УДК 517.928.4

В. Ф. Сафонов

Аналитичность по параметру регуляризованных решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных задач

Рассматривается слабо нелинейная сингулярно возмущенная задача с независящей от времени правой частью. Показано, что регуляризованные асимптотические ряды, получаемые методом Ломова, являются аналитическими по параметру и регуляризирующим переменным.

Розглядається слабо нелінійна сингулярно збурена задача з незалежною від часу правою частиною. Показано, що регуляризовані асимптотичні ряди, одержувані методом Ломова, являються аналітичними по параметру і регуляризуючим змінним.

Рассматривается сингулярно возмущенная задача

$$\varepsilon \dot{y} = Ay + \varepsilon f(y), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T], \quad T \leqslant +\infty, \tag{1}$$

где $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $A = (a_{ij})$ — постоянная $n \times n$-матрица, $y^0 \in \mathbb{C}^n$ — заданный постоянный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Для построения асимптотических решений задачи (1) привлекается метод нормальных форм [1], который в рассматриваемом случае приводит к асимптотике, совпадающей с регуляризованной асимптотикой метода Ломова [2]. Показывается, что регуляризованная асимптотика (точнее: регуляризованные асимптотические ряды) при определенных требованиях, описываемых ниже, обладает свойством аналитичности по (v, ε), где v — вектор регуляризирующих переменных, удовлетворяющий нормальной форме (2). Аналогичный результат в линейном случае и при менее жестких ограничениях на оператор A и его спектр $\{\lambda_j,\ j = \overline{1, n}\}$ получен в работе [1].

1. Алгоритм нормальных форм. Задачу (1) будем рассматривать при следующих условиях:

1) $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$;

2) $\lambda_i \neq 0,\ i = \overline{1, n}$;

3) $(m, \lambda) \equiv m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n \neq \lambda_j, \quad j = \overline{1, n},\ |m| \equiv m_1 + \ldots + m_n \geqslant 2$;

4) существует прямая (п), проходящая через нуль комплексной плоскости λ, такая, что все λ_j лежат по одну сторону от нее и на ней нет точек λ_j;

5) $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0,\ j = \overline{1, n}$;

6) вектор-функция $f(y) = \{f_1, \ldots, f_n\}$ представима рядом

$$f(y) = \sum_{|m| \geqslant 2} f^{(m)} y^m \equiv \sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_n \geqslant 2 \\ m_j \geqslant 0,\, j = \overline{1, n}}} f^{(m_1, \ldots, m_n)}\, y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n},$$

абсолютно сходящимся в полицилиндре $\Pi = \{y : |y_j| < R,\ j = \overline{1, n}\}$, где $R > 0$ — постоянная.

В этих предположениях разовьем алгоритм нормальных форм построения асимптотического решения задачи (1). Введем для этого вектор $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$, удовлетворяющий нормальной форме

$$\varepsilon dv/dt = Av, \quad v(0, \varepsilon) = v^0 \equiv \mathbb{C} \cdot \bar{1}, \tag{2}$$

где $\bar{1} = \{1, \ldots, 1\}$ — вектор, состоящий из единиц, $\mathbb{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ — матрица из собственных векторов оператора A $(Ac_j = \lambda_j c_j,\ j = \overline{1, n})$. Вместо задачи (1) будем рассматривать задачу

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial v} Av - A\tilde{y} = \varepsilon f(\tilde{y}), \quad \tilde{y}(0, v^0, \varepsilon) = y^0 \tag{3}$$

для функции $\tilde{y} = \tilde{y}(t, v, \varepsilon)$. Если $\tilde{y} = \tilde{y}(t, v, \varepsilon)$ — решение задачи (3), то его сужение на векторе $v = v(t, \varepsilon)$, удовлетворяющем нормальной форме (2), будет, очевидно, точным решением задачи (1). Определяя решение задачи (3) в виде ряда

$$\tilde{y}(t, v, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, v), \tag{4}$$

получаем следующие итерационные задачи для коэффициентов этого ряда:

$$\mathcal{L} y_0(t, v) \equiv \frac{\partial y_0}{\partial v} Av - Ay_0 = 0, \quad y_0(0, v^0) = y^0, \tag{ε^0}$$

$$\mathcal{L} y_1(t, v) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} + f(y_0), \quad y_1(0, v^0) = 0, \tag{ε^1}$$

$$\ldots$$

$$\mathcal{L} y_k(t, v) = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + P_k, \quad y_k(0, v^0) = 0, \tag{ε^k}$$

где $P_k \equiv P_k(y_0, \ldots, y_{k-1})$ — некоторые многочлены от $y_1, \ldots, y_{k-1}$ с коэффициентами, зависящими от частных производных функции $f(y)$ в точке $y = y_0(t, v)$. Наше первое утверждение касается разрешимости гомологического уравнения

$$\mathscr{L}y(t, v) \equiv \frac{\partial y}{\partial v} Av - Ay = h(v) \tag{5}$$

в классе U вектор-функций $y(t, v) = \{y_1, \dots, y_n\}$, представимых рядами

$$y(t, v) \equiv y(v) = \sum_{|m|\geqslant 1} y^{(m)} v^m, \quad y^{(m)} \in \mathbb{C}^n,$$

абсолютно сходящимися в полицилиндре $G = \{v : |v_j| < \rho,\ j = \overline{1, n}\}$, где $\rho > 0$ — постоянная.

Теорема 1. *Пусть спектр оператора A удовлетворяет требованиям 1 — 4 и правая часть $h(v) = \sum_{j=1}^{n} h^{e_j} v_j + \sum_{|m|\geqslant 2} h^{(m)} v^m$ системы (5) принадлежит классу U. Тогда для разрешимости гомологического уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы*

$$((h^{e_1}, \dots, h^{e_n}) c_j, d_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{6}$$

(здесь d_j — j-й столбец матрицы $\mathbb{C}^{-1*}$, (,) — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^n$, $e_j = \{0, \dots, \underset{(j)}{1}, \dots, 0\}$).

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства аналогичного утверждения работы [1].

Заметим, что при выполнении требования (6) система (5) имеет в классе U решение, представимое в виде

$$y(v) = \mathbb{C}\mathfrak{A}\mathbb{C}^{-1} v + \sum_{|m|\geqslant 2} y^{(m)} v^m, \tag{7}$$

где $\mathfrak{A} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — диагональная матрица с произвольными числами α_j, $j = \overline{1, n}$, векторы $y^{(m)} \in \mathbb{C}^n$ однозначно определяются по правой части $h(v)$.

Очевиден следующий результат.

Теорема 2. *Пусть спектр оператора A удовлетворяет требованиям 1—4, а правая часть $h(v) \in U$ системы (5) — требованию (6). Тогда для произвольного постоянного вектора $y_* \in \mathbb{C}^n$ задача (5) с начальным условием $y(v^0) = y_*$ однозначно разрешима в U.*

В самом деле, подчиняя (7) условию $y(v^0) = y_*$, получаем систему $\mathbb{C}\mathfrak{A}\mathbb{C}^{-1}\mathbb{C}\cdot\overline{1} = y_* - \sum_{|m|\geqslant 2} y^{(m)} \equiv z_*$, откуда находим

$$\alpha_j = (\mathbb{C}^{-1} z_*, e_j) = (z_*, d_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Тем самым решение (7) системы (5) определяется в классе U однозначно.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (ε^k), находим их решения в классе U. Этот процесс приведет к построению ряда (4). Взяв сужение этого ряда на векторе $v = e^{\frac{1}{\varepsilon} \overline{At}} \overline{\mathbb{C}} \cdot \overline{1}$, удовлетворяющем нормальной форме (2), получим асимптотическое решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (1). Нетрудно видеть, что оно будет регуляризованным [2]. Наша дальнейшая задача — показать, что ряд (4) сходится по ε (при каждом фиксированном v) в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$.

2. Аналитичность по параметру решения расширенной системы. Алгоритм нормальных форм, изложенный выше, позволяет построить ряд (4), где все $y_k(t, v) \in U$. Поскольку элементы пространства U не зависят от t, то и ряд (4) также не зависит от t. Подставляя его в (3), видим, что он формально удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial v} Av - A\tilde{y} = \varepsilon f(\tilde{y}), \quad \tilde{y}(v^0, \varepsilon) = y^0. \tag{8}$$

Покажем, что эта система имеет единственное решение, аналитически зависящее от (ε, v). Последнее будет означать, что ряд (4) сходится в обычном смысле в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$ (при каждом фиксированном v).

Будем пока искать решение системы (8) без учета начального условия $\tilde{y}(v^0, \varepsilon) = y^0$. Сделав в (8) замены переменных $u = \mathfrak{A}\mathbb{C}^{-1}v$, $\tilde{y} = \mathbb{C}\xi$, где $\mathfrak{A} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — диагональная матрица, получим систему

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \Lambda u - \Lambda \xi = \varepsilon \sum_{|m| \geqslant 2} q^{(m)} \xi^m, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{9}$$

где ряд $\sum\limits_{|m| \geqslant 2} q^{(m)} \xi^m \equiv \mathbb{C}^{-1} f(\mathbb{C}\xi)$ сходится абсолютно в области $\Pi^* = \{\xi : |(\mathbb{C}\xi, e_j)| < R,\ j = \overline{1, n}\}$. Определяя решение системы (9) в виде рядов

$$\xi_i(u, \varepsilon) = u_i + \sum_{|m| \geqslant 2, k \geqslant 0} \xi_i^{(m,k)} u^m \varepsilon^k, \quad i = \overline{1, n}, \tag{10}$$

получаем следующую рекуррентную систему уравнений для коэффициентов этих рядов

$$[(m, \lambda) - \lambda_i]\, \xi_i^{(m,k)} = P_i^{(m,k)} (\xi_j^{(\mu,\sigma)}, q_j^{(\nu)}), \quad |m| \geqslant 2, \quad k \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{11}$$

где $P_i^{(m,k)}$ — некоторые многочлены от указанных аргументов с положительными коэффициентами, причем $|(m, k)| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} m_j + k > |(\mu, \sigma)| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j + \sigma$. Поскольку выполнено условие 3, уравнения (11) однозначно разрешимы, причем

$$\xi_i^{(m,k)} = \frac{P_i^{(m,k)} (\xi_j^{(\mu,\sigma)}, q_j^{(\nu)})}{(m, \lambda) - \lambda_i}, \quad |m| \geqslant 2, \quad k \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Следовательно, система (9) разрешима в классе формальных рядов (10). Покажем, что эти ряды сходятся. Построим для этого мажорирующие уравнения

$$p\bar{\xi}_i = pu_i + \varepsilon \sum_{|m| \geqslant 2} |q_i^{(m)}|\, \xi^m, \quad i = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где $p = \inf\limits_{|m| \geqslant 2, i = \overline{1,n}} |(m, \lambda) - \lambda_i|$. Определяя решения этих уравнений в виде рядов

$$\bar{\xi}_i(u, \varepsilon) = u_i + \sum_{|m| \geqslant 2, k \geqslant 0} \bar{\xi}_i^{(m,k)} u^m \varepsilon^k, \tag{14}$$

получаем аналогичную систему уравнений для коэффициентов $\bar{\xi}_i^{(m,k)}$:

$$p\bar{\xi}_i^{(m,k)} = P_i^{(m,k)} (\bar{\xi}_j^{(\mu,\sigma)}, |q_j^{(\nu)}|), \quad |m| \geqslant 2, \quad k \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n},$$

где $P_i^{(m,k)}$ — те же многочлены, что и в (11), но зависящие от $\bar{\xi}_j^{(\mu,\sigma)}, |q_j^{(\nu)}|$. Используя (12), находим

$$|\xi_i^{(m,k)}| \leqslant \frac{P_i^{(m,k)} (|\xi_j^{(\mu,\sigma)}|, |q_j^{(\nu)}|)}{|(m, \lambda) - \lambda_i|} \leqslant \frac{1}{p} P_i^{(m,k)} (|\xi_j^{(\mu,\sigma)}|, |q_j^{(\nu)}|). \tag{15}$$

Предположив, что при $2 \leqslant |(m, k)| < r$ выполняются неравенства

$$|\xi_i^{(m,k)}| \leqslant \bar{\xi}_i^{(m,k)}, \quad i = \overline{1, n} \tag{16}$$

(при $|(m, k)| = 2$ они очевидны), получим из (15), что при $|(m, k)| = r$ справедливы неравенства

$$|\xi_i^{(m,k)}| \leqslant \frac{1}{p} P_i^{(m,k)} (\bar{\xi}_j^{(\mu,\sigma)}, |q_j^{(\nu)}|) = \bar{\xi}_i^{(m,k)}.$$

Тем самым мажорирующие соотношения (16) показаны для всех $|(m, k)| \geqslant$ $\geqslant 2$.

Переписав уравнения (13) в виде

$$F_i(\bar{\xi}, u, \varepsilon) \equiv p\bar{\xi}_i - pu_i - \varepsilon \sum_{|m|\geqslant 2} |q_i^{(m)}| \bar{\xi}^m = 0, \ i = \overline{1, n},$$

с учетом того, что якобиан $|(\partial F_i/\partial \bar{\xi}_j)| = p^n > 0$ в точке $(\bar{\xi}, u, \varepsilon) = (0, 0, 0)$, получаем, что уравнения (13) голоморфно разрешимы в некоторой области $G^* = \{(u, \varepsilon) : |u_j| < \rho_0, \ |\varepsilon| < \varepsilon_0, \ j = \overline{1, n}\}$. Следовательно, ряды (14) (а вместе с ними и ряды (10)) абсолютно сходятся в области G^*. Вернувшись к прежним обозначениям, видим, что система (8) имеет решение в виде рядов

$$\tilde{y}(v, \varepsilon) = \mathbb{C}\xi \equiv \mathbb{C}\mathfrak{A}\mathbb{C}^{-1}v + \sum_{|m|\geqslant 2, k\geqslant 0} \mathbb{C}\xi^{(m,k)} (\mathfrak{A}\mathbb{C}^{-1}v)^m \varepsilon^k, \tag{17}$$

сходящихся абсолютно в области $G_0 = \{(v, \varepsilon) : |\alpha_j| |(v, d_j)| < \rho_0, \ |\varepsilon| < \varepsilon_0, \ j = \overline{1, n}\}$, где α_j — элементы матрицы $\mathfrak{A}$. Подчиним (17) начальному условию $\tilde{y}(v^0, \varepsilon) = y^0$. Будем иметь

$$\Phi(\alpha, \varepsilon, y^0) \equiv \mathbb{C}\alpha + \sum_{|m|\geqslant 2, k\geqslant 0} \mathbb{C}\xi^{(m,k)} \alpha^m \varepsilon^k - y^0 = 0. \tag{18}$$

Поскольку якобиан $|(\partial \Phi_i/\partial \alpha_j)| = \det \mathbb{C} \neq 0$ в точке $(\alpha, \varepsilon, y^0) = (0, 0, 0)$, то система (18) голоморфно разрешима относительно $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \equiv$ $\equiv \alpha(\varepsilon, y^0)$ в некоторой области $G_1 = \{(y^0, \varepsilon) : |y_j^0| < \delta_1, \ |\varepsilon| < \varepsilon_1, \ j = \overline{1, n}\}$, причем $\alpha(\varepsilon, y^0) \to 0$ при $(\varepsilon, y^0) \to (0, 0)$. Подставляя решение системы (18) в (17), видим, что система (8) имеет решение в виде ряда (17), сумма которого аналитична в области $D = \{(v, \varepsilon, y^0) : |\alpha_j(\varepsilon, y^0)| |(v, d_j)| < \rho_0, |\varepsilon| < \varepsilon_1, |y_j^0| < \delta_1, \ j = \overline{1, n}\}$.

Имея в виду, что v может принимать значения $e^{\Lambda t/\varepsilon}\mathbb{C}\cdot\bar{1}$, $t \in [0, T]$, и что $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$, $j = \overline{1, n}$, мы должны обеспечить сходимость ряда (17) при $|(v, d_j)| \leqslant 1$, $\quad j = \overline{1, n}$ (ибо при $e^{At/\varepsilon}\mathbb{C}\cdot\bar{1}$ будет $(v, d_j) = e^{\lambda_j t/\varepsilon}$, $j = \overline{1, n}$). Возьмем $\varepsilon^* > 0$ и $\delta_0 > 0$ настолько малыми, чтобы при $|\varepsilon| < \varepsilon^*$, $|y_j^0| < \delta_0$, $j = \overline{1, n}$, выполнялись неравенства

$$\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_1, \quad \delta_0 \leqslant \delta_1, \quad |\alpha_j(\varepsilon, y^0)| < \rho_0/(1 + \Delta), \ j = \overline{1, n},$$

где $\Delta > 0$ — фиксированная (малая) постоянная. Выбор таких ε^* и δ_0 возможен, так как $\alpha(\varepsilon, y^0) \to 0$ при $(\varepsilon, y^0) \to (0, 0)$. Тогда ряд (17) будет сходиться абсолютно в области $\{(v, \varepsilon, y^0) : |(v, d_j)| < 1 + \Delta, \ |y_j^0| < \delta_0, |\varepsilon| < \varepsilon_*\}$.

Сформулируем теперь основной результат. Введем для этого класс $U_{\varepsilon_*, \Delta}$ рядов

$$z(v, \varepsilon) = \sum_{|m|\geqslant 1, k\geqslant 0} z^{(m,k)} v^m \varepsilon^k, \quad z^{(m,k)} \in \mathbb{C}^n,$$

абсолютно сходящихся в области $G_{\varepsilon_*, \Delta} = \{v : |v_j| < 1 + \Delta, \ j = \overline{1, n}; \ |\varepsilon| <$ $< \varepsilon_*\}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1 — 4, 6. *Тогда существуют числа* $\delta_0 > 0$ *и* $\varepsilon_* > 0$ *такие, что при всех* $y^0 \in \{y^0 : |y_j^0| < \delta_0, \ j = \overline{1, n}\}$ *задача* (8) *имеет единственное решение в классе* $U_{\varepsilon_*, \Delta}$, *представимое рядом* (4). *При условии* 5 *этот ряд на сужении* $v = e^{At/\varepsilon}\mathbb{C}\cdot\bar{1}$, *удовлетворяющем нормальной форме* (2), *является решением задачи* (1). *Ряд* (4) *совпадает с рядом, полученным с помощью алгоритма нормальных форм, изложенного выше.*

Заметим, что числа $\delta_0 > 0$ и $\varepsilon_* > 0$, о которых говорится в этой теореме, могут быть достаточно большими. Например, для задачи $\varepsilon\dot{y} = -y +$

$+ \varepsilon b y^2$, $y(0, \varepsilon) = y^0$, $b = \mathrm{const}$, точное решение имеет вид

$$y(t, \varepsilon) = \frac{e^{-t/\varepsilon} y^0}{1 + y^0 b \varepsilon (e^{-t/\varepsilon} - 1)} = e^{-t/\varepsilon} y^0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n y^{0^n} b^n (e^{-t/\varepsilon} - 1)^n.$$

Соответствующая ей «расширенная» задача (8) имеет решение в виде ряда

$$\tilde{y}(v, \varepsilon) = v y^0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^n y^{0^n} b^n (v - 1)^n.$$

Этот ряд абсолютно сходится по (v, ε) в области $G_{\varepsilon_*, \Delta} = \{(v, \varepsilon) : |v_j| < 1 + \Delta,\ j = \overline{1, n};\ |\varepsilon| < \varepsilon_*\}$, если $\varepsilon_* > 0$ таково, что $\varepsilon_* < (|y^0||b|(2 + \Delta))^{-1}$, если $y^0 b \neq 0$, и $\varepsilon_* = +\infty$, если $y^0 b \neq 0$.

1. *Губин Ю. П., Сафонов В. Ф.* Асимптотические решения сингулярно возмущенных задач со слабой нелинейностью в случае нетождественного резонанса // Дифференц. уравнения.— 1984.— 20, № 6.— С. 930—941.
2. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М. : Наука, 1981.— 400 с.

Моск. энергет. ин-т Получено 19.10.87