УДК 517.947.5.37

А. А. Андрощук

Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений в частных производных

При решении обратной спектральной задачи восстановления дифференциального уравнения Штурма—Лиувилля

$$u_{yy} + q(y)\,u + \lambda u = 0, \quad 0 \leqslant y < \infty, \quad u_y(0) - Qu(0) = 0$$

по его спектральной функции $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, в скалярном [1] ($q(y)$, Q — вещественные) и в операторном [2] ($q(y)$, Q — ограниченные операторы в гильбертовом пространстве H_0) случаях существенно использовались представления решения $\omega(y; \lambda)$ ($\omega(0; \lambda) = I$ — единица в скалярном и единичный оператор в операторном случаях, $\omega_y(0; \lambda) = 0$) этого уравнения в виде (операторы преобразования — о. п.):

$$\omega(y; \lambda) = I \cos\sqrt{\lambda}y + \int_0^y K(y, s) \cos\sqrt{\lambda}s\,ds, \quad I \cos\sqrt{\lambda}y = \omega(y; \lambda) - \int_0^y H(y, s)\,\omega(s; \lambda)\,ds,$$

где $K(y, s)$, $H(y, s)$ — некоторые ядра, обращающиеся в нуль при $s > y$. Эти представления переводят $I \cos\sqrt{\lambda y}$ (решение уравнения Штурма—Лиувилля при $q(y) = 0$) в решение $\omega(y; \lambda)$ и наоборот.

Оказывается, что такого типа представления (будем их тоже называть о. п.) можно использовать и при решении обратных задач в неспектральных постановках [3], в задачах восстановления дифференциального уравнения в частных производных по некоторой информации о решении этого уравнения. Для простейшего одномерного гиперболического уравнения

$$u_{tt} - u_{yy} + c(y)\,u(y, t) = \delta(y)\,\delta(t) \tag{1}$$

($\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака) с краевыми условиями

$$u(y, 0) = u_t(y, 0) = 0, \quad u_y(0, t) = 0, \quad y \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

эта задача формулируется следующим образом: по известному следу $u(0, t)$ решения $u(y, t)$ исходного уравнения восстановить это уравнение (коэффициент $c(y)$). Покажем существование о. п. для задачи (1), (2), которые, естественно, будут несколько отличаться по форме от указанных выше о. п. для уравнения Штурма—Лиувилля.

Продолжим четным образом непрерывный коэффициент $c(y)$ уравнения (1). В результате задача (1), (2) сведется к эквивалентной задаче для уравнения (1) на всей оси с нулевыми начальными данными. Так как функция $u_0(y, t) = \frac{1}{2}\Theta(t - |y|)$ ($\Theta(\cdot)$ — функция Хевисайда) является решением уравнения $u_{0,tt} - u_{0,yy} = \delta(y)\,\delta(t)$ с нулевыми начальными данными, то $u_1(y, t) = u(y, t) - u_0(y, t)$ будет решением уравнения

$$u_{1,tt} - u_{1,yy} + c(y)\,u_1(y, t) = -c(y)\,u_0(y, t), \tag{3}$$

также удовлетворяющей нулевым начальным условиям. Представим это уравнение как абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка для вектор-функций со значениями в $L_2(-\infty, \infty)$ вида

$$u_{1,tt}(t) + Au_1(t) = -cu_0(t), \quad u_1(0) = u_{1,t}(0) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

где $u_1(t) = u_1(\cdot, t)$, A — самосопряженный в $L_2(-\infty, \infty)$ оператор, порожденный дифференциальным выражением $-d^2/dy^2 + c(y)$. Разложение единицы этого оператора имеет вид [4]

$$dE_\lambda \varphi = \omega(y; \lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi; \lambda) \varphi(\xi) d\xi d\rho(\lambda).$$

Отсюда получаем

$$u_1(y, t) = -\int_0^t A^{-1/2} \sin A^{1/2}(t-\tau) \cdot c \cdot u_0(\tau) d\tau = -\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times dE_\lambda c(\cdot) u_0(\cdot, \tau) d\tau = -\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda}} \omega(y; \lambda) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Theta(\tau - |\xi|) \omega(\xi; \lambda) d\xi d\rho(\lambda) d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_{\xi}^{t} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times d\tau \cdot c(\xi) \omega(\xi; \lambda) \omega(y; \lambda) d\xi d\rho(\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1-\cos \sqrt{\lambda}(t-\xi)}{\sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times [\omega_{\xi\xi} + \lambda\omega(\xi; \lambda)] d\xi \cdot \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^t \omega(\xi; \lambda) d\xi - \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}}\right] \times$$

$$\times \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-t}^{t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi; \lambda) \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda)\right] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-t}^{t} \delta(\xi - y) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda) - \frac{1}{2} \Theta(t - |y|).$$

Таким образом, решение $u(y, t)$ уравнения (1) представляется через спектральную функцию $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, оператора A в следующем виде:

$$u(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda). \tag{4}$$

Воспользовавшись теперь о. п. для $\omega(y; \lambda)$, найдем

$$u(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \left[\cos \sqrt{\lambda} y + \int_0^y K(y, s) \cos \sqrt{\lambda} s \cdot ds\right] d\rho(\lambda) =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} y \cdot d\rho(\lambda) \right] +$$

$$+ \int_0^y K(y, s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} s \cdot d\rho(\lambda) \right] ds.$$

Обозначив при $t \geqslant y \geqslant s \geqslant 0$

$$v_0(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} y d\rho(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-y)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t+y)}{\sqrt{\lambda}} \right] d\rho(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-y)}{\sqrt{\lambda}} \omega(0; \lambda) d\rho(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t+y)}{\sqrt{\lambda}} \omega(0; \lambda) d\rho(\lambda) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [u(0, t-y) + u(0, t+y)],$$

придем к прямому о. п. для уравнения (1):

$$u(y, t) = v_0(y, t) + \int_0^y K(y, s) v_0(s, t) ds, \quad t \geqslant y \geqslant s \geqslant 0. \tag{5}$$

Воспользовавшись снова (4) и обратным о. п. для $\omega(y; \lambda)$, получим

$$v_0(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda} y d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \times$$

$$\times \left[\omega(y; \lambda) - \int_0^y H(y, s) \omega(s; \lambda) ds \right] d\rho(\lambda) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \omega(y; \lambda) d\rho(\lambda) \right] -$$

$$- \int_0^y H(y, s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \omega(s; \lambda) d\rho(\lambda) \right] ds = u(y, t) -$$

$$- \int_0^y H(y, s) u(s, t) ds, \quad t \geqslant y \geqslant s \geqslant 0.$$

Таким образом, имеем обратный о. п. для (1):

$$v_0(y, t) = u(y, t) - \int_0^t H(y, s) u(s, t) ds, \quad t \geqslant y \geqslant s \geqslant 0. \tag{6}$$

В настоящей статье доказывается существование о. п. (5), (6) в обратной задаче восстановления по следу $U(0, t)$ дифференциально-операторного уравнения

$$U_{tt} - U_{yy} + (A + c(y)) U(y, t) = I\delta(y)\delta(t), \tag{7}$$

$$U(y, 0) = U_t(y, 0) = 0, \quad U_y(0, t) = 0, \quad t \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \tag{8}$$

в котором A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор (без ограничения общности можно считать $A > 0$) в гильбертовом пространстве H_0 со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, $c(y)$ при каждом y — ограниченный самосопряженный оператор в H_0. Очевидно, что абстрактная задача (7), (8) охватывает большой класс многомерных задач для гиперболических уравнений, в частности простейший случай (1), (2) при $A \equiv 0$ и $I \equiv 1$.

1. Докажем существование решения задачи (7), (8). На множестве $H_{+j} = D(A^j)$ ($D(A^j)$ — область определения оператора A^j, j — некоторое положительное рациональное число) введем скалярное произведение $(f, g)_{+j} = (A^j f, A^j g)_0$. Получим гильбертово пространство H_{+j} с позитивной нормой по отношению к H_0 [4]. Обозначим через H_{-j} пространство с негативной нормой, построенное по H_{+j} и H_0. Имеем цепочку пространств $H_{-j} \supseteq H_0 \supseteq H_{+j}$. Оператор A^j изометрически действует из H_{+j} в H_0. Сопряженный к нему оператор $(A^j)^+ = (A^+)^j$, ограниченно действующий из H_0 в H_{-j}, является расширением оператора A^j, при этом $A^+ > 0$ самосопряжен в H_{-1} с областью определения $D(A^+) = H_0$.

Положим по определению $c(-y) = c(y)$. Пусть $c(y)$ сильно непрерывна в H_0 и пусть $\| c(y)\|_0$ суммируема на полуоси. Интегральное уравнение

$$U_1(y, t)\psi = -\frac{1}{4}\int\limits_{(y-t)/2}^{(y+t)/2}\int\limits_{|\eta|}^{t-|\eta-y|} J_0(A^{1/2}\sqrt{(t-\tau)^2-(y-\eta)^2}) \times$$
$$\times (A + c(\eta))\psi d\tau d\eta - \frac{1}{2}\int\limits_{(y-t)/2}^{(y+t)/2}\int\limits_{|\eta|}^{t-|\eta-y|} J_0(A^{1/2}\sqrt{(t-\tau)^2-(y-\eta)^2} \times$$
$$\times c(\eta) U_1(\eta, \tau)\psi d\tau d\eta \qquad (9)$$

($J_0(\cdot)$ — функция Бесселя, $\psi \in H_{+1}$) однозначно разрешимо последовательными приближениями. Его решение $U_1(y, t)\psi$, $\psi \in H_{+1}$, — вектор-функция со значениями в H_0 — такова, что функция $(U_1(y, t)\psi, \varphi)_0$, $\varphi \in H_{+1}$, два раза непрерывно дифференцируема. Вектор-функция $U(y, t)\psi = \frac{1}{2} I\Theta \times \times (t - |y|)\psi + U_1(y, t)\psi$ со значениями в H_0 является слабым решением [5] задачи (7), (8). Из (9) при $t \geqslant |y|$ можно получить следующие оценки:

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} U_1(y, t)\right\|_{H_{+1}\to H_0} \leqslant C_j e^{\omega_j t}, \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_1(y, t)\right\|_{H_{+1}\to H_{-1}} \leqslant C_2 e^{\omega_2 t},$$
$$j = 0,1;\ C_j > 0,\ \omega_j > 0;\ C_2 > 0,\ \omega_2 > 0. \qquad (10)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если операторная функция $c(y)$ сильно непрерывна в H_0 и $\|c(y)\|_0$ суммируема на полуоси, то для задачи (7), (8) существует единственное слабое решение $U(y, t)\psi = \frac{1}{2} I\Theta(t - |y|)\psi + U_1(y, t)\psi$, $\psi \in \in H_{+1}$, в котором операторная функция $U_1(y, t)$ при $t \geqslant |y|$ (при $0 \leqslant t < < |y|$ $U_1(y, t) = 0$) ограниченно действует из H_{+1} в H_0 и является решением интегрального уравнения (9), при этом функция $(U_1(y, t)\psi, \varphi)_0$, $\varphi, \varphi \in H_{+1}$, дважды непрерывно дифференцируема и при $t \geqslant |y|$ справедливы оценки (10).*

2. Наметим основные моменты доказательства существования обратного о. п. (6) для задачи (7), (8).

Теорема 2. *Пусть $c(y)$, $c_y(y)$, $Ac(y)A^{-1}$ — сильно непрерывные операторные функции в H_0, $\|c(y)\|_0$ суммируема на полуоси. Тогда существует ядро $H(y, s)$, которое является дважды слабо непрерывно дифференцируемой на H_{+2} по y, s операторной функцией, ограниченно действующей при каждом y, s, $t \geqslant y \geqslant s \geqslant 0$, из H_{-1} в H_{-2} такой, что справедливо представление (6) для задачи (7), (8).*

Продифференцируем по t интегральное уравнение (9). После преобразований, в которых используются свойства функции Бесселя $J_0(\cdot)$ и интегрирование по частям, приходим к интегральному уравнению для операторной функции $U_{1,t}(y, t)$:

$$U_{1,t}(y,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_{(y-t)/2}^{(y+t)/2} J_0\left(A^{1/2}\sqrt{(t-|\eta|)^2-(y-\eta)^2}\right)(A+c(\eta))\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(y-t)/2}^{(y+t)/2}\int\limits_{|\eta|}^{t-|\eta-y|} J_0\left(A^{1/2}\sqrt{(t-\tau)^2-(y-\eta)^2}\right)c(\eta)\,U_{1,\tau}(\eta,\tau)\,d\tau d\eta. \quad (11)$$

Операторная функция $U_{1,t}(y, t)$ в силу условий теоремы ограниченно действует из H_{+2} в H_{+1} и является в этих пространствах дважды слабо непрерывно дифференцируемой. Положим $H(y, s) = -2U^{+}_{1,y}(s, y)$, $y \geqslant s \geqslant 0$. Операторная функция $H(y, s)$ удовлетворяет всем условиям теоремы, и при этом выполняется

$$H_{yy} - H_{ss} + H(y,s)(A^{+} + c(s)) = 0, \quad H_s(y,0) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}H(y,y) = \frac{1}{2}(A^{+} + c(y)), \quad y \geqslant s \geqslant 0. \quad (12)$$

Это дифференциальное уравнение относительно $H(y, s)$ и граничные условия получаются из (11) непосредственным дифференцированием. Все производные здесь и в дальнейшем понимаются в слабом смысле. Теперь, воспользовавшись (12), докажем справедливость представления (6) для задачи (7), (8).

З а м е ч а н и е 1. Можно показать, что $H(y, s)$ при $y > s$ ограниченно действует из H_{-1} в $H_{-5/4}$. Для (6) достаточно действия $H(y, s)$ из H_0 в $H_{-1/4}$, так как решение $U(y, t)$ — ограниченный оператор из H_{+1} в H_0.

3. Перейдем к рассмотрению прямого о. п. (5) для задачи (7), (8).

Т е о р е м а 3. *Пусть $c(y)$, $c_y(y)$, $Ac(y)A^{-1}$ — сильно непрерывные операторные функции в H_0, $\|c(y)\|_0$ суммируема на полуоси. Тогда существует ядро $K(y, s)$, являющееся слабо непрерывной по y, s операторной функцией ограниченно действующей при каждом y, s, $t \geqslant y > s \geqslant 0$, из H_0 в $H_{-1/2}$, такое, что справедливо представление* (5) *для задачи* (7), (8).

Наметим доказательство этой теоремы. Благодаря оценкам (10) к уравнению (7) с условиями (8) применимо по переменной t преобразование Лапласа; при этом предполагается, что $t \geqslant y > 0$. При этом условии правая часть в (7) равна нулю:

$$\tilde{U}_{yy} - (A + \lambda^2 I)\tilde{U}(y;\lambda) - c(y)\tilde{U}(y;\lambda) = 0, \quad \tilde{U}_y(0;\lambda) = 0,$$

$$\operatorname{Re}\lambda > \omega = \max(\omega_0, \omega_1, \omega_2). \quad (13)$$

Применив то же преобразование Лапласа при $t \geqslant y > 0$ и к функции $U_0(y,t) = \frac{1}{2}[U(0, t-y) + U(0, t+y)]$, удовлетворяющей уравнению $U_{0,tt} - U_{0,yy} = 0$, $U_0(y,0) = U_{0,t}(y,0) = 0$, $U_{0,y}(0,t) = 0$, получим $\tilde{U}_{0,yy} - \lambda^2\tilde{U}_0(y;\lambda) = 0$, $\tilde{U}_{0,y}(0;\lambda) = 0$. Очевидно, что $\tilde{U}_0(y;\lambda) = \tilde{U}(0;\lambda)\operatorname{ch}\lambda y$. Непосредственно с учетом (13) убеждаемся, что операторная функция $W(s, y; \lambda) = \tilde{U}(y;\lambda)\operatorname{ch}\lambda s - \frac{1}{2}[\operatorname{ch}\lambda(s-y) + \operatorname{ch}\lambda(s+y)]\tilde{U}(0;\lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$W_{yy} - W_{ss} - (A + c(y))W = (A + c(y))\frac{1}{2}[\operatorname{ch}\lambda(s-y) + \operatorname{ch}\lambda(s+y)] \times$$

$$\times \tilde{U}(0;\lambda), \quad W(s,0;\lambda) = W_y(s,0;\lambda) = 0, \quad y \geqslant 0, -\infty < s < \infty. \quad (14)$$

Задача состоит в том, чтобы наперед известное решение W уравнения (14) представить, решая это уравнение, в виде

$$W(s, y; \lambda) = \int\limits_{s-y}^{s+y} T(s, y; \eta) \operatorname{ch} \lambda\eta \cdot \tilde{U}(0; \lambda)\, d\eta \tag{15}$$

с некоторым ядром T, с тем, чтобы, положив здесь $s = 0$ и применив обратное преобразование Лапласа, прийти к (5). Уравнение (14) при $A > 0$ является дифференциальным уравнением гиперболического типа, но нулевые его начальные данные задаются не по временной переменной s, а по пространственной y. Это значительно затрудняет решение уравнения (14).

Рассмотрим интеграл

$$V(s, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{Q \prec P} \frac{e^{-|\xi| A^{1/2}}}{\Gamma(P; Q)} f(\eta\nu)\, dQ, \quad P = (0, s, y) = (0, p),$$

$$Q = (\xi, \nu, \eta) = (\xi, q), \quad \Gamma(P; Q) = \sqrt{(y-\eta)^2 - (s-\nu)^2 - \xi^2}, \tag{16}$$

где f — некоторая оператор-функция и интегрирование производится по внутренности конуса с вершиной в точке P $(y \geqslant 0)$. Переходя к цилиндрическим координатам с началом в точке $(0, s, 0)$, непосредственным дифференцированием убеждаемся (ср. с [4, с. 428)], что V удовлетворяет уравнению

$$V_{yy} - V_{ss} - AV(s, y) = f(s, y) - \frac{1}{\pi} A^{1/2} \int\limits_{q \prec p} \frac{f(q)\, dq}{\Gamma(p, q)}$$

с нулевыми начальными данными по y. Интегрирование здесь производится по внутренности прямоугольного треугольника с вершиной в точке p $(y \geqslant 0)$ и основанием на оси абсцисс. Перенесем $c(y)\, W(s, y; \lambda)$ в уравнении (14) вправо и полученную справа функцию обозначим $g(s, y; \lambda)$.

Если $f(s, y)$ подобрать такой, чтобы выполнялось

$$f(p) - \frac{1}{\pi} A^{1/2} \int\limits_{q \prec p} \frac{f(q)\, dq}{\Gamma(p, q)} = g(p), \tag{17}$$

то $W(p) \equiv V(p)$. Таким образом, необходимо решить интегральное уравнение (17) относительно $f(p)$. Представим (17) в виде свертки $f(p) - \frac{1}{\pi} A^{1/2} [\Theta(y) (\Theta(y^2 - s^2)(y^2 - s^2))^{-1/2}] * f(p) = g(p)$ и применим к этой свертке двумерное преобразование Фурье—Лапласа [6]: $\hat{f}(z) - A^{1/2}(-z^2)^{-1/2} \times \hat{f}(z) = \hat{g}(z)$, или

$$(A^{1/2} - (-z^2)^{1/2} I)\, \hat{f}(z) = -(-z^2)^{1/2} g(z). \tag{18}$$

Здесь $z \in T^{\Gamma^+} = R^2 + i\Gamma^+ = [z = x' + iy', \ \ x' = (x_1, x_0) \in R^2, \ \ y' = (y_1, y_0) \in \Gamma^+]$ — трубчатая область с основанием Γ^+ (конус будущего: $y_0 > |y_1|$); $(-z^2)^{-1/2} = (-z_0^2 + z_1^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{K}^{1/2}_{\Gamma^+}(z)$ — дробная степень ядра Коши [6], голоморфной функции в T^{Γ^+}.

Если $x' \in \Gamma^+$, а y' любое из Γ^+ (даже из R^2), то $-z^2 = -z_0 + z_1^2 \neq \mu \geqslant 0$. Благодаря этому оператор $A^{1/2} - (-z^2)^{1/2} I$ имеет обратный. Поэтому из (18) находим

$$f(z) = -(A^{1/2} - (-z^2)^{1/2} I)^{-1} (-z^2)^{1/2} \hat{g}(z) = -\int^{\infty} \frac{(-z^2)^{1/2}}{\mu^{1/2} - (-z^2)^{1/2}}\, dE_\mu g(z). \tag{19}$$

Функция $\dfrac{(-z^2)^{1/2}}{\mu^{1/2}-(-z^2)^{1/2}}$ голоморфна в $T_{\Gamma^+}=\Gamma^+ + iR^2$. Кроме того, она инвариантна относительно преобразования $\zeta = iz$, которое переводит трубчатую область T_{Γ^+} в $T^{\Gamma^+}=[\zeta=-y'+ix', -y'\in R^2, x'\in\Gamma^+]$. Голоморфная же функция $\dfrac{(\zeta^2)^{1/2}}{\mu^{1/2}-(\zeta^2)^{1/2}}$ принадлежит алгебре $H_+(\Gamma^+)$ [6] с обычным умножением голоморфных функций $k(\zeta)$, удовлетворяющих оценке $|k(\zeta)|\leqslant Me^{c|x'|}(1+|\zeta|^2)^{\alpha/2}[1+\Delta^{-\beta}(x')]$, $\zeta\in T^{\Gamma^+}$ при некоторых $M>0$, $c\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ и $\Delta(x')$ — расстоянии x' до границы конуса Γ^+. Для нее ([6, с. 129]) справедливо представление

$$\frac{(\zeta^2)^{1/2}}{\mu^{1/2}-(\zeta^2)^{1/2}}=(g_\mu(\xi),\ \eta(\xi)\,e^{i(\zeta,\xi)}) \tag{20}$$

с единственной обобщенной функцией $g_\mu\in S'(\Gamma^+)$ ($S'(\Gamma^+)$ — пространство обобщенных функций медленного роста с носителем в Γ^+) независимо от вспомогательной функции $\eta(\xi)\in C^\infty$ со свойствами: $\eta(\xi)=1$, $\xi\in(\Gamma^+)^{\varepsilon/2}$; $\eta(\xi)=0$, $\xi\,\overline{\in}\,(\Gamma^+)^{\varepsilon}$; $|D^\alpha\eta(\xi)|\leqslant C_\alpha$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, при этом g_μ непрерывно зависит от μ. По теореме Л. Шварца [6] g_μ имеет конечный порядок $m\geqslant 0$, т. е. $\|g_\mu\|_{-m}\leqslant C$ и $C>0$, в силу оценки для алгебры $H_+(\Gamma^+)$, не зависит от μ.

Применим обратное преобразование Фурье $F^{-1}_{x'}$ по переменной $x'\in\Gamma^+$ к равенству (19). Так как преобразование Фурье—Лапласа $\hat f(z)=L[f]=F[f(p)\,e^{-(y',p)}]$, то с учетом (20) получаем

$$f(p)\,e^{-(y',p)}=\frac{1}{(2\pi)^2}\left[\int_\varepsilon^\infty (g_\mu(\xi),\eta(\xi)\,e^{-j(y',\xi)}\mathcal{K}_{\Gamma^+}(-ip-\xi))\,dE_\mu\right]*$$
$$*\,g(p)\,e^{-(y'p)},\quad y'\in\Gamma^+.$$

Пусть $y'\to 0$. При $\xi\in\Gamma^+$ $\eta(\xi)=1$. Поэтому $\dfrac{1}{(2\pi)^2}(g_\mu(\xi),\ \mathcal{K}_{\Gamma^+}(-ip-\xi))$ означает преобразование Коши—Бохнера [6] функции $g_\mu(\xi)$ ($p\in\Gamma^+$), равное $g_\mu(-ip)$ — значению в чисто мнимых точках голоморфной функции из $H_+(\Gamma^+)$, граничными значениями которых есть функции из $S'(\Gamma^+)$. Отсюда ($p-q\in\Gamma^+$) $f(p)=\int\limits_{q\prec p} G(A^{1/2};p-q)\,g(q)\,dq$, где $G(A^{1/2};p)$ — сильно непрерывная операторная функция, ограниченно действующая в H_0 (точнее из H_0 в $H_{+1/2}$). Условия теоремы позволяют расширить ее до оператора, ограниченно действующего из H_{-1} в $H_{-1/2}$.

Подставим найденное значение $f(p)$ в (16), использовав при этом выражение, которое было обозначено $g(p;\lambda)$. После преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра для $W(p;\lambda)$, которое решается последовательными приближениями. В результате приходим к (15), а затем и к (5).

З а м е ч а н и е 2. Если дополнительно потребовать сильную непрерывность операторной функции $Ac_y(y)A^{-1}$, то ядро $K(y,s)$ ($H_0\to H_{-1/2}$ при $y>s$) дважды слабо непрерывно дифференцируемы на H_{+2} и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$K_{yy}-K_{ss}-(A^+ + c^+(y))\,K(y,s)=0,\quad K_s(y,0)=0,$$
$$\frac{dK(y,y)}{dy}=\frac{1}{2}(A^+ + c^+(y)),\quad y\geqslant s\geqslant 0. \tag{21}$$

Здесь $A^+: H_{-1/2}\to H_{-3/2}$, $c^+(y): H_{-1/2}\to H_{-1/2}$.

З а м е ч а н и е 3. Ядра $H(y, s)$, $K(y, s)$, существование которых было доказано выше, являются решениями уравнений (12) и (21). Этим же уравнениям удовлетворяют [5] ядра о. п. для операторного уравнения Штурма—Лиувилля на полуоси (гиперболический случай: $A = A^*$, $A > 0$)

$$u_{yy} + Au + c(y)\,u(y; \lambda) + \lambda u = 0, \quad u(0) = I, \quad u_y(0) = 0, \tag{22}$$

которые переводят операторное решение $u(y; \lambda)$ уравнения (22) в $I \cos \sqrt{\lambda y}$ и наоборот. Таким образом, при сделанных выше предположениях (теоремы 2 и 3), существуют о. п. для уравнения (22). Это же верно и для эллиптического случая ($A < 0$) уравнения (22). Например, для стационарного двумерного (в полуплоскости $y \geqslant 0$) уравнения Шредингера $-\Delta u + c(x, y)\,u = \lambda u$, $u_y(x, 0) = 0$, записанного в абстрактном виде (22), о. п. переводят $u(y; \lambda) = u(\cdot, y; \lambda)$ в $I \cos \sqrt{\lambda y} \cdot u(0; \lambda)$ ($u(0; \lambda) = u(\cdot, 0; \lambda)$) и наоборот.

1. *Гельфанд И. М.*, *Левитан Б. М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, **15**, № 4, с. 309—360.
2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях.— Мат. сб., 1960, **51**, № 3, с. 293—342.
3. *Лаврентьев М. М.*, *Васильев В. Г.*, *Романов В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.— Новосибирск : Наука, 1969.— 67 с.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
5. *Андрощук А. А.* Об обратной задаче спектрального анализа для уравнения Штурма—Лиувилля с неограниченным операторным потенциалом.— В кн.: Применение функционального анализа к задачам математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 3—55.
6. *Владимиров В. С.* Обобщение функции в математической физике.— М. : Наука, 1976.— 280 с.

Житомир. пед. ин-т

Получено 03.06.84