f(q)$ поставим в соответствие ее ряд Фурье $\sum_\pi d_\pi \operatorname{Tr}(C_\pi \Omega_\pi(q))$ с операторными коэффициентами $C_\pi = \int_G f(sq) \times \Omega_\pi^*(sq)\,d\mu(s)$. Роль $R(G)$ играет пространство $R(Q, G)$ функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье; вместе с нормой $\sum_\pi d_\pi \|c_\pi\|_1$ оно является коммутативной банаховой алгеброй со спектром Q, что дает естественное обобщение теоремы Н. Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах для случая, когда Q — окружность, G — ее группа вращений (см. [54, 64]).

Аналогично можно рассмотреть кольцо функций, постоянных на двойных классах смежности G по H. Каждая такая функция f есть сужение $\Phi(0, q)$ некоторого инвариантного ядра Φ, причем $f(s0) \in P(G) \Leftrightarrow \Phi \in P_{QG}$. Это кольцо состоит из ядер вида $\Phi = \sum_k c_k Z_k$, где $\{Z_k\}$ — множество всех зональных ядер на Q, $\sum_k |c_k| < \infty$; такое представление единственно, например, в случае симметрического в смысле М. Г. Крейна однородного пространства, т. е. если $\forall p, q \in Q \ \exists s \in G: sp = q, \ sq = p$. В последнее время Г. Б. Подколзиным [57] рассмотрены интересные примеры колец этого типа. Другой пример кольца винеровского типа построен М. Г. Крейном из функций, постоянных на классах сопряженных элементов компактной группы, т. е. функций, представимых в виде $f = \sum_\pi c_\pi \chi_\pi$, где $\sum_\pi d_\pi |c_\pi| < \infty$, χ_π и d_π — соответственно характеры и размерности неприводимых представлений.

Рассмотрение подобных примеров стимулировало Ю. М. Березанского и С. Г. Крейна к построению теории гиперкомплексных систем (г. с.) с континуальным базисом [3, 4, 8 – 10]. Они изучили г. с. с компактным и дискретным базисом, общий случай л. к. базиса изучен Ю. М. Березанским и А. А. Калюжным [6, 7, 32]. Дадим соответствующие определения.

Пусть Q — л. к. пространство, $B_0(Q)$ — кольцо борелевских подмножеств Q с компактными замыканиями, $B(Q)$ — порожденная ими σ–алгебра.

Неотрицательная регулярная конечная на компактах борелевская мера $\gamma(A, B, r)$ по $A(B)$, где $r \in Q$, называется структурной мерой г. с., если:

1) $\gamma(A, B, \cdot) \in B_0(Q)$ — непрерывность; 2) $\int_Q \gamma(A, B, r)\, d_r \gamma(E_r, C, s) = \int_Q \gamma(B, C, r)\, d_r \gamma(A, E_r, s)$ — ассоциативность; 3) $\gamma(A, B, r) = \gamma(A, B, r)$ — коммутативность (здесь $A, B \in B_0(Q)$, $C \in B(Q)$, $r, s \in Q$).

Положительная борелевская мера μ называется мультипликативной, если $\int_Q \gamma(A, B, r)\, d\mu(r) = \mu(A)\mu(B)$ для $A, B \in B_0(Q)$. Если Q — коммутативная л. к. группа, то мера Хаара μ является мультипликативной, а $\gamma(A, B, r) = \mu(A^{-1} r \cap B)$ — структурной мерой. При некоторых достаточно естественных условиях на $\gamma(A, B, r)$ можно показать, что мультипликативная мера μ существует.

$L_1(Q)$ с L_1–нормой и операцией $(x * y)(r) = \int_Q \int_Q x(p)\, y(q)\, d\gamma(E_p, E_q, r)$ является коммутативной банаховой алгеброй [6][2].

Эта алгебра, по определению, и называется г. с. с л. к. базисом Q. Если Q конечно, имеем обычную коммутативную г. с., структурная мера превратится в структурные константы этой г. с. Будем говорить, что г. с. с л. к. базисом нормальна, если существует такой инволютивный гомеоморфизм $Q \ r \mapsto \check{r}$, что вместе с инволюцией $x^*(r) = \overline{x(\check{r})}$ $L_1(Q)$ становится банаховой $*$–алгеброй; г. с. имеет слабую базисную единицу $e \in Q$, если $\check{e} = e$, $\gamma(A, B, e) = \mu(\check{A} \cap B)$ $(A, B \in B_0(Q))$. Если Q дискретно, то δ_e — обычная единица в $L_1(Q)$. Перечислим основные факты гармонического анализа на нормальных г. с. со слабой базисной единицей: 1) любая такая г. с. полупроста и мультипликативная мера на ней единственна; 2) любая непрерывная п. о. функция (т. е. задающая положительный функционал) на такой г. с. допускает однозначное пред-

[2] Более подробно см. Березанский Ю. М., Калюжный А. А. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1992. – 352 с.

ставление вида $f(r) = \int_{\hat{Q}} \chi(r)\, d\sigma(r)$, где $\hat{Q}$ — множество $*$–характеров $\chi(\cdot)$ банаховой $*$–алгебры $L_1(Q)$ с обычной топологией спектра этой алгебры, σ — конечная неотрицательная мера на $\hat{Q}$; 3) точно так же, как в п. 1, даются определения прямого и обратного преобразования Фурье и, следуя в общих чертах приведенной там схеме М. Г. Крейна, доказывается теорема Планшереля; 4) справедлив принцип двойственности Л. С. Понтрягина (см. [6]).

Идейно близки к г. с. с л. к. базисом гипергруппы, введенные в 70-х годах (см. обзор [76]). Гипергруппой называется $*$–алгебра с единицей конечных борелевских мер на л. к. топологическом пространстве Q относительно абстрактно заданной ассоциативной операции (свертки мер), инволюции $m^*(p) = \overline{m(\check{p})}$ (где $p \mapsto \check{p}$ — инволютивный гомеоморфизм Q) и единицы δ_e, $e \in Q$, удовлетворяющая ряду топологических условий и требованию, чтобы свертка вероятностных мер снова была вероятностной мерой. Для гипергрупп, как и для г. с. с л. к. базисом, удается построить достаточно развитую теорию представлений и гармонический анализ (см. обзоры [16, 53, 76]); при этом, как показано в [6], коммутативные гипергруппы являются частным случаем г. с. с л. к. базисом.

Оба рассмотренные только что класса объектов являются примерами операторов обобщенного сдвига (о. о. с.) Ж. Дельсарта – Б. М. Левитана [52]. Напомним их определение. Пусть Q — множество, M — линейное пространство функций на Q. Семейство линейных операторов R^s, $s \in Q$, в M называют правыми о. о. с., если: 1) $\exists\, e \in Q : R^e$ — тождественный оператор; 2) $\forall\, t \in Q$ имеем $g(s) = R^s f(t) \in M$; 3) $R^r_s R^s f(t) = R^s_r R^r f(t)$ — ассоциативность (где $f \in\, \in M$, t, $s, r \in Q$, нижний индекс указывает, по какой переменной действует оператор). Условие 3 эквивалентно тому, что на сопряженном к M пространстве M' можно ввести ассоциативную операцию (свертку) вида $\langle f, \delta_s * \delta_t \rangle = R^s f(t)$, где t, $s \in Q$, $f \in M$, $\delta_t, \delta_s \in M'$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — двойственность между M и M'. Коммутативность этой свертки эквивалентна соотношению $R^s_r R^r f(t) = R^r_t R^s f(t)$, $f \in M$, t, $s, r \in Q$; такие о. о. с. называют коммутативными. В 1945 г. Б. М. Левитан для определенного класса коммутативных о. о. с. получил описание п. о. функций, теорему Планшереля и принцип двойственности [49–51]. Теория представлений о. о. с. в случае компактного Q имеется в [52].

Рассмотренные выше г. с. с л. к. базисом и гипергруппы относятся к тому важному частному случаю о. о. с., когда положительные функции под действием R^s переходят в положительные . Однако имеются содержательные примеры о. о. с., связанных с дифференциальными и разностными операторами и с ортогональными многочленами, когда это условие нарушается. В этой связи Г. Л. Литвинов и автор настоящей статьи [20] предложили аксиоматику о. о. с., охватывающую известные примеры и позволяющую доказывать теорему Планшереля. Этот подход для неограниченных о. о. с. развит в [17] и позволяет с единой точки зрения получать равенство Парсеваля и формулу обращения для дифференциальных и разностных операторов. Однако при этом не удается получать для о. о. с. аналоги приведенных в начале настоящего пункта результатов М. Г. Крейна для компактных групп и однородных пространств. Такую возможность дает аксиоматика вещественных г. с. с компактным и дискретным базисом [15]. Она напоминает аксиоматику компактных и дискретных гипергрупп, но вместо сохранения положительности при свертке мер постулируется существование и единственность некоторой специальной положительной меры μ на Q, для которой $\mu^* = \mu$ и $m * f\mu = (m * f)\mu$, где $m \in M(Q)$, f — непрерывная функция. Такое свойство, в частности, имеют инвариантные меры на группах и гипергруппах, мультипликативные меры на г. с. с л. к. базисом и меры Планшереля во всех рассмотренных ситуациях. Поэтому указанная мера μ названа мерой Планшереля.

Кроме того, постулируется, что оператор свертки с мерой из $M(Q)$ непрерывен в $L_2(Q)$. Унитарным представлением вещественной г. с. называется такое $*$-представление U ее $*$-алгебры $M(Q)$, что семейство операторов $U(\delta_x)$ сильно непрерывно на Q. В [15] доказано, что: 1) все неприводимые представления вещественной г. с. с компактным базисом конечномерны, множество $\hat{Q}$ их классов эквивалентности не более чем счетно; 2) система их матричных элементов полна и ортогональна в $L_2(Q)$ и тотальна в $C(Q)$; 3) вводя операторные коэффициенты A_π, ряды Фурье и Фурье – Стилтьеса, пространство $A(Q)$ функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье, можно получить описание непрерывных п. о. функций в виде (8) с неотрицательными A_π и формулу Планшереля (9) (однако d_π не обязательно равно $\dim H_\pi$ и $A(Q)$ не обязательно является алгеброй относительно поточечного умножения функций). Аналогичные результаты для компактных гипергрупп ранее получены Р. Времом [84]. Автором [15] построены также элементы теории представлений и гармонического анализа на вещественных г. с. с дискретным базисом, а для коммутативных вещественных г. с. установлен принцип двойственности. С указанным кругом вопросов можно также ознакомиться в обзорах [16, 53, 76].

3. Двойственность. Гармоническим полиномом на компактном однородном пространстве назовем непрерывную функцию $h(q)$, для которой все сдвиги $h(sq)$, $s \in G$, принадлежат одному и тому же конечномерному линейному пространству. Множество $T(Q)$ всех таких полиномов является $*$-алгеброй с единицей относительно обычного умножения функций и комплексного сопряжения. В случае $Q = G$ $T(G)$ — линейная оболочка матричных элементов неприводимых представлений G. М. Г. Крейн [41, 47] показал, что линейный функционал на $T(Q)$ положителен на каждой положительной функции из $T(Q)$ тогда и только тогда, когда он положителен на каждой функции вида $|f|^2$, где $f \in T(Q)$. Каждый такой функционал автоматически непрерывен относительно равномерной нормы функций. Если $\{\omega_k\}$ — полный набор элементарных гармонических функций, тогда последовательность чисел a_k представима в виде $a_k = \int_Q \omega_k(q)\, d\sigma(q)$ с некоторой неотрицательной борелевской мерой в том и только том случае, когда функционал, определяемый равенствами $F(\omega_k) = a_k$, положителен на $T(Q)$ [47]. Это утверждение есть обобщение теоремы Риса – Герглотца, относящейся к тригонометрической проблеме моментов. Позднее аналогичные утверждения установили Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн [8, 9] для г. с. с компактным базисом и автор [15] для вещественных г. с. с компактным базисом. Приведенное выше утверждение о положительных функционалах на $T(Q)$ позволяет несложно доказать [64, 30.5] следующую теорему Т. Таннаки [82] и М. Г. Крейна [46] (приводимая формулировка принадлежит К. Иосиде):

Для характера χ алгебры $T(G)$ следующие утверждения эквивалентны: 1) $\chi(\bar{f}) = \overline{\chi(f)}$ $\forall f \in T(G)$; 2) $\chi(f) = f(g)$ для некоторого $g \in G$; 3) каждая матрица $\{\chi(u_{ij}^{\pi})\}_{i,j=1}^{d_\pi}$ унитарна. Вариант этой теоремы для компактных однородных пространств имеется в [77]. Если G — некоммутативная компактная группа, дуальное пространство $\hat{G}$ группой не является, хотя существуют операции кронекеровского произведения представлений и перехода к сопряженному, но кронекеровское произведение двух неодномерных представлений всегда приводимо. Поэтому непосредственное перенесение принципа двойственности Понтрягина на некоммутативные группы невозможно (отметим, между прочим, что $\hat{G}$ является базисом дискретной г. с.). В этой связи М. Г. Крейн [46, 47] предложил аксиоматику объекта, являющегося двойственным к компактной не обязательно коммутативной группе.

Определение. *Пусть A — коммутативная $*$-алгебра с единицей и алгебраическим базисом B, имеющим следующие свойства:*

1) $B = \bigcup_{k\in K} V^k$, $V^k = \left\{ v_{ij}^k \right\}_{i,j=1}^{d_k}$ *(где K — множество индексов, d_k — натуральное число)*;

2) *среди матриц V^k имеется одномерная матрица e*;

3) $\forall\, k \in K \quad \exists\, \check{k} \in K$ *и унитарная $d_k * d_k$–матрица s_k такие, что* $s_k^{-1}(V^k)^* s_k = V^{\check{k}}$;

4) $\forall\, k, l \in K \quad \exists$ *унитарная $d_k d_l * d_k d_l$–матрица T_{kl} и набор $k_1, \ldots, k_m$ элементов из K такие, что* $V^k \otimes V^l = T_{kl}^{-1}(V^{k_1} \oplus \ldots \oplus V^{k_m}) T_{kl}$;

5) *в последнем разложении компонента e появляется не более одного раза, причем тогда и только тогда, когда V^k унитарно эквивалентно $V^{\check{l}}$*;

6) $\forall\, V^k$ *справедливы тождества* $\sum_{r=1}^{d_k} v_{ir}^k (v_{jr}^k)^* = \delta_{ij} e$, $i, j = 1, \ldots, d_k$.

Тогда A называется квадратной блок-алгеброй [46, 47] *или алгеброй Крейна* [64].

Следует отметить, что алгебра Крейна — это упорядоченная пара (A, B), где B — базис, удовлетворяющий условиям 1 – 6. В частности, имеются примеры неизоморфных алгебр Крейна, изоморфных как $*$-алгебры. Несмотря на внешне громоздкий вид, аксиомы алгебры Крейна независимы и совершенно естественны, как это видно из следующего примера. Пусть $U^\pi = \{U_{ij}^\pi\}_{i,j=1}$, $\pi \in \hat{G}$, — матричные единицы неприводимых представлений компактной группы G. Тогда пара $(T(G), U)$ задает алгебру Крейна, и наоборот, каждая алгебра Крейна изоморфна алгебре $(T(G_A), U)$ для компактной группы G_A, состоящей из характеров этой алгебры. Это утверждение доказано в [64] с помощью теоремы, приведенной в начале настоящего пункта.

Сформулируем теперь теорему двойственности Т. Таннаки – М. Г. Крейна: а) если G — компактная группа, $(T(G), U)$ — ее алгебра Крейна, G_A — группа характеров этой алгебры, то G изоморфна G_A; б) если (A, B) — алгебра Крейна, G_A — группа ее характеров, то (A, B) изоморфна $(T(G_A), U)$. Утверждение а) доказано Т. Таннакой [82] и независимо М. Г. Крейном [42]. Более тонкое утверждение б) принадлежит М. Г. Крейну [42].

Другие варианты теоремы двойственности Т. Таннаки – М. Г. Крейна принадлежат Дж. Келли [73] и Г. Хохшильду [72], которые для описания двойственного объекта использовали понятие алгебры Хопфа. Напомним, что алгеброй Хопфа называется линейное пространство M, снабженное структурами алгебры и коалгебры, последняя задается отображением Φ: $M \to M \otimes M$ (коумножением), удовлетворяющим условию коассоциативности $(id \otimes \Phi)\Phi =$

$= (\Phi \otimes id)\Phi$, где id — тождественное отображение. При этом коумножение является гомоморфизмом алгебр. Обобщения этой теоремы на унимодулярные группы получены В. Стайнспрингом [61] и на общие л. к. группы — Н. Татсуумой [83]. Теорема двойственности для компактных однородных пространств имеется в [77], а для инверсных полугрупп — в [2]. Двойственность Т. Таннаки – М. Г. Крейна для так называемых схем отношений описана в [1]. Там, в частности, построен аналог алгебры Крейна для двойных классов смежности конечной группы по подгруппе. Все эти формулировки принципа двойственности несимметричны: с одной стороны, имеется группа, а с другой — объект совершенно иной природы. Теорию двойственности, свободную от этого недостатка, построил Г. И. Кац [33]. Он ввел категорию кольцевых групп (алгебр Каца), представляющих собой алгебры Хопфа – фон Неймана [70], снабженные инвариантным следом (см. определение в [33, 36]). Каждой унимодулярной группе G соответствует алгебра Каца с коммутативной алгеброй фон Неймана $M = L_\infty(G)$, коумножением $\Phi: f(x) \mapsto f(xy)$, коинволюцией $+: f(x) \mapsto \overline{f(x^{-1})}$ и следом $\mu(f) = \int_G f(x)\,d\mu(x)$. Наоборот, каждая алгебра Каца с коммутативной алгеброй фон Неймана изоморфна такой алгебре функций на некоторой унимодулярной группе.

В категории алгебр Каца имеется инволютивный функтор двойственности (см. конструкцию в [36]). В частности, двойственные объекты к унимодулярным группам описываются как алгебры Каца, у которых коалгебры симметричны. Неунимодулярные алгебры Каца введены Г. И. Кацем и автором [19] и независимо М. Эноком и Ж.-М. Шварцем [68]. Основное отличие от унимодулярного случая состоит в замене следа на алгебре фон Неймана в смысле теории И. Сигала [60] весом на этой алгебре (см. [12]) и соответственно гильбертовых алгебр и биалгебр, на которых базировались работы Г. И. Каца, на обобщенные гильбертовы алгебры и биалгебры [19]. В частности, в [13] дано аксиоматическое описание двойственного объекта к общей л. к. группе и получено обобщение утверждения б) теоремы двойственности Т. Таннаки – М. Г. Крейна для общих л. к. групп.

Помимо теории двойственности для алгебр Каца, охватывающей другие версии двойственности для л. к. групп (по этому поводу см. [80, 81]), можно строить для этих алгебр теорию представлений и гармонический анализ. Так, в [19] дано определение преобразования Фурье, получены формула Планшереля и формула обращения, в [34, 69] определены и изучены свойства п. о. элементов алгебры Каца и соответственно аналоги алгебр Фурье и Фурье – Стилтьеса. Выделены классы компактных, дискретных и конечных алгебр Каца, показано, что алгебра Каца, двойственная к компактной (дискретной), является дискретной (компактной) и что всякое неприводимое представление компактной алгебры Каца обязательно конечномерно. В обзоре [16] и в монографии [69] можно найти точные формулировки этих и других фактов теории алгебр Каца. Двойственность для некоторых классов топологических групп построена в [55].

В последние годы в связи с изучением квантового метода обратной задачи рассеяния возникла и интенсивно развивается теория так называемых квантовых групп [31]. Аксиоматика компактных квантовых групп дана С. Вороновичем [86]. Как и алгебры Каца, они представляют собой алгебру Хопфа (но не алгебру фон Неймана, а C^*–алгебру) с дополнительной структурой. Здесь также удается построить весьма содержательную теорию представлений, завершающуюся теоремой двойственности — обобщением теоремы двойственности Т. Таннаки – М. Г. Крейна [87]. Подход к теории двойственности с позиций теории категорий — так называемые категории Т. Таннаки — описан П. Делинем и Дж. Милном [29].

Возможность построения теории двойственности в духе алгебр Каца, охватывающей некоторые классы гипергрупп, указана Г. И. Кацем [36], а также

А. М. Вершиком [22]. Объектами соответствующей категории являются пары топологических $*$-алгебр, находящиеся в двойственности друг к другу и такие, что выпуклые множества состояний устойчивы относительно умножений и инволюций в своих алгебрах. В конечномерном случае такая программа реализована С. В. Керовым [38]. Более широкая категория объектов, охватывающая конечные вещественные г. с., конечные алгебры Каца и пары конечномерных алгебр в двойственности, построена автором [14]. Объекты этой категории — мы называем их г. с. Каца — представляют собой линейные пространства, каждое из которых снабжено структурами алгебры и коалгебры, но условие согласования этих структур гораздо более слабое, чем в алгебре Хопфа. Тем не менее, удается построить теорию представлений, гармонический анализ и теорию двойственности для таких объектов и описать те из них, которые соответствуют вещественным г. с. либо дуальным к ним. К этому же направлению принадлежит работа А. А. Калюжного и автора [18], в которой установлен принцип двойственности для г. с. с л. к. базисом, а также диссертация Э. Кирхберга [74].

1. *Баннаи Э., Ито Т.* Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. – М.: Мир, 1987. – 373 с.
2. *Бер А. Ф.* Принцип двойственности для компактных инверсных полугрупп // Докл. АН УзССР. – 1986. – № 7. – С. 7 – 9.
3. *Березанский Ю. М.* О центре группового кольца компактной группы // Докл. АН СССР. – 1950. – **7**, № 5. – С. 825 – 828.
4. *Березанский Ю. М.* Гиперкомплексные системы с дикретным базисом // Там же. – 1951. – **81**, № 3. – С. 329 – 332.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
6. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гиперкомплексные системы с локально компактным базисом. – Киев, 1982. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 4-182). (Англ. пер.: Selecta Math. Sov. – 1985. – **4**, № 2. – P. 151 – 200).
7. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Спектральные разложения представлений гиперкомплексных систем // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 4 – 19.
8. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Континуальные алгебры // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, № 1. – С. 5 – 8.
9. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с компактным базисом // Укр. мат. журн. – 1951. – **3**, № 2. – С. 184 – 204.
10. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 1. – С. 147 – 152.
11. *Березин Ю. М., Гельфанд И. М.* Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Тр. Моск. мат. о-ва – 1956. – **5**. – С. 311 – 351.
12. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1982. – 512 с.
13. *Вайнерман Л. И.* Характеризация объектов, двойственных к локально компактным группам // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 1. – С. 75 – 76.
14. *Вайнерман Л. И.* Конечные гиперкомплексные системы Каца // Там же. – 1983. – **17**, № 16. – С. 68 – 69.
15. *Вайнерман Л. И.* Гиперкомплексные системы с компактным и дискретным базисом // Докл. АН СССР. – 1984. – **278**, № 1. – С. 16 – 20.
16. *Вайнерман Л. И.* Двойственность алгебр с инволюцией и операторы обобщенного сдвига // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1986. – **24**. – С. 165 – 205.
17. *Вайнерман Л. И.* Об абстрактной формуле Планшереля и формуле обращения // Укр. мат. журн. – 1969. – **41**, № 8. – С. 1041 – 1047.
18. *Вайнерман Л. И., Калюжный А. А.* Квантованные гиперкомплексные системы // Краевые задачи для диф. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 13–29; Функцион. анализ и его прил. – 1989. – **23**, № 4. – С. 77 – 78.
19. *Вайнерман Л. И., Кац Г. И.* Неунимодулярные кольцевые группы и алгебры Хопфа – фон Неймана // Докл. АН СССР. – 1973. – **211**, № 5. – С. 1031–1034; Мат. сб. – 1974. – **94**, № 2. – С. 194 – 225.
20. *Вайнерман Л. И., Литвинов Г. Л.* Формула Планшереля и формула обращения для операторов обобщенного сдвига // Докл. АН СССР. – 1981. – **251**, № 4. – С. 792–795.
21. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применение. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950. – 222 с.

22. *Вершик А. М.* Геометрическая теория состояний, граница фон Неймана, двойственность $C*$-алгебр // Зап. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **29**. – С. 147 – 154.
23. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с.
24. *Гельфанд И. М.* Нормированные кольца // Мат. сб. – 1941. – **9**. – С. 3 – 24.
25. *Гельфанд И. М.* Сферические функции на симметрических римановых пространствах // Докл. АН СССР. – 1950. – **70**, № 1. – С. 5 – 8.
26. *Гельфанд И. М., Райков Д. А.* Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп // Мат. сб. – 1943. – **13**. – С. 301 – 316.
27. *Гиндикин С. Г., Карпелевич Ф. И.* Мера Планшереля на римановых симметрических пространствах неположительной кривизны // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**. – С. 252 – 255.
28. *Грабовская Р. Я., Крейн С. Г.* Об одном представлении алгебры дифференциальных операторов и связанных с ними дифференциальных уравнениях // Там же. – 1973. – **212**, № 2. – С. 280 – 284.
29. *Делинь П., Милн Дж.* Категории Таннаки // Ходжевы циклы и мотивы. – М.: Мир, 1985. – С. 186 – 234.
30. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. – М.: Наука, 1974. – 399 с.
31. *Дринфельд В. Г.* Квантовые группы // Зап. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **155**. – С. 18 – 49.
32. *Калюжный А. А.* Одна теорема о существовании мультипликативной меры // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 3. – С. 369 – 371.
33. *Кац Г. И.* Обобщение группового принципа двойственности // Докл. АН СССР. – 1961. – **138**, № 2. – С. 275 – 278.
34. *Кац Г. И.* Представления компактных кольцевых групп // Там же. – 1962. – **145**, № 5. – С. 989 – 992.
35. *Кац Г. И.* Компактные и дискретные кольцевые группы // Укр. мат. журн. – 1962. – **14**, № 3. – С. 260 – 270.
36. *Кац Г. И.* Кольцевые группы и принцип двойственности // Тр. Моск. мат. о-ва. I. – 1963. – **12**. – С. 259 – 301; II. – 1965.– **13**. – С. 84 – 113.
37. *Кац Г. И., Палюткин В. Г.* Конечные кольцевые группы // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1966. – **15**. – С. 224 – 261.
38. *Керов С. В.* Двойственность конечномерных $*$-алгебр // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1974. – № 7. – С. 23 – 29.
39. *Кириллов А. А.* Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ // Итоги науки и техники. Фунд. напр / ВИНИТИ. – 1968. – **22**. – С. 5 – 162.
40. *Крейн М. Г.* Об одном кольце функций, определенных на топологической группе // Докл. АН СССР. – 1940. – **29**, № 4. – С. 275 – 280.
41. *Крейн М. Г.* Об одном специальном кольце функций // Там же. – № 5 – 6. – С. 355 – 359.
42. *Крейн М. Г.* К теории почти периодических функций на топологической группе // Там же. – 1941. – **30**, № 1. – С. 5 – 8.
43. *Крейн М. Г.* О положительных функционалах на почти периодических функциях // Там же. – С. 9 – 12.
44. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе // Там же. – № 6. – С. 482 – 486.
45. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Там же. – 1946. – **53**, № 1. – С. 3 – 6.
46. *Крейн М. Г.* Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры // Там же. – 1949. – **69**, № 6. – С. 725 – 728.
47. *Крейн М. Г.* Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах. I, II // Укр. мат. журн. – I. – 1949. – **1**, № 4. – С. 64 – 98; II. – 1950. – **2**, № 1. – С. 10 – 59.
48. *Крейн М. Г., Мильман Д. П.* On extreme points of regularly convex sets // Stud. math. – 1940. – **9**. – P. 133 – 138.
49. *Левитан Б. М.* Теоремы о представлении положительно определенных функций для обобщенной операции сдвига // Докл. АН СССР. – 1945. – **47**, № 3. – С. 163 – 165.
50. *Левитан Б. М.* Теорема Планшереля для обобщенной операции сдвига // Там же. – № 5. – С. 323 – 326.
51. *Левитан Б. М.* Закон двойственности для обобщенной операции сдвига // Там же. – № 6. – С. 401 – 403.
52. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
53. *Литвинов Г. Л.* Гипергруппы и гипергрупповые алгебры // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1985. – **26**. – С. 57 – 106.
54. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца – М.: Наука, 1968. – 664 с.
55. *Назиев А. Х.* $K*$-алгебры и двойственность: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1988. – 16 с.

56. *Палюткин В. Г.* Инвариантная мера на компактной кольцевой группе // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 4. – С. 49 – 59.
57. *Подколзин Г. Б.* Инфинитезимальные алгебры для гиперкомплексной системы с базисом $SO(4)/SO(2)$ // Там же. – 1990. – **42**, № 3. – С. 427– 429.
58. *Повзнер А. Я.* Об одной общей формуле типа Планшереля // Докл. АН СССР. – 1947. – **57**. – С. 123 – 125.
59. *Райков Д. А.* Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **45**. – С. 1 – 86.
60. *Сигал И. Е.* Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования // Математика. – 1962. – **6**, № 1. – С. 65 – 131.
61. *Стайнспринг В. Ф.* Теоремы об интегрировании относительно меры на проекторах и двойственность для унимодулярных групп // Там же. – № 2. – С. 107 – 149.
62. *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. – М.: Мир, 1964. – 112 с.
63. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические римановы пространства. – М.: Мир, 1964. – 533 с.
64. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1975. – Т. 1, 2.
65. *Bochner S.* On a theorem of Tannaka and Krein // Ann. Math. – 1942. – **43**. – P. 56 – 58.
66. *Cartan E.* Sur la détermination d'une système orthogonal complète dans un espace de Riemann symmetrique clos // Rend. Circ. mat. Palermo. – 1929. – **53**. – P. 217–252; Ouvres complètes. Pt. I. – Paris: Gauthier-Villar, 1952. – **2**. – P. 1045 – 1080.
67. *Cartan E., Godement R.* Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abeliens localement compacts // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1947. – **64**. – P. 79 – 99.
68. *Enock M., Schwartz J.-M.* Une dualité dans les algèbres de von Neumann // C. r. Acad. sci. – 1973. – **277**, № 14. – P. 683–685; Bull. Soc. math. France. – 1975. – Mem. № 44. – P. 1 – 144.
69. *Enock M., Schwartz J.-M.* Kac algebras and duality of locally compact groups. – Berlin; Paris: Springer, 1992. – 257 p.
70. *Ernest J.* Hopf – von Neumann algebras // Proc. Conf. Funct. Anal. – New York: Acad. press, 1967. – P. 195 – 217.
71. *Eymard P.* L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact // Bull. Soc. math. France. – 1974. – **92**, № 2. – P. 181 – 236.
72. *Hochschild G.* The structure of Lie groups. – San Francisco: Holden-Day, Inc., 1965.
73. *Kelley J. L.* Duality for compact groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1963. – **49**. – P. 457 – 458.
74. *Kirchberg E.* Darstellungen coinvolutioner Hopf - W$*$ -algebren und ihre Anwendung in der nicht-Abelschen Dualitats-theorie lokalkompakter Gruppen. – Berlin: Akad. der Wiss. der DDR, 1977.
75. *Nussbaum A. E.* Extension of Positive Definite Functions and Representation of Functions in Terms of Spherical Functions in Symmetric Spaces of Non-compact Type of Rank 1 // Math. Ann. – 1975. – **215**. – P. 97 – 116.
76. *Ross K. A.* Hypergroups and centers of measure algebras // Symp. Math. Inst. Naz. Alta Mat. – 1977. – **22**. – P. 189 – 203.
77. *Sankaran S.* Hochschild–Tannaka duality theorem for homogeneous space // Rend. Semin. mat. Univ. e politecn. Torino. – 1977–1978. – **36**. – P. 59 – 85.
78. *Segal E.* An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups // Ann. Math. – 1951. – **51**. – P. 293 – 298.
79. *Sutherland C. E.* Direct integral theory for weights and the Plancherel's formula // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – **80**, № 3. – P. 456 – 461.
80. *Takesaki M.* A characterization of group algebras as a converse of Tannaka–Stinspring–Tatsuuma duality theorem // Amer. J. Math. – 1969. – **91**, № 2. – P. 529 – 564.
81. *Takesaki M.* Duality and von Neumann algebras // Lect. Notes Math. – 1972. – **247**. – P. 665 – 786.
82. *Tannaka T.* Über der Dualitatssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen // Tohoku Math. J. – 1938. – **53**. – P. 1 – 12.
83. *Tatsuuma N.* A duality theorem for locally compact group // Proc. Jap. Acad. – I. – 1965. – **41**, № 10. – P. 878 – 882; II. – 1966. – **42**, № 1. – P. 46 – 77; III. – J. Math. Kyoto Univ. – 1967. – **6**, № 2. – P. 187 – 203.
84. *Vrem R. S.* Harmonic analysis on compact hypergroups // Pacif. J. Math. – 1979. – **85**, № 1. – P. 239 – 251.
85. *Walter M. E.* W$*$-algebras and nonabelian harmonic analysis // J. Funct. Anal. – 1972. – **11**, № 1. – P. 239 – 251.
86. *Woronowicz S. L.* Compact matrix pseudogroups // Communs Math. Phys. – 1987. – **111**. – P. 613 – 665.
87. *Woronowicz S. L.* Tannaka – Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups // Invent. Math. Phys. – 1988. – **93**. – P. 35 – 76.

Получено 17. 06. 93