УДК 519.21

А. Д. РОЙТГАРЦ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики АН УССР, Киев)

Предельные теоремы для точечных случайных полей, заданных на плоскости

Приведены две теоремы о слабой сходимости двупараметрических точечных случайных полей к точечному полю с независимыми приращениями в пространстве Скорохода. Условия теорем сформулированы в терминах различных типов компенсаторов.

Наведено дві теореми про слабку збіжність двопараметричних точкових випадкових полів до точкового поля з незалежними прирістами у просторі Скорохода. Умови теорем сформульовані в термінах різних типів компенсаторів.

Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство, R_+^2 — неотрицательный квадрант плоскости, на котором введен естественный (покоординатный) частичный порядок. Для регулярного (т. е. равного нулю на осях, непрерывного справа и имеющего пределы по квадрантам) случайного поля X введем различные типы скачков:

$$\square X_z = X_z - X_{s,t-} - X_{s-,t} + X_{s-,t-},$$

$$\Delta^1 X_z = X_z - X_{s-,t}, \quad \Delta^2 X_z = X_z - X_{s,t-}, \quad z = (s, t).$$

Возрастающее случайное поле [1] N называется точечным, если $N_z = \sum_{z_1 \leqslant z} \square N_{z_1}$, $\square N_{z_1} \in \{0, 1\}$. Пусть на плоскости задан двупараметрический поток σ-алгебр $\mathfrak{F} = \{F_z\}$, удовлетворяющий условиям (F1) — (F3) Кайроли — Уолша [2]. Обозначим через P^1, P^2, P, $\hat{P}$ σ-алгебры 1-, 2-предсказуемых, предсказуемых и слабо предсказуемых множеств, соответствующих этому потоку [1, 2]. Положим $P^* = P^1 \vee P^2$. Случайное поле A называется компенсатором (i-компенсатором) $\mathfrak{F}$-согласованного точечного поля N, если оно слабо предсказуемо (i-предсказуемо) и его мера Долеан совпадает с мерой Долеан поля N на σ-алгебре P^* (P^i), $i = 1, 2$.

Лемма. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\forall z \in R_+^2$ $EN_z < \infty$, *то существует единственный i-компенсатор* A^i *поля* N, $i = 1, 2$;

б) *если поток* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет условию коммутации* (F4) [2], *то существует единственный компенсатор* A *поля* N *и для полей* N *и* A *справедливы неравенства:*

$$\forall z = (s, t), \ a > 0, \ b > 0$$

$$P\{N_z > a\} \leqslant \frac{1}{a}(2b + 1) + P\{A_z > b\}, \tag{1}$$

$$P\{A_z > a\} \leqslant \frac{1}{a}(2b + 1) + P\{N_z > b\}. \tag{2}$$

Доказательство. Утверждение а) доказано, например, в работе [3]. Докажем утверждение б). Предположим сначала, что $EN_\infty < \infty$. В этом случае согласно [1] существует единственный компенсатор A поля N. Докажем неравенство (1). Положим $\alpha_1 = \inf\{x : A_{xt} > b\}$, $\alpha_2 = \inf\{y : A_{sy} > b\}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Так как меры Долеан полей N и A совпадают на P^*, то $EN_{z\wedge\alpha} = EA_{z\wedge\alpha}$. Поэтому $P\{N_z > a\} \leqslant P\{N_{z\wedge\alpha} > a\} + P\{\alpha \geqslant z\}^c = \frac{1}{a} EA_{z\wedge\alpha} + P\{A_z > b\}$. В силу [4] $\sup \square A \leqslant 1$. Отсюда вытекает (1). Неравенство (2) доказывается аналогично.

В общем случае согласно [5] мера Долеан поля N $\hat{P}$ — σ-конечна, т. е. существует последовательность множеств $C_k \uparrow \Omega \times R_+^2$, $C_k \in \hat{P}$, $EN_\infty^k < \infty$, $N_z^k = \int_{R_z} I_{C_k} dN$. Обозначим через A^k компенсатор поля N^k и положим $A_z = \lim_k A_z^k$. Очевидно, меры Долеан полей N и A совпадают на P^*. Кроме того, применив неравенства (1) и (2) для каждой пары N^k и A^k, а затем перейдя к пределу при $k \uparrow \infty$, получим справедливость этих неравенств для N и A. Наконец, из неравенства (2) получаем

$$P\{A_z = \infty\} \leqslant \overline{\lim_{b\to\infty}}\ \overline{\lim_{a\to\infty}} \left(\frac{1}{a}(2b + 1) + P\{N_z > b\}\right) = 0$$

и, следовательно, поле A конечно.

Фиксируем прямоугольник $R_L = (0, l_1] \times (0, l_2]$, $L = (l_1, l_2)$ и обозначим через (D_{R_L}, J_{R_L}) пространство Скорохода функций без разрывов второго рода на этом прямоугольнике [6]. Предположим, что заданы последовательности двупараметрических потоков σ-алгебр $\{\mathfrak{F}^n\}$ и точечных случайных полей $\{N^n\}$, каждое поле N^n согласовано с потоком $\mathfrak{F}^n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) *Поток* $\mathfrak{F}^n$ *удовлетворяет условию коммутации* $\forall n \geqslant 1$

б) $A_z^n \xrightarrow{P} A_z$ $\forall z \in R_L$, $n \to \infty$;

в) $\sum_{s\leqslant l_1}(\Delta^1 A^n_{sl_2})^2 \xrightarrow{p} \sum_{s\leqslant l_1}(\Delta^1 A_{sl_2})^2, \quad n\to\infty;$

г) $\sum_{t\leqslant l_2}(\Delta^2 A^n_{l_1t})^2 \xrightarrow{p} \sum_{t\leqslant l_2}(\Delta^2 A_{l_1t})^2, \quad n\to\infty,$ *где* A^n — *компенсатор поля* N^n *относительно потока* $\mathfrak{F}^n$, A — *неслучайное возрастающее поле непрерывное в точке* L.

Тогда $N^n \xrightarrow{(D_{R_L}, J_{R_L})} N$, *где* N — *точечное поле с независимыми приращениями, конечномерные распределения которого однозначно определяются полем* A.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) $EN^n_L < \infty \quad \forall n \geqslant 1;$

б) $A^{i,n}_z \xrightarrow{p} A_z \ \forall z \in R_L,\ i = 1, 2\ n\to\infty$ *и одно из следующих условий:*

в') *последовательности случайных величин* $\{N^n_L\}$ *и* $\{A^{i,n}_L\}$ *равномерно интегрируемы;*

в'') *поля* $A^{1,n}$ *и* $A^{2,n}$ *непрерывны, где* $A^{i,n}$ — *i-компенсатор поля* N^n *относительно потока* $\mathfrak{F}^n$, A — *непрерывное неслучайное возрастающее поле.*

Тогда $N^n \xrightarrow{(D_{R_L}, J_{R_L})} N$ *где* N — *точечное поле с независимыми приращениями, конечномерные распределения которого однозначно определяются полем* A.

Схема доказательства обеих теорем делится на два этапа.

1. Доказательство относительной компактности распределений последовательности полей $\{N^n\}$.

Так как поля N^n являются возрастающими, то из результатов работы [7] легко вытекает, что задача сводится к проверке относительной компактности распределений двух последовательностей возрастающих случайных процессов $\{N^n_{sl_2},\ s\geqslant 0\}$ и $\{N^n_{l_1t},\ t\geqslant 0\}$. Для этого проверяются условия теоремы 6.3.2. или теоремы 6.3.1 (если в теореме 2 выбрана группа условий а), б), в'')) работы [8].

2. Доказательство существования и единственности предела.

Хотя в работах [9, 10] построен двупараметрический аналог уравнения Долеан и доказаны существование и единственность его решения, метод стохастических экспонент, предложенный в [8], не применим для доказательства сходимости конечномерных распределений случайных полей в связи с возникающими здесь техническими трудностями. Поэтому используется следующий подход. Пусть N — некоторая предельная точка последовательности $\{N^n\}$. Как и в однопараметрическом случае [8], несложно проверить, что N — точечное поле. Пользуясь условиями теоремы 1 (теоремы 2), доказываем, что $N - A$ — сильный мартингал (бимартингал) относительно потока, порожденного полем N. Согласно [11] N — поле с независимыми приращениями и его конечномерные распределения однозначно определяются полем A Таким образом, все предельные точки последовательности $\{N^n\}$ совпадают.

Замечания. 1. Частным случаем теоремы 1 является предельная теорема, доказанная в [12]

2. В работе [11] приведен явный вид характеристической функции приращения точечного поля с независимыми приращениями.

1. *Гущин А. А.* К общей теории случайных полей на плоскости // Успехи мат. наук.— 1982.— 37, вып. 6.— С. 53—74.
2. *Cairoli R., Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane // Acta math.— 1975.— 134, N 1-2.— P. 111—183.
3. *Bakry D.* Theoremes de section et de projection pour les processos a deux indices // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1981.— 55, N 1.— P. 55—71.
4. *Ройтгарц А. Д.* Целочисленные случайные меры и представление Жакода сильных мартингалов на плоскости.— Киев, 1986.— 50 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1704.

5. *Ройтгарц А. Д.* Представление некоторых функционалов от целочисленной случайной меры на плоскости // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1988.— Вып. 39.— С. 113—116.
6. *Straf M. L.* Weak convergence of stochastic processes with several parameters // Proc. Sixth. Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.— 1972.— 2.— P. 187—221.
7. *Мишура Ю. С.* О слабой сходимости случайных полей в J-топологии // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1977.— Вып. 17.— С. 102—110.
8. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов.— М. : Наука, 1986.— 512 с.
9. *Мишура Ю. С.* Экспоненциальные формулы и уравнение Долеан для разрывных двупараметрических процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1988.— 33, вып. 2.— С. 412—417.
10. *Мишура Ю. С.* Достаточные условия слабой сходимости двупараметрических семимартингалов к полям диффузионного типа // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1988.— Вып. 39.— С. 97—107.
11. *Ройтгарц А. Д.* Двупараметрические точечные случайные поля с неслучайными компенсаторами // Там же.— 1990.— Вып. 42.— С. 122—128.
12. *Ivanoff B. G.* Poison convergence for point processes in the plane // J. Austral. Math. Soc.— 1985.— **A39**, N 2.— P. 253—269.

Получено 15.01.90