УДК 517

Б. П. Осиленкер, канд. физ.-мат. наук (Моск. строит. ун-т)

КРУГ ИДЕЙ М. Г. КРЕЙНА В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

We present a survey of M. G. Krein's ideas in the theory of orthogonal polynomials.

Наведено огляд ідей М. Г. Крейна в теорії ортогональних поліномів.

В творческом наследии М. Г. Крейна большое место занимает проблема моментов и исследование ассоциированных якобиевых матриц, что естественным образом приводит к изучению ортогональных полиномов. Хотя количество работ М. Г. Крейна, посвященных данной тематике, относительно невелико, тем не менее он внес фундаментальный вклад в теорию ортогональных полиномов. Идеи М. Г. Крейна играют большую роль в современных исследованиях, о чем, в частности, свидетельствуют обзорные доклады профессоров Т. Чихара, Ж. Домбровской, Л. Родмана, В. ван Ашэ и других, прочитанные на конференции „Ортогональные полиномы и их приложения" (США, Коламбус, 1989 г.).

1. Полиномы, ортогональные на вещественной прямой. Пусть μ — конечная положительная мера на $\mathbb{R}^1$ (функция распределения μ). Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ называется точкой роста меры μ, если для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\mu(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) > 0$. Множество точек роста меры μ замкнуто, назовем его спектром меры μ и обозначим S_μ.

Рассмотрим класс мер, имеющих бесконечный спектр и таких, что конечны все степенные моменты

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\mu, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{1}$$

Так как гильбертово пространство $\mathcal{H} \equiv L^2_\mu(\mathbb{R}^1)$ содержит полиномы, то, применяя процесс ортогонализации Грама – Шмидта к системе степеней $\{x^n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем последовательность полиномов

$$p_n(x) = k_n x^n + l_x x^{n-1} + \dots, \quad k_n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

ортонормированных по мере μ. Справедливо представление

$$p_n(x) = (D_n D_{n-1})^{-1/2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix} \quad (n \ge 1), \quad p_0(x) = D_0^{-1/2},$$

где ганкелевы формы

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

положительны.

Для произвольной ортонормированной по мере μ системы полиномов $\{p_n\}$,

$n \in \mathbb{Z}_+$, справедливо рекуррентное соотношение

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$
$$p_0(x) \equiv \text{const}, \quad p_{-1}(x) \equiv 0, \tag{3}$$

где $a_n > 0$ и b_n вещественны при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, при этом

$$a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \quad b_n = \frac{l_n}{k_n} - \frac{l_{n+1}}{k_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где k_n, l_n — коэффициенты полинома $p_n(x)$ (см. (2)).

Таким образом, последовательность ортонормированных полиномов порождает якобиеву (трехдиагональную) матрицу

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}, \quad a_n > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}^1; \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Вопросы существования и единственности меры ортогональности μ связаны с проблемой Гамбургера, которая отвечает на вопрос, когда заданная последовательность есть моментная последовательность для положительной борелевской меры на прямой. Мера единственна тогда и только тогда, когда ассоциированная проблема моментов имеет единственное решение (матрица J имеет тип D). Достаточным условием является условие Карлемана $\sum_{n=0}^{\infty} 1/a_n = \infty$.

Матрице Якоби (4) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv l^2$ сопоставим линейный оператор A. Обозначим через $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, стандартный базис в l^2, $\mathfrak{D}_0$ — всюду плотное в l^2 линейное многообразие финитных последовательностей и A_0 — линейный оператор с областью определения $\mathfrak{D}_0$:

$$A_0 e_n = a_n e_{n+1} + b_n e_n + a_{n-1} e_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad e_{-1} = 0.$$

Из симметрии матрицы J следует, что A_0 — симметрический оператор. Следовательно, A_0 имеет замыкание A, A — линейный замкнутый симметрический оператор с областью определения $\mathfrak{D}(A) \supset \mathfrak{D}_0$. Напомним, что оператор A называется оператором с простым спектром, если для него существует циклический элемент $\varphi \in \mathcal{H}$, т. е. $A^n \varphi \in \mathfrak{D}(A)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и замыкание φ, $A\varphi$, $A^2\varphi, \dots$ совпадает с $\mathcal{H}$.

Как известно, класс ограниченных самосопряженных операторов с простым спектром совпадает с множеством операторов, порожденных ограниченными матрицами Якоби (с точностью до унитарной эквивалентности). Аналогичное утверждение справедливо и для неограниченных операторов (теорема Стоуна) [5]. Если к самосопряженному оператору A, отвечающему J-матрице (4) типа D, применить основную спектральную теорему и положить $\mu(x) = (E_x e_0, e_0)$, где E_x — разложение единицы оператора A, то мера μ является единственным решением проблемы моментов, ассоциированной с J-матрицей (4), и система $\{p_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ортонормирована по этой мере μ. Поскольку в пространстве L^2_μ оператор A унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную, то спектр $S(A)$ совпадает с S_μ.

В своих первых работах [17, 18], опубликованных в 1933–1934 гг., М. Г. Крейн исследовал спектр якобиевой матрицы в задаче о крутильных колебаниях вала (дальнейшее развитие механической интерпретации собственных значений якобиевых матриц, порожденных „штурмовыми" системами, см. в [10]).

Как известно [33], ортогональные полиномы имеют только вещественные простые корни. Обозначая их через x_{jn}: $x_{1n} < x_{2n} < \ldots < x_{nn}$, по теореме Гершгорина получаем

$$x_{jn} \in \bigcup_{i=0}^{n-1} [b_i - a_i - a_{i+1},\ \ b_i + a_i + a_{i+1}],$$

откуда немедленно вытекает

$$\min_{0 < i \le n-1} (b_i - a_i - a_{i+1}) \le x_{jn} \le \min_{0 \le i \le n-1} (b_i + a_i + a_{i+1}), \quad 1 \le j \le n.$$

Эти оценки обычно достаточны для приложений, но возможны и более точные границы [32, 54, 56, 61, 67, 75].

Каждая точка спектра S_μ является предельной точкой нулей ортогональных полиномов. Напомним классическую теорему о перемежаемости нулей полиномов $p_n(x)$ и $p_{n+1}(x)$ [33]:

$$x_{i,\,n+1} < x_{in} < x_{i+1,n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда следует существование пределов

$$\xi_i = \lim_{n \to \infty} x_{in}, \quad \eta_i = \lim_{n \to \infty} x_{n-i+1,\,n},$$

и также

$$-\infty \le \xi_1 \le \xi_2 \le \ldots \le \eta_2 \le \eta_1 \le \infty.$$

Сегмент $[\xi_1, \eta_1]$ есть наименьший замкнутый промежуток, содержащий все нули ортогональных полиномов $p_n(x)$ и названный Я. Шохатом „истинным отрезком ортогональности", ибо вне его имеем $\mu(x) \equiv \mathrm{const}$. Всегда существует, по крайней мере, одна функция распределения μ, спектр которой есть множество $[\xi_1, \eta_1]$. Этот „истинный" интервал ортогональности есть также наименьший замкнутый промежуток, для которого последнее свойство выполняется. Поэтому $[\xi_1, \eta_1]$ часто называют „спектральным промежутком".

Рассмотрим случай, когда он конечен.

Если

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = 0,$$

то матрица Якоби (4) определяет компактный самосопряженный оператор A. В этом случае спектр состоит только из собственных значений, и носитель меры μ, который и есть спектр A, есть счетное множество с предельной точкой 0 (теорема Стильтьеса). Естественно возникает вопрос: при каких условиях носитель спектральной меры есть счетное множество с конечным числом предельных точек? Ответ на этот вопрос получен М. Г. Крейном [4].

Теорема М. Г. Крейна. *Для того чтобы единственными предельными точками спектра S_μ были заданные точки $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, необходимо и достаточно, чтобы элементы якобиевой матрицы были ограничены в своей совокупности и чтобы для элементов g_{ik} матрицы*

$$G = (g_{ik}) \colon G = g(J), \quad g(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_p).$$

существовали пределы $\lim\limits_{i,k \to \infty} g_{ik} = 0.$

Как следует из теоремы М. Г. Крейна, если носитель меры μ есть счетное множество с конечным числом предельных точек, то $\lim\limits_{n \to \infty} \inf a_n = 0$. Поэтому, если $\lim\limits_{n \to \infty} \inf a_n > 0$, носитель меры μ должен состоять из бесконечного числа точек. О. Блюменталь в 1898 г. доказал, что если

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b, \tag{5}$$

то спектр оператора A имеет вид

$$S_\mu = [\sigma, \tau] \cup S_0, \quad \sigma = -2a + b, \quad \tau = 2a + b, \tag{6}$$

где S_0 — конечное или счетное множество действительных чисел вне отрезка $[\sigma, \tau]$, которые могут накапливаться лишь к концам этого отрезка (дальнейшее уточнение этого результата см. в [27, 28]).

Отметим, что если мера μ абсолютно непрерывна, $d\mu / dx \equiv w(x)$ ($w(x)$ — весовая функция) и $w(x) > 0$ почти всюду, то выполняются соотношения (5) [31].

При дополнительных условиях на порядок сходимости в (5) можно установить более специфические свойства функции распределения μ. Например, П. Неваи [68] доказал, что если

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n - a| + |b_n - b|) < \infty, \tag{7}$$

то

1) для почти всех $x \in \operatorname{Supp}(d\mu)$ выполняется

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Sup}\left[\mu'(x)\sqrt{1 - x^2}\, p_n^2(x)\right] = \frac{2}{\pi};$$

2) $d\mu(x) = \mu'(t)\,dt + d\mu_j(t)$, где $\mu'(t)$ непрерывна и положительна; $\operatorname{Supp}\mu' = [\sigma, \tau]$ и $\mu_j(t)$ — ступенчатая функция, равная постоянной на (σ, τ). Условие (7) было ослаблено в [48, 49, 51, 66], где требовалось выполнение предельных соотношений (5) и

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n - a_{n+1}| + |b_n - b_{n+1}|) < \infty.$$

Следующий результат [12, 26, 45, 58] играет важную роль в теории рассеяния: пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(|a_n - a| + |b_n - b|) < \infty. \tag{8}$$

Тогда мера μ имеет лишь конечное число масс на S_0 (см. (6)), нет масс в точках σ, τ, и $\mu'(x)$ положительна и непрерывна в $[\sigma, \tau]$.

Отметим также, что при условии (8) получена асимптотика полиномов $p_n(x)$.

Те точки, в которых μ имеет скачок $\mu(x+0) - \mu(x-0) > 0$, являются собственными числами оператора A, порожденного якобиевой матрицей (4). Приведем результат из [48] о необходимых условиях существования собственных значений: если a_n, b_n ограничены и x есть собственное значение оператора A, то

$$a_1^2 p_1^2(x) + \sum_{n=2}^{\infty} [(a_n^2 - a_{n-1}^2) p_n^2(x) + a_n(b_n - b_{n-1}) p_{n-1}(x) p_n(x) = 0.$$

Отсюда можно получить условия на элементы J-матрицы, при которых оператор A не имеет собственных значений на $[\sigma, \tau]$.

Рассмотрим проблему исследования спектра оператора A, определяемого матрицей Якоби с неограниченными коэффициентами. Я. Шохату принадлежит следующий результат: носитель меры конечен тогда и только тогда, когда обе последовательности a_n, b_n ограничены; если носитель меры полубесконечен, то обе последовательности неограничены; если только одна из них ограничена, то носитель есть $(-\infty, \infty)$.

Информацию о мере ортогональности μ можно получить анализом соответствующего самосопряженного оператора A. Как и выше, спектральная теорема для неограниченного самосопряженного оператора дает меру ортогональности μ для системы полиномов $\{p_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае носитель меры есть неограниченное множество на прямой.

Приведем следующий недавний результат Ж. Домбровской [50], который дает условия, при которых мера μ абсолютно непрерывна: пусть $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(1/a_n) = \infty$, $\{b_n\}$ — последовательность вещественных чисел, и положим $d_n = |a_n - a_{n-1}|$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n^2 - a_{n-1}^2]^- < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |d_n - d_{n-1}| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n |b_n - b_{n-1}| < \infty,$$

то мера μ имеет абсолютно непрерывную часть, совпадающую со спектром оператора A.

Другие результаты о спектре якобиевых матриц и поведении соответствующих ортогональных полиномов изложены в [9, 29, 30, 36, 42–45, 56, 57, 59, 60, 64, 65, 69, 70, 73–75].

В работах [16, 21] М. Г. Крейн изучал матричную и операторную проблемы моментов, что привело его к введению матричных ортогональных полиномов на $\mathbb{R}^1$ [20].

Матричные полиномы $P_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, определялись с помощью рекуррентного соотношения

$$xP_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + A_{n-1} P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad P_{-1}(x) \equiv 0, \quad (9)$$

где $P_0(x)$ — постоянная неособенная матрица; A_n, B_n — симметрические матрицы порядка $p \times p$, $1 \le p < \infty$, $\det A_n \ne 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Существует неубывающая непрерывная слева эрмитова матрица — функция $\sum(x)\left(\sum(-\infty) = 0\right)$ — такая, что полиномы $P_n(x)$ ортонормированы по матричной мере $d\sum(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) d\sum(x)\, P_m^*(x) = \delta_{nm} I, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

при этом I — единичная квадратная матрица p-го порядка.

Ю. М. Березанский [8, 9] распространил теорию на разностные уравнения (9) с операторными коэффициентами, он построил систему соответствующих операторов полиномов, ортонормированных по спектральной мере $d\sum(x)$ и доказал равенство Парсеваля. Как известно ([9], гл. VII), теорию уравнений с частными разностями в полуплоскости можно трактовать как теорию, связанную с обыкновенными разностными операторами вида (9), где A_n, B_n — операторы специального вида, действующие в бесконечномерном пространстве. Б. В. Базанов [5 – 7] рассмотрел выражения с частными разностями произвольного четного порядка. Для этих выражений им построена спектральная матрица, описаны с помощью формулы А. В. Штрауса все такие матрицы в неопределенном случае и решена обратная задача (см. также [13]).

Исследование спектра разностных операторов с матричными и операторными коэффициентами проведено в [1, 30, 34, 35, 37] в связи с изучением обратной задачи теории рассеяния.

2. Полиномы, ортогональные на единичной окружности. Рассмотрим скалярные полиномы, ортогональные на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ по ограниченной неубывающей на отрезке $[0, 2\pi]$ функции $\sigma(\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta) = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\varphi_n(z) = \alpha_n z^n + \ldots, \quad \alpha_n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Введем коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,d\sigma(\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Очевидно, $c_{-n} = \overline{c}_n$, так что матрица (c_{i-k}), $i, k = 0, 1, \ldots, n$, „типа матрицы Теплица" будет эрмитовой и имеет положительный детерминант $D_n = |c_{i-k}|$, $i, k = 0, 1, \ldots, n$. Справедливо представление

$$\varphi_n(z) = (D_n D_{n-1})^{-1/2}\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \ldots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \ldots & c_{-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & c_{-1} \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^n \end{vmatrix}, \quad \varphi_0(z) = D_0^{-1/2}.$$

Введем многочлены $\{\Phi_n(z) = \varphi_n(z)/\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда выполняются рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} \Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) - \overline{a}_n\Phi_n^*(z), \\ \Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - a_n z\Phi_n(z), \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\Phi_n^*(z) = (1/\alpha_n)z^n\,\overline{\varphi}_n(1/z)$, а параметры $\{a_n\}$ определяются формулами

$$a_n = -\Phi_{n+1}(0), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Задавая произвольно параметры, подчиненные единственному условию

$$|a_n| < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{10}$$

можно определить всю ортогональную систему $\{\Phi_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и неубывающую ограниченную функцию $\sigma(\theta)$, имеющую бесконечное множество точек роста.

Важным вопросом является полнота системы полиномов $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}$ (и, следовательно, системы степеней $\{z^n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$) в пространстве L^2_σ.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *функция* $\ln \sigma'(\theta)$ *суммируема, т. е.*

$$\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty;$$

2) *система полиномов* $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *незамкнута в* L^2_σ.

Это утверждение было доказано А. Н. Колмогоровым [14, 15] и М. Г. Крейном [19]. Условие незамкнутости системы ортогональных полиномов в пространстве L^r_σ, $r \geq 1$, найдено Н. И. Ахиезером [2] в случае ортогональности на единичной окружности; для общего случая ортогональности на спрямляемом контуре Жордана это условие установлено Я. Л. Геронимусом ($r \geq 1$) [11] и Г. Ц. Тумаркиным ($r > 0$) [38].

Данный результат непосредственно вытекает из следующей теоремы [72].

Теорема (Сеге, Колмогоров – Крейн). *Пусть* σ — *конечная положительная мера на единичной окружности и* w — *ее производная относительно нормированной меры Лебега. Тогда*

$$\inf_{f \in W_0} \int_0^{2\pi} |1 - f^2|\, d\mu = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log w(\theta)\, d\theta\right],$$

где W_0 — *множество функций из банаховой алгебры, непрерывных в* $|z| \leq 1$ *и аналитических в* $|z| < 1$, *удовлетворяющих условию* $\int_0^{2\pi} f\, d\theta = 0$.

Полином $\Phi_n(z)$ и параметры a_n являются функциями целочисленного аргумента n. М. Г. Крейн [44] построил общую теорию, в которой фигурируют аналогичные функции аргумента r, непрерывно меняющегося на $[0, \infty)$, т. е. он построил континуальный аналог теории полиномов, ортогональных на единичной окружности. Роль параметров a_n у него играет $A(r)$, причем условие (10) заменено предположением, что $A \in L^1(0, \infty)$ (в индефинитном случае см. [25, 63]).

Рассмотрим полиномы, ортогональные на единичной окружности по индефинитному весу, т. е. когда вес $w(\theta) \equiv d\sigma(\theta)/d\theta$ — ненулевая вещественная интегрируемая по Лебегу функция, которая не является необходимо неотрицательной. Как и выше, обозначим через c_k коэффициенты Фурье. Определим индефинитное скалярное произведение на пространстве комплексных полиномов по формуле

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) \overline{Q(e^{i\theta})} w(\theta)\, d\theta$$

для полиномов P, Q. Можно переписать эту формулу в эквивалентной форме: если

$$P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n, \quad Q(z) = q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots + q_n,$$

то

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i,j=0}^{n} c_{i-j}\, p_j \bar{q}_i .$$

Теплицева матрица (c_{i-j}), $i, j = 0, 1, \ldots, n$; $n \in \mathbb{Z}_+$, будет эрмитовой. Если ортогонализовать последовательность $1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots$ по индефинитному весу w, то получим систему ортогональных полиномов $\{h_n(z)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, степени n (с ненулевым старшим коэффициентом) и $\langle h_n, g\rangle = 0$ для всех полиномов g степени $< n$; кроме того, $\langle h_n, h_n\rangle \neq 0$. В отличие от дефинитного случая, здесь ортогональные полиномы могут не существовать (например, пусть $w(\theta) = \cos\theta$, тогда не существует постоянной, т. е. полинома нулевой степени, для которого $\langle h_0, h_0\rangle \neq 0$). Если n-й ортогональный полином

$$h_n(z) = x_0 z^n + x_1 z^{n-1} + \ldots + x_n, \quad x_i = x_i(n),$$

существует, то с точностью до постоянной его можно записать в виде

$$h_n(z) = \det\begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n+1} & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{-n+2} & c_{-n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 & c_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix}.$$

В работе [24] М. Г. Крейн получил полное описание нулей полиномов, ортогональных по индефинитному весу.

Теорема. 1. *Пусть $n \geq 1$ и $D_k \neq 0$, $D_k = |c_{i-j}|$, $i, j = 0, 1, \ldots, k$; $k = 0, 1, \ldots, n$. Обозначим через $p = p(n)$ (соответственно $q = q(n)$) число постоянств (перемен) знака в последовательности $1, D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$. Если $D_{n-1}D_n > 0$ (< 0), то n-й ортогональный полином $h_n(z)$ имеет точно p (q) нулей внутри единичной окружности и вне ее точно $q(p)$ корней.*

2. *Полином*

$$h_n(z) = x_0 z^n + x_1 z^{n-1} + \ldots + x_n$$

с $x_0 \neq 0$ есть n-й ортогональный полином на $\mathbb{T}$ для некоторого индефинитного веса тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

а) *x_0 — вещественно;*

б) *нет пары нулей $h_n(z_0)$, симметричных относительно $\mathbb{T}$ (т. е. если $h_n(z) = 0$, $z_0 \neq 0$, то $h_n(\bar{z}_0^{-1}) \neq 0$) в частности $h_n(z)$ не имеет нулей на $\mathbb{T}$.*

Доказательство М. Г. Крейна базировалось на идеях и результатах теории линейных операторов в конечномерных векторных пространствах с индефинитным скалярным произведением. В работе [53] получено новое доказательство теоремы, обобщение части 1 и приведена дополнительная информация о части 2. Другая версия части 1 дана в [46].

В последние годы интенсивное развитие получила теория матричных полиномов, ортогональных на единичной окружности. Кроме естественной попытки обобщения скалярной теории, изучение матричных полиномов стимулировалось различными приложениями (подробнее об этом см. в [1, 39 – 41, 47, 52, 55, 62, 76]).

Ряд статей сборника [71], посвященного 80-летию М. Г. Крейна, содержат матричные обобщения приведенной выше теоремы.

Сформулируем один из результатов, обобщающий первую часть теоремы М. Г. Крейна о нулях ортогональных полиномов.

Пусть $R_0, R_1, \ldots$ — последовательность квадратичных матриц p-го порядка и T_N — блочная теплицева матрица

$$T_N = \begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & \ldots & R_{-N} \\ R_1 & R_0 & \ldots & R_{1-N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_N & R_{N-1} & \ldots & R_0 \end{pmatrix},$$

где $R_{-i} = R_i^*$. Предположим, что матрица T_N обратима и

$$P_N(z) = \Gamma_{0N} + z\Gamma_{1N} + \ldots + z^N \Gamma_{NN}$$

— ортогональные полиномы, ассоциированные с T_N.

Теорема [39, 62]. *Пусть матрицы T_N и T_{N-1} обратимы. Обозначим через ν_{N-1} число отрицательных собственных значений T_{N-1} и пусть матрица Γ_{00} положительно или отрицательно определенная. Тогда* $\det P_N$ *не имеет нулей на* $\mathbb{T}$. *Кроме того:* а) *если* $\Gamma_{00} > 0$, *то* $\det P_N$ *имеет* ν_{N-1} *нулей вне* $\mathbb{T}$ *и* $(N_p - \nu_{N-1})$ *нулей внутри* $\mathbb{T}$; в) *если* $\Gamma_{00} < 0$, *то* $\det P_N$ *имеет* ν_{N-1} *нулей внутри* $\mathbb{T}$ *и* $(N_p - \nu_{N-1})$ *нулей вне* $\mathbb{T}$.

1. *Аптекарев А. И., Никишин Е. М.* Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля // Мат. сб. – 1983. – **121**, №3. – С. 327 – 358.
2. *Ахиезер Н. И.* Об одном предложении А. Н. Колмогорова и об одном предложении М. Г. Крейна // Докл. АН СССР. – 1945. – **40**, №1. – С. 95 – 98.
3. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
4. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1938. – 255 с.
5. *Базанов Б. В.* Некоторые вопросы разложения по собственным функциям уравнений в частных разностях порядка выше первого // Тр. I научн. конф. мат. кафедр. пед. ин-тов Поволжья. – 1961. – С. 28 – 32.
6. *Базанов Б. В.* О спектральных функциях одного симметрического частно-разностного оператора // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, №2. – С. 187 – 200.
7. *Базанов Б. В.* О спектральных матрицах самосопряженных уравнений в конечных разностях // Изв. вузов. Математика. – 1962. – №3. – С. 3 – 10.
8. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 203 – 268.
9. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
10. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 359 с.
11. *Геронимус Я. Л.* О замкнутости некоторых систем в пространстве L^p_σ // Зап. НИИ мат. и мех. и ХМО. – 1949. – **21**. – С. 24 – 45.
12. *Гусейнов Г. Ш.* Определение бесконечной матрицы Якоби по ее данным рассеяния // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, №6. – С. 1289 – 1292.
13. *Кишакевич Ю. Л.* Спектральная функция типа Марченко разностного оператора четного порядка // Мат. заметки. – 1972. – **11**, №4. – С. 437 – 446.
14. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве // Бюл. Моск. ун-та. Математика – 1941. – **2**, вып. 6.
15. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование случайных стационарных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1941. – **5**, №1. – С. 3 – 14.
16. *Красносельский М. А., Крейн М. Г.* Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов // Успехи мат. наук. – 1947. – **2**, №3. – С. 60 – 106.
17. *Крейн М. Г.* О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов // Мат. сб. – 1933. – **40**, №4. – С. 455 – 466.
18. *Крейн М. Г.* Об узлах гармонических колебаний механических систем некоторого специального типа // Там же. – 1934. – **41**, №2. – С. 339 – 348.

19. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова // Докл. АН СССР. – 1945. – **46**, №3. – С. 95 – 98.
20. *Крейн М. Г.* Бесконечные *J*-матрицы и матричная проблема моментов // Там же. – 1949. – **69**, №2. – С. 125 – 128.
21. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. – 1949. – №2. – С. 3 – 66.
22. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Док. АН СССР. – 1955. – **105**, №4. – С. 637 – 640.
23. *Крейн М. Г.* О континуальном аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов // Там же. – 1957. – **113**, №5. – С. 970 – 973.
24. *Крейн М. Г.* О расположении корней многочленов, ортогональных на единичной окружности по знакопеременному весу // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1966. – Вып. 2. – С. 131 – 137.
25. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу // Докл. АН СССР. – 1981. – **258**, №3. – С. 537 – 541.
26. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. – Киев : Наук. думка, 1972. – 217 с.
27. *Найман П. Б.* О множествах изолированных точек роста спектральной функции предельно постоянной якобиевой матрицы // Изв. вузов. Математика. – 1959. – №1. – С. 129 – 135.
28. *Найман П. Б.* К теории периодических и предельно периодических якобиевых матриц // Докл. АН СССР. – 1962. – **143**, №2. – С. 277 – 279.
29. *Найман П. Б.* Некоторые признаки неограниченности и дискретности спектра матриц Якоби // Докл. АН УССР. – 1966. – №2. – С. 141 – 143.
30. *Никишин Е. М.* Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1984. – Вып. 10. – С. 3 – 77.
31. *Рахманов Е. А.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов // Мат. сб. – 1977. – **103**. – С. 237 – 252.
32. *Рахманов Е. А.* Об асимптотических свойствах ортогональных полиномов на вещественной оси // Мат. сб. – 1982. – **119**. – С. 169 – 203.
33. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
34. *Серебряков В. П.* Обратная задача теории рассеяния для разностных уравнений с матричными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1980. – **250**, №3. – С. 562 – 565.
35. *Серебряков В. П.* О свойствах данных рассеяния дискретного уравнения Штурма–Лиувилля // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1986. – **49**. – С. 130 – 140.
36. *Суетин П. К.* Проблема В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1977. – **15**. – С. 5 – 82.
37. *Тарнопольский В. Г.* Задача рассеяния для разностного уравнения с операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, №3. – С. 342 – 351.
38. *Тумаркин Г. Ц.* Приближение в среднем комплекснозначных функций // Докл. АН СССР. – 1952. – **84**, №1. – С. 21 – 24.
39. *Alpay D., Gohberg I.* On orthogonal matrix polynomials // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 1988. – **34**. – P. 25 – 46.
40. *Basu S., Bose N. K.* Matrix Stieltjes series and network models // SIAM J. Math. – 1983. – **14**, №2. – P. 209 – 222.
41. *Ben-Artzi A., Gohberg I.* Extension of a theorem of M. G. Krein on orthogonal polynomials for the nonstationary case // Operator Theory: Adv. and Appl. – 1988. – **34**. – P. 25 – 41.
42. *Chihara T. S.* The derived set of the spectrum of a distribution function // Pacif. J. Math. Anal. – 1970. – **35**. – P. 571 – 574.
43. *Chihara T. S.* Spectral properties of orthogonal polynomials on unbounded sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – **270**. – P. 623 – 639.
44. *Chihara T. S.* Orthogonal polynomials with discrete spectra on the real line // J. Approxim. Theory. – 1982. – **42**. – P. 97 – 105.
45. *Chihara T. S., Nevai P.* Orthogonal polynomials and measures with finitely many point masses // Ibid. – **35**. – P. 370 – 380.
46. *Delsarte Ph., Genin Y.* Spectral properties of finite Toeplitz matrices // Lect. Notes Control and Inform. Sci. – 1984. – №58. – P. 194 – 213.
47. *Delsarte Ph., Genin Y., Kamp Y.* Orthogonal polynomial matrices on the unit circle // IEEE Trans. Circuits and Syst. – 1978. – **25**. – P. 145 – 160.
48. *Dombrowski J.* Tridiagonal matrix representations of cyclic self-adjoint operators // Pacif. J. Math. – 1984. – **114**. – P. 325 – 334.
49. *Dombrowski J.* Tridiagonal matrix representations of cyclic self-adjoint operators. II // Ibid. – 1985. – **120**. – P. 47 – 53.
50. *Dombrowski J.* Spectral measures corresponding to orthogonal polynomials with unbounded recurrence coefficients // J. Constr. Approxim. – 1989. – **5**. – P. 371 – 381.

51. *Dombrowski J., Nevai P.* Orthogonal polynomials, measures and recurrence relations // SIAM J. Math. Anal. – 1986. – **17**. – P. 752 – 759.
52. *Dym H.* On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy // Integr. Equat. and Operator Theory. – 1989. – **12**. – P. 759 – 812.
53. *Ellis R. L., Gohberg I., David C. Lay.* On two theorems of M. G. Krein concerning polynomials orthogonal on the unit circle // Ibid. – 1988. – **11**. – P. 87 – 104.
54. *Freud G.* On the greatest zero of an orthogonal polynomials // J. Approxim. Theory. – 1986. – **46**. – P. 16 – 24.
55. *Geronimo J. S.* Matrix orthogonal polynomials on the unit circle // J. Math. Phys. – 1981. – **22**, №7. – P. 1359 – 1365.
56. *Geronimo J. S.* An upper bound on the number of eigenvalues of an infinite dimensional Jacobi matrices // Ibid. – 1982. – **23**, №6. – P. 917 – 921.
57. *Geronimo J. S.* On the spectra of infinite dimensional Jacobi matrices // J. Appoxim. Theory. – 1988. – **53**. – P. 251 – 265.
58. *Geronimo J. S., Case K. M.* Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – **258**. – P. 467 – 494.
59. *Geronimo J. S., Nevai P.* Necessary and sufficient conditions relating the coefficients in the recurrence formula to the spectral function for orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal. – 1983. – **14**. – P. 622 – 637.
60. *Geronimo J. S., Van Assche W.* Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrence coefficients // J. Approxim. Theory. – 1986. – **46**. – P. 251 – 283.
61. *Gilewicz J., Leopold E.* On the sharpness of results in the theory of location of zeros of polynomials defined by three-term recurrence relations // Lect. Notes Math. – 1985. – **1171**. – P. 259 – 266.
62. *Gohberg I., Lerer L.* Matrix generalizations of M. G. Krein theorems on orthogonal polynomials // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 1988. – **34**. – P. 137 – 162.
63. *Krein M. G., Langer H.* On some continuation problems which are closely related to the theory of Hermitian operators in spaces Π_κ. Pt. 4.: Continuous analogues of orthogonal polynomials on the unit circle with respect to an indefinite weight and related continuation problems for some classes of functions // J. Oper. Theory. Bucharest. – 1985. – **13**, №2. – P. 299 – 317.
64. *Magnus A.* A proof of Freud's conjecture about orthogonal polynomials related to $|x|^\rho \exp(-x^{2m})$ // Lect. Notes Math. – 1985. – **1171**. – P. 362 – 371.
65. *Maki D. P.* On constructing distribution function: with applications to Lommel polynomials and Bessel functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **130**. – P. 281 – 297.
66. *Máté A., Nevai P. G.* Orthogonal polynomials and absolutely continuous measures // Approxim. Theory, IV (C. K. Chui et al., eds). – New York: Acad. Press, 1983. – P. 611 – 617.
67. *Máté A., Nevai P. G., Totik V.* Asymptotics for the zeros of orthogonal polynomials associated with infinite intervals // J. London Math. Soc. – 1986. – **33**, №2. – P. 303 – 310.
68. *Nevai P. G.* Orthogonal polynomials // Memoirs Amer. Math Soc. – 1979. – **213**.
69. *Nevai P. G.* Orthogonal polynomials defined by a recurrence relation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – **250**. – P. 369 – 384.
70. *Nevai P. G.* On orthogonal polynomials // J. Approxim. Theory. – 1979. – **25**. – P. 34 – 37.
71. Operator Theory: Adv. and Appl. – 1988. – **34**.
72. *Szegö G.* Beiträge zur Theorie der Toeplitzen Formen (Ernsten Milteilung) // Math Z. – 1920. – **6**.
73. *Van Assche W.* Asymptotics for orthogonal polynomials // Lect. Notes Math. – 1987. – **1265**.
74. *Van Assche W., Geronimo J. S.* Asymptotics for orthogonal polynomials on and off essential spectrum // J. Approxim. Theory. – 1988. – **55**. – P. 220 – 231.
75. *Van Doorn E. A.* Representations and bounds for zeros of orthogonal polynomials and eigenvalues of sign-symmetric tridiagonal matrices // Ibid. – 1987. – **51**. – P. 254 – 266.
76. *Youla D. C., Kazanjian N.* Bauer type factorization of positive matrices and the theory of matrix polynomials on the unit circle // IEEE Trans. Circuits and Systems. – 1978. – CAS-25. – P. 57 – 69.

Получено 17. 06. 93