УДК 518.5

В. В. ШАЛАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков

В метрике пространства L_2 получены точные неравенства, которые связывают наилучшие приближения дифференцируемых 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами с интегралами, содержащими модули непрерывности высших порядков производных этих функций. Вычислены поперечники по Колмогорову некоторых классов функций, определяемых этими модулями непрерывности.

У метриці простору L_2 одержані точні нерівності, які зв'язують найкращі наближення диференційовних 2π-періодичних функцій тригонометричними поліномами з інтегралами, що містять модулі неперервності вищих порядків похідних цих функцій. Обчислені поперечники по Колмогорову деяких класів функцій, що визначаються цими модулями неперервності.

Обозначим через L_2 пространство измеримых 2π-периодических функций f с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2};$$

через L_2^r — множество функций, у которых $(r-1)$-я производная абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_2 \, (L_2^0 = L_2)$;

$$\omega_k(f; h) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \| \Delta_t^k f(\cdot) \|$$

— модуль непрерывности k-го порядка функции f, где

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x + it).$$

Если $S_{n-1}(f; x)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \varphi_k),$$

$$S_{n-1}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \cos(kx + \varphi_k),$$

то, как хорошо известно, наилучшее приближение функции f в L_2 тригонометрическими полиномами T_n степени не выше $n-1$

$$E_n(f) := \inf_{T_n} \| f - T_n \| = \| f - S_{n-1}(f) \| = \left(\pi \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Н. И. Черных [1] доказал, что для $r = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2r-1} E_n^2(f)}{\int\limits_0^{\pi/n} \omega_1^2(f^{(r)}; t) \sin nt\, dt} = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Близкие соотношения получены Л. В. Тайковым [2, 3]. Обобщение и развитие указанной тематики нашло свое отражение в работах [4—7].

Тем же способом, что и в [1], обобщим равенство (2) на k-е модули непрерывности.

Теорема 1. *При $n, k = 1, 2, \ldots, r = 0, 1, \ldots$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^r \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{r-k/2} E_n(f)}{\left\{\int\limits_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t) \sin nt\, dt\right\}^{k/2}} = \frac{1}{2^k}.$$

Доказательство. Для любой функции $f \in L_2^r$ с учетом (1) и неравенства Гельдера при $k = 2, 3, \ldots$ имеем

$$E_n^2(f) - \pi \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i^2 \cos it = \pi \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i^{2-2/k} \rho_i^{2/k} (1 - \cos it) \leqslant E_n(f)^{2-2/k} \times$$

$$\times \left(\pi \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i (1 - \cos it)^k\right)^{1/k}.$$

Очевидно, что при $k = 1$ полученное неравенство также верно.

Поскольку

$$\| \Delta_t^k f^{(r)}(\cdot)\|^2 = 2^k \pi \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^2 i^{2r} (1-\cos it)^k,$$

то

$$E_n^2(f) - \pi \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i^2 \cos it \leqslant E_n(f)^{2-2/k} \Big(\pi n^{-2r} \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i^2 i^{2r} (1-\cos it)^k\Big)^{1/k} \leqslant$$

$$\leqslant E_n(f)^{2-2/k} \cdot 2^{-1} \cdot n^{-2r/k} \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t).$$

Умножая обе части неравенства на $\sin nt$ и интегрируя по отрезку $[0, \pi/n]$, получаем

$$\int_0^{\pi/n} E_n^2(f) \sin nt dt - \pi \sum_{i=n}^{\infty} \rho_i^2 \int_0^{\pi/n} \cos it \cdot \sin nt dt \leqslant \int_0^{\pi/n} E_n(f)^{2-2/k} \cdot 2^{-1} \cdot n^{-2r/k} \times$$

$$\times \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t) \sin nt dt.$$

Так как для $i \geqslant n \int_0^{\pi/n} \cos it \cdot \sin nt dt \leqslant 0$, то

$$\frac{2}{n} E_n(f)^{2/k} \leqslant \frac{1}{2n^{2r/k}} \int_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t) \sin nt dt$$

и, следовательно,

$$E_n(f) \leqslant 2^{-k} \cdot n^{k/2-r} \left[\int_0^{\pi/n} \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t) \sin nt dt\right]^{k/2}. \tag{3}$$

Легко проверить, что для функции $f(x) = \cos nx$ последнее неравенство обращается в равенство и тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *При $n, k = 1, 2, \ldots, r = 0, 1, \ldots$ и любой $f \in L_2^r$ справедливо неравенство*

$$E_n(f) \leqslant 2^{-k/2} n^{-r} \omega_k(f^{(r)}; \pi/n).$$

Если функция $\omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t)$ удовлетворяет условию

$$2\omega_k^{2/k}(f^{(r)}; \pi/2n) \geqslant \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t) + \omega_k^{2/k}\Big(f^{(r)}; \frac{\pi}{n} - t\Big) \ \forall\, t \in [0, \pi/2n] \tag{4}$$

(в частности, если она выпукла вверх на $[0, \pi/n]$), то неравенство в следствии 1 можно уточнить. Повторяя выкладки, приведенные в [8, с. 266], применительно к интегралу (3), где в качестве функции $l(t)$ вместо линейной взята функция $l(t) = \omega_k^{2/k}(f^{(r)}; t)$ при $t \in]0, \pi/2n]$ и $l(t) = 2\omega_k^{2/k}(f^{(r)}; \frac{\pi}{2n}) - \omega_k^{2/k}\Big(f^{(r)}; \frac{\pi}{n} - t\Big)$ при $t \in \Big[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\Big]$, получим такое следствие.

Следствие 2. *На множестве функций $f \in L_2^r$, у которых функция $\omega_k(f^{(r)}; t)$ удовлетворяет условию* (4), *справедливо неравенство*

$$E_n(f) \leqslant 2^{-k/2} \cdot n^{-r} \omega_k(f^{(r)}; \pi/2n),$$

которое для функции $f(x) = \cos nx$ обращается в равенство.

Результаты теоремы 1 позволяют вычислить поперечники некоторых классов функций. Напомним, что n-мерным поперечником по Колмогорову класса $H \subset L_2$ называют величину (см., например, [8])

$$d_n(H, L_2) = \inf_{P_n} \sup_{f \in H} \inf_{g \in P_n} \| f - g \|,$$

где P_n — n-мерные подпространства из L_2.

Пусть $\Psi(u)$ — положительная возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{u\to 0}\Psi(u)=\Psi(0)=0$. Для любых $k=1,2,\ldots$, $r=0,1\ldots$, как и в [3 — 7], определим в L_2^r следующие классы функций:

$$W_k^r\Psi=\left\{f\in L_2^r:\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega_k^{2/k}(f^{(r)};t)\sin\frac{\pi}{u}t\,dt\leqslant\Psi^2(u);\ 0\leqslant u\leqslant 2\pi\right\}.$$

Положим еще

$$(1-\cos m\theta)_*=\begin{cases}1-\cos m\theta, & m\theta\leqslant\pi;\\ 2, & m\theta>\pi.\end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть функция $\Psi(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Psi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\pi\mu}(1-\cos\theta)_*\sin\frac{\theta}{\mu}\,d\theta\leqslant 2\mu\,\Psi^2(u)$$

при любом $\mu>0$ и любом $u\in(0,2\pi)$. Тогда справедливо равенство

$$d_n(W_k^r\Psi,L_2)=2^{-k/2}n^{-r}\Psi^k\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Доказательство. Оценку сверху получим из теоремы 1:

$$d_n(W_k^r\Psi,L_2)\leqslant\sup_{f\in W_k^r\Psi}E_n(f)\leqslant\sup_{f\in W_k^r\Psi}2^{-k}n^{k/2-r}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\omega_k^{2/k}(f^{(r)};\,t)\sin nt\,dt\right\}^{k/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-k/2}n^{-r}\Psi^k\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Рассмотрим сферу

$$S_n=\left\{T_n(x)=\sum_{k=0}^n\rho_k\cos(kx+\varphi_k):\|T_n\|=2^{-k/2}n^{-r}\Psi^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}.$$

Для получения оценки

$$d_n(W_k^r\Psi,L_2)\geqslant 2^{-k/2}n^{-r}\Psi^{-k}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

с учетом теоремы о поперечнике сферы (см., например, [8, с. 341] достаточно показать, что $S_n\subset W_k^r\Psi$.

Так как для $T_n\in S_n$

$$\omega_k^2(T_n^{(r)};h)=\max_{0\leqslant t\leqslant h}\pi 2^k\sum_{i=1}^n\rho_i i^{2r}(1-\cos it)^k\leqslant 2^k n^{2r}(1-\cos nh)_*^k\cdot\|T_n\|^2=$$

$$=(1-\cos nh)_*^k\,\Psi^{2k}\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

то

$$\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega_k^{2/k}(T_n^{(r)};h)\sin\frac{\pi h}{u}\,dh\leqslant\frac{\pi}{2u}\Psi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\int\limits_0^u(1-\cos nh)_*\times\sin\frac{\pi h}{u}\,dh=$$

$$\frac{n}{2\mu}\Psi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^u(1-\cos nh)_*\sin\frac{nh}{\mu}\,dh=\frac{1}{2\mu}\Psi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\pi\mu}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\Psi^2(u),$$

т. е. $S_n\subset W_k^r\Psi$ и теорема доказана.

Известно [6], что функции $\Psi(u)$, удовлетворяющие условию доказанной теоремы, существуют.

В заключение отметим, что классы функций в L_2, подобные введенным выше, впервые рассмотрел Л. В. Тайков [3, 4].

1. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1967.— 88.— С. 71—74.
2. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки.— 1976.— 20, № 3.— С. 429—434.
3. *Тайков Л. В.* Наилучшее приближение дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Там же. — 1977.— 22, № 4.— С. 536—542.
4. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Там же.— № 2.— С. 285—295.
5. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Мат. заметки.— 1986.— 40, № 3.— С. 341—351.
6. *Айнуллоев Н.* Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР.— 1984.— 29, № 8.— С. 415—418.
7. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 6.— С. 799—803.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.

Получено 23.01.90