УДК 517.54

И. П. Митюк

Оценка снизу суммы емкостей конденсаторов

Устанавливается оценка снизу для суммы емкостей системы конденсаторов.

Встановлюється оцінка знизу для суми ємностей системи конденсаторів.

В настоящей статье устанавливается новое свойство емкостей конденсаторов, которое позволяет получить ряд теорем для функций, регулярных в многосвязной области, в состав границы которой входит по крайней мере две невырожденные граничные компоненты.

Пусть $\{A_k\}$ — совокупность n конденсаторов $A_k=\{G_k, E_0^k, E_1\}$, расположенных в плоскости z, причем E_1 — компактное множество, ограниченное замкнутой аналитической кривой Жордана. В дальнейшем для A_k будем применять обозначение $\{G_k, E_1\}$. Потенциальную функцию конденсатора A обозначим через $\omega(z, A)$, а его емкость — через $|A|$.

Пусть G_k^l, $0<k\leqslant l\leqslant n$, — множество точек плоскости z, принадлежащих пересечению всевозможных областей вида $\bigcup\limits_{\nu=1}^{k} G_{n_\nu}$, где $n_\nu\leqslant l$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, $n_i\neq n_j$, $i\neq j$.

Связную компоненту множества G_k^l, примыкающую к E_1, обозначим через $\dot{G}_k^l$, причем будем полагать, что $G_0^l=\varnothing$ $\forall l$ и $G_k^0=C\setminus E_1$ при $k>0$. Будем также рассматривать конденсаторы $C_k^l=\{\dot{G}_k^l, E_1\}$, причем для упрощения записи используем обозначение $C_k^n=C_k$.

При принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой системы конденсаторов $\{A_k\}_1^n$ указанного вида справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}|A_k|\geqslant\sum_{k=1}^{n}|C_k|. \tag{1}$$

Переходя к доказательству теоремы, отметим прежде всего справедливость следующего равенства:

$$G_k^n=G_k^{n-1}\cap(G_{k-1}^{n-1}\cup G_n),\qquad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{2}$$

Равенство проверяется непосредственно, причем при $k=1$ мы учитываем, что $G_0^{n-1}=\varnothing$, а при $k=n=1$ — $G_1^0=C\setminus E_1$, $G_0^0=\varnothing$.

Установим два важных для дальнейшего свойства введенных множеств.

1. Если $z\in\dot{G}_k^n\to z'\in\partial\dot{G}_k^n$, то $z'\in\partial\dot{G}_k^{n-1}\cup\partial\dot{G}_{k-1}^{n-1,n}$, где $G_k^{n-1}\cup G_n=G_k^{n-1,n}$, а ∂G — граница области G. Из (2) следует, что

$$\dot{G}_k^n\subset\dot{G}_k^{n-1}\cap(G_{k-1}^{n-1}\,\dot{\cup}\,G_n)=\dot{G}_k^{n-1}\cap\dot{G}_{k-1}^{n-1,n},\qquad 0<k\leqslant n. \tag{3}$$

Действительно, если $z\in\dot{G}_k^n$, то найдется непрерывная кривая $\Gamma\subset G_k^n$, соединяющая точку z с некоторой точкой $z_0\in\partial E_1$. Эта кривая в силу равенства (2) и очевидного включения $\dot{G}_k^n\subset G_k^n$ будет принадлежать как G_k^{n-1}, так и $G_{k-1}^{n-1,n}$. Следовательно, $z\in\dot{G}_k^{n-1}\cap\dot{G}_{k-1}^{n-1,n}$.

Так как $z'\in\partial\dot{G}_k^n\subset\partial G_k^n\subset\partial G_k^{n-1}\cup\partial G_{k-1}^{n-1,n}$, то z' является либо граничной, либо внешней точкой множества $\dot{G}_k^{n-1}\cap\dot{G}_{k-1}^{n-1,n}$. В силу (3) $z\in\dot{G}_k^{n-1}\cap\cap\dot{G}_k^{n-1,n}$, поэтому z' является граничной точкой одного из множеств $\dot{G}_k^{n-1}$ или $\dot{G}_k^{n-1,n}$.

2. В области $\dot{G}_k^n$ справедливы неравенства

$$\omega(z, C_k^{n-1,n})\geqslant\omega(z, C_k^{n-1}),\ \ \omega(z, C_k^{n-1,n})\geqslant\omega(z, C_{k-1}^{n-1,n}), \tag{4}$$

где через $C_j^{n-1,n}$ обозначим конденсатор $\{\dot{G}_j^{n-1,n}, E_1\}$, $j=k$, $k-1$.

Неравенства (4) следуют из свойств потенциальной функции и следующих включений:

$$\dot{G}_k^{n-1,n}=\dot{G}_k^{n-1}\cup G_n\supset\dot{G}_k^{n-1},\ \dot{G}_k^{n-1,n}=\dot{G}_k^{n-1}\cup G_n\supset\dot{G}_{k-1}^{n-1}\cup G_n=\dot{G}_{k-1}^{n-1,n},$$

$$\dot{G}_k^{n-1}\cap\dot{G}_{k-1}^{n-1,n}=\dot{G}_k^{n-1}\cap(\dot{G}_{k-1}^{n-1}\cup G_n)\supset\dot{G}_k^n.$$

При доказательстве (1) можно без ограничения общности предположить, что границы областей G_k, $\dot{G}_k^l$, $0<k\leqslant l\leqslant n$, состоят из конечного

числа невырожденных аналитических дуг, так как общий случай следует из этого с помощью аппроксимации.

Рассмотрим теперь гармоническую в области $\dot{G}_n^k$ функцию

$$\omega_k(z) = \omega(z, C_k) + \omega(z, C_k^{n-1,n}) - \omega(z, C_k^{n-1}) - \omega(z, C_{k-1}^{n-1,n}). \quad (5)$$

Пусть $z \in \dot{G}_k^n \to z' \in \partial\dot{G}_k^n$. В силу свойства 1 z' будет граничной точкой одной из областей $\dot{G}_k^{n-1}$ или $\dot{G}_{k-1}^{n-1,n}$. Следовательно, разность между $\omega(z, C_k)$ и потенциальной функцией одного из конденсаторов C_k^{n-1} или $C_{k-1}^{n-1,n}$ будет стремиться к нулю.

С другой стороны, в силу (4) второе слагаемое в правой части (5) не меньше потенциальной функции каждого из конденсаторов C_k^{n-1} или $C_{k-1}^{n-1,n}$. Следовательно, $\omega_k(z') \geqslant 0$, $\forall z' \in \partial\dot{G}_k^n$, а поэтому $\omega_k(z) \geqslant 0$, $z \in \dot{G}_k^n$.

Учитывая, что на ∂E_1 $\omega_k(z) = 0$, и обозначая через $\partial\omega_k(z)/\partial n$ производную по нормали к ∂E_1, направленной внутрь области $\dot{G}_k^n$, получаем $\int\limits_{\partial E_1} \frac{\partial\omega_k(z)}{\partial n}\, ds \geqslant 0$, где ds — элемент дуги.

Поскольку в случае конденсатора $A = \{G, E_1\}$ рассматриваемого вида

$$|A| = \int\limits_{\partial E_1} \left| \frac{\partial\omega(z, A)}{\partial n} \right| ds = -\int\limits_{\partial E_1} \frac{\partial\omega(z, A)}{\partial n}\, ds,$$

то с учетом последнего неравенства получаем

$$|C_k| + |C_k^{n-1,n}| \leqslant |C_k^{n-1}| + |C_{k-1}^{n-1,n}|.$$

Полагая $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и суммируя, находим

$$\sum_{k=1}^{n} |C_k| + \sum_{k=1}^{n-1} |C_k^{n-1,n}| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |C_k^{n-1}| + \sum_{k=1}^{n-1} |C_{k-1}^{n-1,n}|.$$

Без ограничения общности можно считать каждое слагаемое $|C_k^{n-1,n}| \neq \infty$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Действительно, в противном случае, учитывая что при $1 \leqslant k \leqslant n-2$

$$\dot{G}_k^{n-1,n} = \dot{G}_k^{n-1} \cup G_n \supset G_n,$$

мы получили бы $|A_n| = \infty$ и доказываемое неравенство было бы очевидным.

После сокращения полученного неравенства на $\sum\limits_{k=1}^{n-2} |C_{k-1}^{n-1,n}|$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} |C_k| + |C_n^{n-1,n}| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |C_k^{n-1}| + |C_0^{n-1,n}|.$$

Учитывая, что $G_0^{n-1,n} = G_0^{n-1} \cup G_n = G_n$ и $G_{n-1}^{n-1} \cup G_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$, т. е. $C_0^{n-1,n} = A_n$ и $C_n^{n-1,n} = C_n$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |C_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |C_k^{n-1}| + |A_n|. \quad (6)$$

Применяя неравенство (6) к первым $n-1$ конденсаторам системы $\{A_k\}_1^n$, а затем к $n-2$ и т. д. до $n = 2$ и подставляя найденные оценки в предыдущие, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} |C_k| \leqslant |C_1^1| + \sum_{k=2}^{n} |A_k|.$$

Так как $C_1^1 = A_1$, то полученное неравенство совпадает с (1).

Неравенство (1) распространяет на случай конденсаторов свойство, установленное для трансфинитных диаметров компактных множеств Г. Ренгли [1] и М. Клейном [2].

Пусть в плоскости ζ задан конденсатор $A = \{G, E_1\}$, причем $\partial E_1 = \alpha$ состоит из конечного числа замкнутых аналитических кривых Жордана. Обозначим через $\mathfrak{R}^p(G, \alpha)$ класс регулярных в области G функций $z = f(\zeta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $z = f(\zeta)$ отображает α на $|z| = 1$, причем $\int\limits_{\alpha} d\arg f(z) = p$;

2) $|f(\zeta)| > 1$, $\zeta \in G$.

Пусть $G_f = \{z : z = f(\zeta), \zeta \in G\}$, $E = \{z : |z| \leqslant 1\}$, $A_f = \{G_f, E\}$. Результат поворота вокруг начала координат области G_f на угол $\frac{2\pi}{n} j$ обозначим через G_j. Введем в рассмотрение конденсатор $A_j = \{G_j, E\}$.

В работе [3] было установлено неравенство

$$p\,|A_f| \leqslant |A|. \tag{7}$$

Опираясь на неравенства (1) и (7), с помощью симметризаций Пойа и Маркуса, в классе $\mathfrak{R}^p(G, \alpha)$ можно установить ряд теорем покрытия, которые являются в определенном смысле распространением на случай функций класса $\mathfrak{R}^p(G, \alpha)$ результатов, установленных в работе [4] для класса $\mathfrak{R}^p_{w_0}(G, z_0)$. Формулировка и полное доказательство указанных результатов содержится в работе [5].

1. *Renggli H.* An inequality for logarithmic capacities // Pacif. J. Math. —1961. — 11, 1. —P. 313—314.
2. *Klein M.* Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping. // Ibid.— 1967.— 22, N 2.— P. 267—279.
3. *Митюк И. П.* Принцип симметризации для кольца и некоторые его применения // Сиб. мат. журн.— 1965.— № 6.— С. 1282—1291.
4. *Митюк И. П.* Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия // Изв. вузов. Сер. мат.— 1987.— № 9.— С. 10—18.
5. *Митюк И. П.* Конденсаторы и теоремы покрытия // Сиб. мат. журн.— 1988.— № 4.— С. 220—224.

Куб. ун-т, Краснодар

Получено 20.07.87