УДК 517.917:34

Э. Ф. ФАЙЗИБАЕВ, Т. КАДЫРБЕКОВ, кандидаты физ.-мат. наук
(Ташкент. ин-т инженеров ирригации и механизации сел. хоз-ва)

Метод двухмасштабного разложения решения интегро-дифференциального уравнения с малым параметром

Посредством метода двухмасштабного разложения строится решение интегро-дифференциального уравнения с малым параметром. Проводится сопоставление найденных решений уравнения Ван-дер-Поля методами двухмасштабного разложения и усреднения. Полученные решения полностью совпадают с точностью до величин второго порядка малости.

За допомогою методу двомасштабного розкладу будується розв'язок інтегро-диференціального рівняння з малим параметром. Проводиться порівняння знайдених розв'язків рівняння Ван-дер-Поля методами двомасштабного розкладу і усереднення. Одержані розв'язки повністю співпадають з точністю до величин другого порядку малості.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon f\left(x, \dot{x}, \int_0^t R(t-s)\,\varphi(x(s), \dot{x}(s))\,ds\right), \tag{1}$$

где ε — малый параметр, $\dot{x} = dx/dt$, $f(x, y, z)$ — некоторая непрерывная функция своих аргументов; $y = dx/dt$, $z = \int_0^t R(t-s)\,\varphi(x(s), \dot{x}(s))\,ds$, $R(t)$ — ядро.

Согласно методу двухмасштабного разложения [1, 2] ищем решение уравнения (1) в виде асимптотического ряда

$$x(t^*, \tau, \varepsilon) = x_0(t^*, \tau) + \varepsilon x_1(t^*, \tau) + \varepsilon^2 x_2(t^*, \tau) + \ldots, \tag{2}$$

где

$$t^* = t. \ \tau = (\varepsilon + \varepsilon^2\omega_2 + \varepsilon^3\omega_3 + \ldots)\,t. \tag{3}$$

Постоянные ω_i, $i = 2, 3, \ldots$, определяем из условия ограниченности решений.

Подставляя выражения (2), (3) в уравнение (1), разлагая функцию $\varepsilon f(x, y, z)$ в ряд по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, находим

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^{*2}} + x_0 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^{*2}} + x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^*\partial\tau} + f\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}\right)ds\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^{*2}} + x_2 = -\left[\frac{\partial^2 x_0}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^*\partial\tau}\omega_2 + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^*\partial\tau}\right] + f_x'\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\cdot\varphi\times\right.$$

$$\times\left.\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}\right)ds\right)x_1 + f_{\dot x}'\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial^* t}, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}\right)ds\right)\left(\frac{\partial x_0}{\partial\tau} +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial x_1}{\partial t^*}\right) + f_z'\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}\right)ds\right)\int_0^{t^*} R(t^*-s)\left[\varphi_x'\times\right.$$

$$\left.\times\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}\right)x_1 + \varphi_{\dot x}'\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial x_0}{\partial\tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t^*}\right)\right]ds, \tag{6}$$

Вводя медленно меняющиеся амплитуду $a = a(\tau)$ и фазу $\psi = \psi(\tau)$, из уравнения (4) находим

$$x_0 = a(\tau)\cos(t^* + \psi(\tau)). \tag{7}$$

Подставляя выражение (7) в правую часть уравнения (5), имеем

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^{*2}} + x_1 = 2\left[\frac{da}{d\tau}\sin(t^* + \psi(\tau)) + a(\tau)\frac{d\psi}{d\tau}\cos(t^* + \psi(\tau))\right] + f(a(\tau)\cos(t^* +$$

$$+\psi(\tau)), -a(\tau)\sin(t^*+\psi(\tau)), \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi[a(\tau(s))\cos(t^*(s)+\psi(\tau(s))),$$

$$-a(\tau(s))\sin(t^*(s)+\psi(\tau(s)))]\,ds). \tag{8}$$

Чтобы исключить появление секулярных (вековых) членов [3] в разложениях, необходимо положить

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a\cos\chi, -a\sin\chi, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi(a(\tau(s))\cos\chi(s), -a\times\right.$$

$$\left.\times(\tau(s))\sin\chi(s))\,ds\right)\sin\chi d\chi = P_1(a),$$

$$a\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a\cos\chi, -a\sin\chi, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi(a(\tau(s))\cos\chi(s), -a\times\right.$$

$$\left.\times(\tau(s))\sin\chi(s))\,ds\right)\cos\chi d\chi = Q_1(a), \tag{9}$$

где $\chi = t^* + \psi(\tau)$.

Так как $\partial x_1/\partial t^* = \partial x_1/\partial\chi$, $\partial\chi/\partial\tau = \partial\psi/\partial\tau$, то переходя в уравнении (8) к переменной χ, получаем

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial\chi^2} + x_1 = 2[P_1(a)\sin\chi + Q_1(a)\cos\chi] + f(a\cos\chi, -a\sin\chi,$$

$$\int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi(a(s)\cos\chi(s), -a(s)\sin\chi(s))\,ds). \tag{10}$$

Определим функции $a^{(1)}(a,\chi)$ и $\theta^{(1)}(a,\chi)$ посредством соотношений

$$\frac{\partial a^{(1)}}{\partial\chi} = -f\left(a\cos\chi, -a\sin\chi, \int_0^{t^*} R(t^*-s)\,\varphi[a(s)\cos\chi(s), -a(s)\sin\chi(s)]\times\right.$$

$$\left.\times ds\right)\sin\chi - P_1(a), \tag{11}$$

$$a\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial\chi}=-f\left(a\cos\varkappa,-a\sin\chi,\int_0^{t^*}R(t^*-s)\varphi[a(s)\cos\chi(s),-a(s)\sin\chi\times\right.$$

$$\left.\times(s)]\,ds\right)\cos\chi-Q_1(a) \qquad (12)$$

и условий

$$\int_0^{2\pi}a^{(1)}(a,\chi)\,d\chi=0,\ \int_0^{2\pi}\theta^{(1)}(a,\lambda)\,d\chi=0. \qquad (13)$$

Тогда из уравнения (10) методом вариации параметров находим

$$x_1=[D_1(\tau)+a^{(1)}(a,\chi)]\cos\chi+[E_1(\tau)-a\theta^{(1)}(a,\chi)]\sin\chi, \qquad (14)$$

где $D_1(\tau)$, $E_1(\tau)$ — медленно меняющиеся функции, определяемые из условия отсутствия вековых членов в выражениях для $x_2(t^*,\tau)$.

Подставляя равенства (7) и (14) в правую часть уравнения (6) и используя условия отсутствия секулярных членов в разложении решений, находим для определения $D_1(\tau)$ и $E_1(\tau)$ уравнения в виде

$$\frac{dD_1}{d\tau}-\frac{dP_1(a)}{da}D_1=P_2(a)-\omega_2P_1(a),$$

$$\frac{dE_1}{d\tau}-\frac{P_1(a)}{a}E_1+\left[\frac{dQ_1(a)}{da}-\frac{Q_1(a)}{a}\right]D_1=Q_2(a)+\omega_2Q_1(a), \qquad (15)$$

где

$$P_2(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{a^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial f_0}{\partial a}+\theta^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial f_0}{\partial\chi}+\Phi_0(a,\chi)\int_0^{t^*}R(t^*-s)\times\right.$$

$$\left.\times\left[a^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial\varphi_0}{\partial a}+\theta^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial\varphi_0}{\partial\chi}\right]ds\right\}\sin\chi d\chi,$$

$$Q_2(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{a^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial f_0}{\partial a}+\theta^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial f_0}{\partial\chi}+\Phi_0(a,\chi)\int_0^{t^*}R(t^*-s)\times\right.$$

$$\left.\times\left[a^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial\varphi_0}{\partial a}+\theta^{(1)}(a,\chi)\frac{\partial\varphi_0}{\partial\chi}\right]ds\right\}\cos\chi d\chi,$$

$$f_0(a,\chi)=f\left(a\cos\chi,-a\sin\chi,\int_0^{t^*}R(t^*-s)\varphi(a\cos\chi,-a\sin\chi)\,ds\right),$$

$$\varphi_0(a,\chi)=\varphi(a\cos\chi,-a\sin\chi),$$

$$\Phi_0(a,\chi)=\frac{\partial}{\partial z}f\left(a\cos\chi,-a\sin\chi,\int_0^{t^*}R(t^*-s)\varphi(a\cos\chi,-a\sin\chi)\,ds\right).$$

Из системы уравнений (15) следует, что если $P_1(a)=0$, то необходимо положить $P_2(a)=0$, так как в противном случае разложение имело бы секулярные члены. Предположив, что $P_1(a)\neq0$, из системы (15) найдем медленно меняющиеся функции $D_1(\tau)$ и $E_1(\tau)$.

Таким образом определяются остальные члены разложения (2). Следовательно, при вычислении члена x_i нужно учитывать вид решения x_{i+1}, а также равномерную пригодность x_0 и x_{i+1}, $i=0,1,\ldots$, на достаточно большом промежутке времени.

Итак, используя соотношения (2), (7) и выражение (14), имеем

$$x(a,\chi,\varepsilon)=a\cos\chi+\varepsilon[(D_1(\tau)+a^{(1)}(a,\chi))\cos\chi+(E_1(\tau)-$$

$$-a\theta^{(1)}(a,\chi))\sin\chi]+\ldots, \qquad (16)$$

$$x(a, \chi, \varepsilon) = [a + \varepsilon (D_1(\tau) + a^{(1)}(a, \chi)) + \ldots] \cos \left[\chi + \varepsilon \left(\theta^{(1)}\left(a, \chi - \frac{E_1(\tau)}{a}\right) + \ldots\right] + \ldots . \quad (17)$$

В качестве примера рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение Ван - дер - Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon \left\{\frac{dx}{dt} - \frac{1}{3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \int_0^t R(t-s)\left[\frac{dx(s)}{ds} - \frac{1}{3}\left(\frac{dx(s)}{ds}\right)^3\right] ds\right\}. \quad (18)$$

Система (9) для уравнения (18) имеет вид

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{2}(1 + P_1)\left(a - \frac{a^3}{4}\right) = P_1(a),$$

$$a\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{1}{2}q_1\left(a - \frac{a^3}{4}\right) = Q_1(a), \quad (19)$$

где

$$P_1 = \int_0^\infty R(\sigma)\cos\sigma d\sigma > 0, \quad q_1 = \int_0^\infty R(\sigma)\sin\sigma d\sigma > 0.$$

Определяя функции $a^{(1)}(a, \psi)$, $\theta^{(1)}(a, \psi)$ с помощью соотношений

$$\frac{\partial a^{(1)}}{\partial\psi} = -\left\{-a\sin\psi + \frac{1}{3}a^3\left(\frac{3}{4}\sin\psi - \frac{1}{4}\sin 3\psi\right) + \int_0^t R(t-s) \times \right.$$
$$\left. \times \left[-a\sin\psi + \frac{1}{3}a^3\left(\frac{3}{4}\sin\psi - \frac{1}{4}\sin 3\psi\right)\right] ds\right\}\sin\psi -$$
$$-\frac{1}{2}(1 + P_1)\left(a - \frac{a^3}{4}\right), \quad (20)$$

$$a\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial\psi} = -\left\{-a\sin\psi + \frac{1}{3}a^3\left(\frac{3}{4}\sin\psi - \frac{1}{4}\sin 3\psi\right) + \int_0^t R(t-s) \times \right.$$
$$\left. \times \left[-a\sin\psi + \frac{1}{3}a^3\left(\frac{3}{4}\sin\psi - \frac{1}{4}\sin 3\psi\right)\right] ds\right\}\cos\psi + \frac{1}{2}q_1\left(a - \frac{a^3}{4}\right)$$

и условий

$$\int_0^{2\pi} a^{(1)}(a, \psi)\, d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \theta^{(1)}(a, \psi)\, d\psi = 0 \quad (21)$$

и подставляя их в правую часть уравнения (6), учитывая при этом соотношение (14), находим для определения $D_1(\tau)$ и $E_1(\tau)$ систему

$$\frac{dD_1}{d\tau} - \frac{1}{2}(1 + P_1)\left(1 - \frac{3}{4}a^2\right)D_1 = \frac{a}{8}\left\{\left[(1 - a^2)q_1 + \frac{a^2}{8}q_3\right] + 2q_1\left(\frac{1}{2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + P_1\right)\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) + \frac{a^2}{8}P_1 q_3\right\} - \frac{1}{2}\omega_2(1 + P_1)\left(a - \frac{a^3}{4}\right), \quad (22)$$

$$\frac{dE_1}{d\tau} - \frac{1}{2}(1 + P_1)\left(1 - \frac{1}{4}a^2\right)E_1 + \left[-\frac{1}{2}q_1\left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) + \frac{1}{2}q_1\left(1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{4}a^2\right)\right]D_1 = -\frac{a}{8}\left\{(1 + P_1)^2\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) - q_1\left[q_1\left(1 - \frac{3}{4}a^2\right) + \frac{a^2}{8}q_3\right]\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}\omega_2 q_1\left(a - \frac{a^3}{4}\right),$$

где

$$P_3 = \int_0^\infty R(\sigma)\cos 3\sigma d\sigma > 0, \; q_3 = \int_0^\infty R(\sigma)\sin 3\sigma d\sigma > 0,$$

$$a = 2a_0/\sqrt{a_0^2 + (4 - a_0^2)\exp(-(1 + P_1)\tau)}.$$

Итак, на данном шаге

$$x(a, \psi, \varepsilon) = a(\tau)\cos\psi + \varepsilon\{[D_1(\tau) + a^{(1)}(a, \psi)]\cos\psi + [E_1(\tau) - a\theta^{(1)} \times (a, \psi)]\sin\psi\} + \ldots. \tag{23}$$

Приводя уравнение (18) к стандартному виду и усредняя получающиеся уравнения согласно второй схеме усреднения [4, 5], находим

$$d\bar{a}/dt = \varepsilon P_1(\bar{a}) + \varepsilon^2\omega_2 P_1(\bar{a}),$$
$$d\bar{\varphi}/dt = \varepsilon Q_1(\bar{a})/\bar{a} + \varepsilon^2\omega_2 Q_1(\bar{a})/\bar{a}, \tag{24}$$

где

$$P_1(\bar{a}) = \frac{1}{2}(1 + P_1)(\bar{a} - \bar{a}^3/4),$$

$$Q_1(\bar{a}) = -\frac{1}{2}q_1(\bar{a} - \bar{a}^3/4),$$

$$a = \bar{a} + \varepsilon[u_{11}(\psi, \bar{a}) + g_{11}(\bar{a})] + \ldots,$$
$$\varphi = \bar{\varphi} + \varepsilon[u_{12}(\psi, \bar{a}) + g_{12}(\bar{a})] + \ldots. \tag{25}$$

Подставляя в формулу (2) значение амплитуды a и фазы φ согласно соотношению (7) и разложениям (25), получаем

$$x(\bar{a}, \psi, \varepsilon) = \bar{a}\cos\psi + \varepsilon[(u_{11}(\psi, \bar{a}) + g_{11}(\bar{a}))\cos\psi - \bar{a}(u_{12}(\psi, \bar{a}) + g_{12}(\bar{a})) \times \sin\psi] + \ldots. \tag{26}$$

Отождествляя D_1 с $g_{11}(\bar{a})$, E_1 с $-\bar{a}g_{12}(\bar{a})$, $a^{(1)}(\bar{a}, \psi)$ с $u_{11}(\bar{a}, \psi)$, $\theta^{(1)}(\bar{a}, \psi)$ с $u_{12}(\bar{a}, \psi)$, можно получить полное соответствие (с точностью до величин второго порядка малости) между разложениями (23) и (26).

1. *Cole I. D., Kevorkian I.* The two variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations. Nonlinear differential equations and nonlinear mechanics.— New York : Acad. press, 1965.
2. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике.— М. : Мир, 1972.— 274 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
4. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974.— 216 с.
5. *Файзибаев Э. Ф., Кадырбеков Т.* Исследование некоторых динамических задач вязкоупругости асимптотическим методом // IX Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— 3.— 540 с.

Получено 25.12.89