УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Минимаксная фильтрация линейных преобразований стационарных последовательностей

Рассмотрена задача линейного среднеквадратически оптимального оценивания преобразования $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\,\xi(-j)$ стационарной случайной последовательности $\xi(k)$ с плотностью $f(\lambda)$ по наблюдениям последовательности $\xi(k) + \eta(k)$ при $k \leqslant 0$, где $\eta(k)$ — некоррелированная с $\xi(k)$ стационарная последовательность с плотностью $g(\lambda)$. Найдены наименее благоприятные спектральные плотности $f_0(\lambda) \in \mathscr{D}_f$, $g_0(\lambda) \in \mathscr{D}_g$, минимаксные (робастные) спектральные характеристики оптимальной оценки $A\xi$ для различных классов плотностей $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_g$.

Розглянута задача лінійного середньоквадратично оптимального оцінювання перетворення $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\,\xi(-j)$ стаціонарної випадкової послідовності $\xi(k)$ з щільністю $f(\lambda)$ за спостереженнями послідовності $\xi(k) + \eta(k)$ при $k \leqslant 0$, де $\eta(k)$ — некорельована з $\xi(k)$ стаціонарна послідовність з щільністю $g(\lambda)$. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda) \in \mathscr{D}_f$, $g_0(\lambda) \in \mathscr{D}_g$, мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальноі оцінки $A\xi$ для різних класів щільностей $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_g$.

Пусть $\xi(k)$, $M\xi(k) = 0$, $\eta(k)$, $M\eta(k) = 0$,— некоррелированные стационарные случайные последовательности, $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ — спектральные плотности $\xi(k)$, $\eta(k)$. Будем предполагать, что коэффициенты $a(j)$, $j = 0, 1, \ldots$, задающие преобразование $A\xi$, удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a(j)| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\,|a(j)|^2 < \infty.$$

Если спектральные плотности $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ регулярны, то они допускают каноническую факторизацию [1]:

$$f(\lambda) = |\varphi(e^{-i\lambda})|^2, \quad \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k; \qquad g(\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda})|^2, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z^k, \tag{1}$$

$$f(\lambda) + g(\lambda) = |d(e^{-i\lambda})|^2 = |b(e^{-i\lambda})|^{-2}, \quad d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \tag{2}$$

$$d(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(f(\lambda) + g(\lambda))\,\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}\,d\lambda\right\}. \tag{3}$$

Для факторизации (2), (3) плотности $f(\lambda) + g(\lambda)$ достаточно регулярности одной из плотностей $f(\lambda)$, $g(\lambda)$. Если плотность $g(\lambda)$ регулярна, то величину среднеквадратической ошибки линейной оценки $\hat{A}\xi$ со спектральной характеристикой $h(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,e^{-ik\lambda}$ можно вычислить по формуле

$$\Delta(h; f, g) = M\,|A\xi - \hat{A}\xi|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda})|^2 (f(\lambda) + g(\lambda))\,d\lambda -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (A(e^{i\lambda}) - h(e^{i\lambda}))\,\overline{A}(e^{i\lambda})\,g(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\overline{A}(e^{i\lambda}) - \overline{h}(e^{i\lambda})) \times$$

$$\times A(e^{i\lambda})\, g(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\lambda})|^2 g(\lambda)\, d\lambda = \sum_{k,j=0}^{\infty} \sum_{u=-\infty}^{\min(-k,-j)} a(k)\, a(j) \times$$

$$\times \psi_{-k-u}\overline{\psi}_{-j-u} - \sum_{k,j=0}^{\infty} (a(k) - h(k))\, \overline{a}(j) \sum_{u=-\infty}^{\min(-k,-j)} \psi_{-k-u}\overline{\psi}_{-j-u} -$$

$$- \sum_{k,j=0}^{\infty} (\overline{a}(k) - \overline{h}(k))\, a(j) \sum_{u=-\infty}^{\min(-k,-j)} \overline{\psi}_{-k-u}\psi_{-j-u} + \sum_{k,j=0}^{\infty} (a(k) - h(k)) \times$$

$$\times (\overline{a}(j) - \overline{h}(j)) \sum_{u=0-\infty}^{\min(-k,-j)} d_{-k-u}\overline{d}_{-j-u} = (\Psi a, \Psi a) - (\Psi(a-h), \Psi a) -$$

$$- (\Psi a, \Psi(a-h)) + (D(a-h), D(a-h)),$$

где $A(e^{i\lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\, e^{-ij\lambda}$, $a = (a_0, a_1, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, \ldots)$, D — оператор, заданный бесконечной матрицей с элементами $d_{kj} = 0$ при $j > k$, $d_{kj} = d_{k-j}$ при $j \leqslant k$; $k, j = 0, 1, \ldots$; Ψ — оператор, заданный матрицей с элементами $\psi_{kj} = 0$ при $j > k$, $\psi_{kj} = \psi_{k-j}$ при $j \leqslant k$; $k, j = 0, 1, \ldots$. Спектральная характеристика $h(f, g) \in L_2^-(f+g)$ оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ при заданных плотностях $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ определяется соотношением

$$\Delta(f, g) = \Delta(h(f, g); f, g) = \min_{h \in L_2^-(f+g)} \Delta(h; f, g).$$

Можно показать, что величину $\Delta(f, g)$ вычисляют по формуле

$$\Delta(f, g) = (\Psi a, \Psi a) - (\overline{B}'\overline{\Psi}'\Psi a, \overline{B}'\overline{\Psi}'\Psi a) = (\overline{\Psi}'\Psi a, a) - (\overline{B}'c_g, \overline{B}'c_g) = (c_g, a) -$$

$$- (\overline{C}_g b, \overline{C}_g b), \tag{4}$$

где вектор $c_g = \overline{\Psi}'\Psi a$, B — оператор, заданный матрицей с элементами $b_{kj} = 0$ при $k < j$, $b_{kj} = b_{k-j}$ при $j \leqslant k$; $k, j = 0, 1, \ldots$; C_g — оператор, заданный матрицей с элементами $c_{kj} = c_{k+j}$, $k, j = 0, 1, \ldots$

Если же плотность $f(\lambda)$ регулярна, то величину среднеквадратической ошибки оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ можно вычислить по формуле

$$\Delta(f, g) = (c_f, a) - (\overline{C}_f b, \overline{C}_f b), \tag{5}$$

где $c_f = \overline{\Phi}'\Phi a$, Φ — оператор, заданный матрицей с элементами $\varphi_{kj} = 0$ при $j > k$, $\varphi_{kj} = \varphi_{k-j}$ при $j \leqslant k$; $k, j = 0, 1, \ldots$ Спектральную характеристику $h(f, g)$ можно вычислить по формуле

$$h(f, g) = [A(e^{i\lambda})\, f(\lambda)\, \overline{d}^{-1}(e^{-i\lambda})]^+ d^{-1}(e^{-i\lambda}) = r_f(e^{i\lambda})\, d^{-1}(e^{-i\lambda}),$$

$$r_f(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\overline{B}'\overline{\Phi}'\Phi a)_k e^{-ik\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (C_f\overline{b})_k e^{-ik\lambda}, \tag{6}$$

если плотность $f(\lambda)$ регулярна, или по формуле

$$h(f, g) = A(e^{i\lambda}) - [A(e^{i\lambda})\, g(\lambda)\, \overline{d}^{-1}(e^{-i\lambda})]^+ d^{-1}(e^{-i\lambda}) = A(e^{i\lambda}) - r_g(e^{i\lambda}) \times$$

$$\times d^{-1}(e^{-i\lambda}), \quad r_g(e^{i\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} (C_g\overline{b})_k e^{-ik\lambda}, \tag{7}$$

если плотность $g(\lambda)$ регулярна.

В случае, когда $\eta(k)$ (или $\xi(k)$) — последовательность некоррелированных случайных величин с дисперсией σ^2 (белый шум), вектор c равен $c = \sigma^2 a$ и $\Delta(f, g) = \sigma^2(a, a) - \sigma^4(\overline{A}b, \overline{A}b)$, где A — матрица с элементами $a_{kj} = a(k+j)$; $k, j = 0, 1, \ldots$

Лемма 1. *Величину среднеквадратической ошибки* $\Delta(f, g)$ *оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *последовательности* $\xi(k)$ *по наблюдениям* $\xi(k) + \eta(k)$ *при* $k \leqslant 0$, *где* $\xi(k)$, $\eta(k)$ — *некоррелированные последовательности с регулярными плотностями* $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, *можно вычислить по формуле* (4) *или* (5). *Спектральную характеристику* $h(f, g)$ *оптимальной оценки можно вычислить по формуле* (6) *или* (7).

Формулы (4)—(7) позволяют вычислить спектральную характеристику и величину среднеквадратической ошибки оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ тогда, когда заданы спектральные плотности $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ последовательностей $\xi(k)$, $\eta(k)$. В случае, когда задается лишь множество $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_g$ возможных плотностей, применяется минимаксный подход к задачам линейного оценивания случайных последовательностей и их преобразований [2—5]. Наименее благоприятные в $\mathcal{D}$ спектральные плотности $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ при оптимальном оценивании $A\xi$ определяются соотношением

$$\Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g)\in\mathcal{D}} \Delta(h(f, g); f, g).$$

Из формул (4), (5) следует, что справедлива такая лемма.

Лемма 2. *Регулярные спектральные плотности* $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ *наименее благоприятные в классе* $\mathcal{D}$ *для оптимального оценивания* $A\xi$, *если коэффициенты* $\varphi_k^0, \psi_k^0, b_k^0$, $k = 0, 1, \ldots$, *факторизации* (1) — (3) *будут решением задачи на условный экстремум*

$$\Delta(f, g) = (c_g, a) - (\overline{C}_g b, \overline{C}_g b) \to \sup, \tag{8}$$

$$g(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 \in \mathcal{D}_g; \qquad f(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-ik\lambda}\Big|^{-2} - \Big|\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 \in \mathcal{D}_f,$$

или задачи на условный экстремум

$$\Delta(f, g) = (c_f, a) - (\overline{C}_f b, \overline{C}_f b) \to \sup, \tag{8'}$$

$$f(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 \in \mathcal{D}_f; \qquad g(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-ik\lambda}\Big|^{-2} - \Big|\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 \in \mathcal{D}_g.$$

В случае, когда одна из плотностей задана, задача (8) (или (8′)) — это задача на условный экстремум лишь по переменной $b = (b_0, b_1, \ldots)$.

Лемма 3. *Спектральная плотность* $f_0(\lambda)$ *будет наименее благоприятной в классе* $\mathcal{D}_f$ *при заданной регулярной плотности* $g(\lambda)$, *если* $f_0(\lambda) + g(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} b_k^0 e^{-ik\lambda}\Big|^{-2}$ *и вектор* $b^0 = (b_0^0, b_1^0, \ldots)$ — *решение задачи на условный экстремум*

$$(\overline{C}_g b, \overline{C}_g b) \to \inf; \qquad f(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-ik\lambda}\Big|^{-2} - g(\lambda) \in \mathcal{D}_f. \tag{9}$$

Лемма 4. *Спектральная плотность* $g_0(\lambda)$ *будет наименее благоприятной в классе* $\mathcal{D}_g$ *при заданной регулярной плотности* $f(\lambda)$, *если* $f(\lambda) + g_0(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} b_k^0 e^{-ik\lambda}\Big|^{-2}$ *и вектор* $b^0 = (b_0^0, b_1^0, \ldots)$ — *решение задачи на условный экстремум*

$$(\overline{C}_f b, \overline{C}_f b) \to \inf, \quad g(\lambda) = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{-ik\lambda}\Big|^{-2} - f(\lambda) \in \mathcal{D}_g. \tag{10}$$

Минимаксная (робастная) спектральная характеристика $h_0(e^{i\lambda})$ оптимальной линейной оценки $A\xi$ определяется соотношением

$$h_0(e^{i\lambda}) \in H_{\mathcal{D}} = \bigcap_{(f,g)\in\mathcal{D}} L_2^-(f + g); \ \min_{h\in H_{\mathcal{D}}} \sup_{(f,g)\in\mathcal{D}} \Delta(h; f, g) = \sup_{(f,g)\in\mathcal{D}} \Delta(h_0; f, g).$$

Наименее благоприятные спектральные плотности $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ и минимаксная спектральная характеристика $h_0(e^{i\lambda})$ образуют седловую точку функции $\Delta(h; f, g)$ на множестве $H_{\mathscr{D}} \times \mathscr{D}$:

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geqslant \Delta(h_0; f_0, g_0) \geqslant \Delta(h_0; f, g), \quad \forall h \in H_{\mathscr{D}}, \quad (f, g) \in \mathscr{D}.$$

Левая часть неравенств выполняется при $h_0 = h(f_0, g_0) \in H_{\mathscr{D}}$. Правая часть неравенств выполняется, если f_0, g_0 — решение задачи на условный экстремум

$$\Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \sup_{(f,g)\in\mathscr{D}} \Delta(h(f_0, g_0); f, g), \tag{11}$$

где

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|r_g(e^{i\lambda})|^2}{f_0(\lambda) + g_0(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|r_f(e^{i\lambda})|^2}{f_0(\lambda) + g_0(\lambda)} g(\lambda) d\lambda,$$

а функции $r_g(e^{i\lambda})$, $r_f(e^{i\lambda})$ определены по формулам (6), (7) при $f(\lambda) = f_0(\lambda)$, $g(\lambda) = g_0(\lambda)$. Из этого соотношения можно определить наименее благоприятные спектральные плотности для конкретных классов $\mathscr{D}$. Задачу на условный экстремум (11) будем рассматривать на более широком множестве, в описании которого сняты ограничения $f(\lambda) \geqslant 0$, $g(\lambda) \geqslant 0$. Решение $f_0(\lambda) \geqslant 0$, $g_0(\lambda) \geqslant 0$ такой задачи будет решением и задачи (11). Задача на условный экстремум $\Delta(h(f_0, g_0); f, g) \to \sup$, $(f, g) \in \mathscr{D}$ эквивалентна задаче на безусловный экстремум на всем пространстве $L_1 \times L_1$ [6]:

$$\Delta_{\mathscr{D}}(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta((f, g) \mid \mathscr{D}) \to \inf,$$

где $\delta((f, g) \mid \mathscr{D})$ — индикаторная функция множества $\mathscr{D}$. Решение f_0, g_0 этой задачи характеризуется условием $0 \in \partial\Delta_{\mathscr{D}}(f_0, g_0)$, где $\partial\Delta_{\mathscr{D}}(f_0, g_0)$ — субдифференциал выпуклого функционала $\Delta_{\mathscr{D}}(f, g)$.

Рассмотрим задачу для множества

$$\mathscr{D}_{0,0} = \left\{(f(\lambda), g(\lambda)) \,\middle|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda \leqslant P_1; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda \leqslant P_2\right\}.$$

Из условия $0 \in \partial\Delta_{\mathscr{D}}(f_0, g_0)$ получим, что наименее благоприятные плотности $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_1 |r_g(e^{i\lambda})|^2 = \alpha_1 \Big|\sum_{k=0}^{\infty} (C_g\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\Big|^2, \tag{12}$$

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_2 |r_f(e^{i\lambda})|^2 = \alpha_2 \Big|\sum_{k=0}^{\infty} (C_f\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\Big|^2. \tag{13}$$

Коэффициенты α_1, α_2, вектор b, матрицы C_g, C_f находятся по факторизации (1)—(3) плотностей $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $f_0(\lambda) + g_0(\lambda)$ и условиям нормировки

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\lambda)\, d\lambda = P_1; \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda)\, d\lambda = P_2. \tag{14}$$

В случае, когда одна из плотностей задана, для определения наименее благоприятной плотности можно использовать одно из соотношений (12), (13). Пусть плотность $g(\lambda)$ фиксирована. Тогда наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda) \in D_0$ имеет вид

$$f_0(\lambda) = \Big[\alpha_1 \Big|\sum_{k=0}^{\infty} (C_g\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 - g(\lambda)\Big]_+. \tag{15}$$

Если плотность $f(\lambda)$ задана, то наименее благоприятная плотность $g_0(\lambda) \in \mathscr{D}_0$ имеет вид

$$g_0(\lambda) = \Big[\alpha_2 \Big|\sum_{k=0}^{\infty} (C_f\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\Big|^2 - f(\lambda)\Big]_+. \tag{16}$$

Матрицы C_g, C_x определяются по факторизации плотностей $g(\lambda)$, $f(\lambda)$, а неизвестные α_1, α_2, b_j, $j=0, 1, \dots$, находятся по факторизации (1)—(3) плотностей $f_0(\lambda)$, $g(\lambda)$, $f_0(\lambda)+g(\lambda)$ (или $f(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $f(\lambda)+g_0(\lambda)$) и условию нормировки (14).

Так, для $g(\lambda)=|1+e^{-i\lambda}|^2$, $A\xi=\xi(0)+\xi(-1)$ наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda)$ равна

$$f_0(\lambda)=\left[c\left|1+\frac{3}{2}e^{-i\lambda}+\frac{3}{2}e^{-2i\lambda}\right|^2-g(\lambda)\right]_+.$$

Теорема 1. *Наименее благоприятные спектральные плотности $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ в классе $\mathcal{D}_{0,0}$ для оптимального оценивания преобразования $A\xi$ определяются соотношениями* (12), (13), (1)—(3), (8), (14). *Если задана регулярная плотность $g(\lambda)$ (или $f(\lambda)$), то наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda)$ ($g_0(\lambda)$) определяется соотношениями* (15), (1)—(3), (9), (14) (*или* (16), (1)— (3), (10), (14)). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки $A\xi$ вычисляется по формулам* (6), (7).

Следствие 1. *Плотность $f_0(\lambda)=P_1P_2^{-1}g(\lambda)$ ($g_0(\lambda)=P_2P_1^{-1}f(\lambda)$) наименее благоприятная в классе $\mathcal{D}_{0,0}$ при заданной регулярной плотности $g(\lambda)$ ($f(\lambda)$) для оптимального линейного оценивания значения $\xi(-N)$.*

Для множества плотностей с моментными ограничениями вида $\mathcal{D}_{MN}=\mathcal{D}_M\times\mathcal{D}_N$:

$$\mathcal{D}_M=\left\{f(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\cos(m\lambda)\,d\lambda=\rho_{1m},\quad m=0,1,\dots,M\right.\right\},$$

$$\mathcal{D}_N=\left\{g(\lambda)\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)\cos(n\lambda)\,d\lambda=\rho_{2n},\quad n=0,1,\dots,N\right.\right\},$$

где $\rho_{10}=P_1$, $\rho_{20}=P_2$, $\rho_1=(\rho_{10},\dots,\rho_{1M})$, $\rho_2=(\rho_{20},\dots,\rho_{2N})$ — строго позитивные векторы, из условия $0\in\partial\Delta_{\mathcal{D}}(f_0,g_0)$ получим

$$f_0(\lambda)+g_0(\lambda)=\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\right|^2\Big/\left|\sum_{m=0}^{M}\alpha(m)\,e^{-im\lambda}\right|^2, \tag{17}$$

$$f_0(\lambda)+g_0(\lambda)=\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_f\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\right|^2\Big/\left|\sum_{n=0}^{N}\beta(n)\,e^{-in\lambda}\right|^2. \tag{18}$$

Коэффициенты $\alpha(m)$, $m=0,1,\dots,M$; $\beta(n)$, $n=0,1,\dots,N$; вектор b, матрицы C_g, C_f определяются по факторизации (1) — (3) плотностей $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, $f_0(\lambda)+g_0(\lambda)$ и условиям $f_0(\lambda)\in\mathcal{D}_M$, $g_0(\lambda)\in\mathcal{D}_N$. Если плотность $g(\lambda)$ фиксирована, то наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda)\in\mathcal{D}_M$ имеет вид

$$f_0(\lambda)=\left[\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_g\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\right|^2\Big/\left|\sum_{m=0}^{M}\alpha(m)\,e^{-im\lambda}\right|^2-g(\lambda)\right]_+. \tag{19}$$

Если плотность $f(\lambda)$ задана, то наименее благоприятная плотность $g_0(\lambda)\in\in\mathcal{D}_N$ имеет вид

$$g_0(\lambda)=\left[\left|\sum_{k=0}^{\infty}(C_f\bar{b})_k e^{-ik\lambda}\right|^2\Big/\left|\sum_{n=0}^{N}\beta(n)\,e^{-in\lambda}\right|^2-f(\lambda)\right]_+. \tag{20}$$

Теорема 2. *Наименее благоприятные спектральные плотности в классе $D_M\times D_N$ определяются соотношениями* (17), (18), (1)—(3), (8), (14) *и условиями $f_0(\lambda)\in\mathcal{D}_M$, $g_0(\lambda)\in\mathcal{D}_N$. Если задана регулярная плотность $g(\lambda)$ (или $f(\lambda)$), то наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda)$ ($g_0(\lambda)$) определяется соотношениями* (19), (1)—(3), (9), (14), $f_0(\lambda)\in\mathcal{D}_N$ (*или* (20), (1)—(3), (3), (10), (14), $g_0(\lambda)\in\mathcal{D}_N$). *Минимаксная спектральная характеристика* *оптимальной линейной оценки преобразования* $A\xi$ *вычисляется по формулам* (6), (7).

Найдем вид наименее благоприятных плотностей для множества $\mathcal{D}_{f_1}^{f_2} \times \mathcal{D}_{g_1}^{g_2}$, где

$$\mathcal{D}_{f_1}^{f_2} = \left\{ f(\lambda) \mid f_1(\lambda) \leqslant f(\lambda) \leqslant f_2(\lambda);\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda = P_1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_{g_1}^{g_2} = \left\{ g(\lambda) \mid g_1(\lambda) \leqslant g(\lambda) \leqslant g_2(\lambda);\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda = P_2 \right\},$$

$f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ — заданные плотности. Множества $\mathcal{D}_{f_1}^{f_2}$, $\mathcal{D}_{g_1}^{g_2}$ описывают «полосовую» модель случайных последовательностей [2]. Из условия $0 \in \partial \Delta_{\mathcal{D}}(f_0, g_0)$ для такого множества получим

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_g \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 (\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + 1)^{-1}, \tag{21}$$

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_f \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 (\gamma_3(\lambda) + \gamma_4(\lambda) + 1)^{-1}, \tag{22}$$

где $\gamma_1(\lambda) \leqslant 0$ п. в. и $\gamma_1(\lambda) = 0$ при $f_0(\lambda) \geqslant f_1(\lambda)$; $\gamma_2(\lambda) \geqslant 0$ п. в. и $\gamma_2(\lambda) = 0$ при $f_0(\lambda) \leqslant f_2(\lambda)$; $\gamma_3(\lambda) \leqslant 0$ п. в. и $\gamma_3(\lambda) = 0$ при $g_0(\lambda) \geqslant g_1(\lambda)$; $\gamma_4(\lambda) \geqslant 0$ п. в. и $\gamma_4(\lambda) = 0$ при $g_0(\lambda) \leqslant g_2(\lambda)$. Если плотность $g(\lambda)$ задана, то наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda) \in D_{f_1}^{f_2}$ имеет вид

$$f_0(\lambda) = \min \left\{ \max \left\{ \alpha_1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_g \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 - g(\lambda), f_1(\lambda) \right\}, f_2(\lambda) \right\}. \tag{23}$$

Если плотность $f(\lambda)$ задана, то наименее благоприятная плотность $g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_{g_1}^{g_2}$ имеет вид

$$g_0(\lambda) = \min \left\{ \max \left\{ \alpha_2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_f \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 - f(\lambda), g_1(\lambda) \right\}, g_2(\lambda) \right\}. \tag{24}$$

Теорема 3. *Наименее благоприятные спектральные плотности в классе* $\mathcal{D}_{f_1}^{f_2} \times \mathcal{D}_{g_1}^{g_2}$ *определяются соотношениями* (21), (22), (1)—(3), (8), (14). *Если задана регулярная плотность* $g(\lambda)$ *(или* $f(\lambda)$*), то наименее благоприятная плотность* $f_0(\lambda) \in \mathcal{D}_{f_1}^{f_2}$ ($g_0(\lambda) \in \mathcal{D}_{g_1}^{g_2}$) *определяется соотношениями* (23), (1)—(3), (9), (14) *(или* (24), (1)—(3), (10), (14)). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки преобразования* $A\xi$ *вычисляется по формулам* (6), (7).

В том случае, когда $f_1(\lambda) = (1 - \varepsilon_1) u_1(\lambda)$, $g_1(\lambda) = (1 - \varepsilon_2) v_1(\lambda)$, $f_2(\lambda) = \infty$, $g_2(\lambda) = \infty$ из соотношений (21)—(24) можно найти вид наименее благоприятных плотностей для множества $D_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = D_{\varepsilon_1} \times D_{\varepsilon_2}$:

$$\mathcal{D}_{\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \mid f(\lambda) = (1 - \varepsilon_1) u_1(\lambda) + \varepsilon_1 u(\lambda);\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda = P_1 \right\},$$

$$\mathcal{D}_{\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda) \mid g(\lambda) = (1 - \varepsilon_2) v_1(\lambda) + \varepsilon_2 v(\lambda);\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda = P_2 \right\},$$

где $u_1(\lambda)$, $v_1(\lambda)$ — фиксированные плотности. Такие множества описывают модели «ε-загрязнения» случайных последовательностей [2]. В этом случае выражения (21)—(24) примут вид

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_g \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 (\gamma_1(\lambda) + 1)^{-1}, \tag{25}$$

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_f \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 (\gamma_3(\lambda) + 1)^{-1}, \tag{26}$$

где $\gamma_1(\lambda) \leqslant 0$ п. в. и $\gamma_1(\lambda) = 0$ при $f_0(\lambda) \geqslant (1-\varepsilon_1) u_1(\lambda)$; $\gamma_3(\lambda) \leqslant 0$ п. в. и $\gamma_3(\lambda) = 0$ при $g_0(\lambda) \geqslant (1-\varepsilon_2) v_1(\lambda)$;

$$f_0(\lambda) = \max\left\{\alpha_1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_g \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 - g(\lambda), (1-\varepsilon_1) u_1(\lambda)\right\}, \tag{27}$$

$$g_0(\lambda) = \max\left\{\alpha_2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_f \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 - f(\lambda), (1-\varepsilon_2) v_1(\lambda)\right\}. \tag{28}$$

Теорема 4. *Наименее благоприятные спектральные плотности в $\mathscr{D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ определяются соотношениями* (25), (26), (1)—(3), (8), (14). *Если задана регулярная плотность $g(\lambda)$ (или $f(\lambda)$), то наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda) \in \mathscr{D}_{\varepsilon_1}$ ($g_0(\lambda) \in \mathscr{D}_{\varepsilon_2}$) определяется соотношениями* (27), (1)—(3), (9), (14) (*или* (28), (1)—(3), (10), (14)). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной оценки $A\xi$ вычисляется по формулам* (6), (7).

Для спектральных плотностей, принадлежащих множеству

$$\mathscr{D}^1_{\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|\, d\lambda \leqslant \varepsilon_1 \right.\right\},$$

$$\mathscr{D}^1_{\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda) \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|\, d\lambda \leqslant \varepsilon_2 \right.\right\},$$

где $f_1(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ — заданные ограниченные плотности (модель «ε-окрестности»), получим

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_g \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 \gamma_1(\lambda), \tag{29}$$

$$f_0(\lambda) + g_0(\lambda) = \alpha_2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_f \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 \gamma_2(\lambda), \tag{30}$$

где $|\gamma_1(\lambda)| \leqslant 1$, $\gamma_1(\lambda) = \operatorname{sign}(f_0(\lambda) - f_1(\lambda))$ при $f_0(\lambda) \neq f_1(\lambda)$; $|\gamma_2(\lambda)| \leqslant 1$, $\gamma_2(\lambda) = \operatorname{sign}(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$ при $g_0(\lambda) \neq g_1(\lambda)$. Поэтому при заданной регулярной плотности $g(\lambda)$ наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda) \in \mathscr{D}^1_{\varepsilon_1}$ задается формулой

$$f_0(\lambda) = \max\left\{\alpha_1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_g \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 - g(\lambda), f_1(\lambda)\right\}. \tag{31}$$

А при заданной регулярной плотности $f(\lambda)$ наименее благоприятная плотность $g_0(\lambda) \in \mathscr{D}^1_{\varepsilon_2}$ задается формулой

$$g_0(\lambda) = \max\left\{\alpha_2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} (C_f \bar{b})_k e^{-ik\lambda} \right|^2 - f(\lambda), g_1(\lambda)\right\}. \tag{32}$$

Коэффициенты α_1, α_2, вектор b, матрицы C_f, C_g находятся по факторизации (1)—(3) и условиям нормировки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_0(\lambda) - f_1(\lambda)|\, d\lambda = \varepsilon_1; \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_0(\lambda) - g_1(\lambda)|\, d\lambda = \varepsilon_2. \tag{33}$$

Теорема 5. *Наименее благоприятные спектральные плотности в классе $\mathscr{D}^1_{\varepsilon_1} \times \mathscr{D}^1_{\varepsilon_2}$ находятся из соотношений* (29), (30), (1) — (3), (8), (33). *Если задана регулярная плотность $g(\lambda)$ (или $f(\lambda)$), то наименее благоприятная плотность $f_0(\lambda) \in \mathscr{D}^1_{\varepsilon_1}$ ($g_0(\lambda) \in \mathscr{D}^1_{\varepsilon_2}$) находится из соотношений* (31), (1)—(3), (9), (33) (*или* (32), (1)—(3), (10), (33)). *Минимаксная спектральная характеристика оптимальной линейной оценки преобразования $A\xi$ вычисляется по формулам* (6), (7).

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука 1971.— Т. 1.— 664 с.
2. *Kassam S. A., Poor V. H.* Robust techniques for signal processing: A survey // Proc. IEEE. — 1985.— 73, N 3.— P. 433—481.
3. *Franke J.* Minimax-robust prediction of discrete time series // Z. Wahrscheinlich keits-theor. und verw. Geb.— 1985.— 68, N 3.— S. 337—364.
4. *Moklyachuk M. P.* Estimation of linear functionals of a stationary stochastic process and a two-person zero-sum game // Stanford Univ. Techn. Rept.— 1981.— N 169.— 87 p.
5. *Моклячук М. П.* О минимаксной фильтрации случайных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1989.— Вып. 40.— С. 73—80.
6. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 144 с.

Получено 10.05.89