УДК 517.5

В. Ф. БАБЕНКО, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов сверток

Для классов периодических функций, представимых в виде свертки ядра, не увеличивающего перемен знака, с функциями из заданного перестановочно инвариантного множества решена задача вычисления поперечников Колмогорова в пространстве L_1 и задача оптимизации квадратурных формул.

Для класів періодичних функцій, зображених у вигляді згортки ядра, що не збільшує числа змін знаку, з функціями заданої переставно інваріантної множини розв'язана задача обчислення поперечників Колмогорова у просторі L_1 та оптимізації квадратурних формул.

В данной статье для классов $K*F$ периодических функций, представимых в виде свертки ядра K, не увеличивающего число перемен знака, с функциями из заданного перестановочно инвариантного множества F рассмотрим задачу вычисления поперечников Колмогорова в пространстве L_1 и задачу оптимизации квадратурных формул. В части, касающейся поперечников, она является продолжением статьи [1], результаты которой дают для поперечников оценки сверху.

1. Основные определения. Постановка задач. Пусть C и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — пространства 2π-периодических функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами; $\|\cdot\|_p$ — норма в L_p; $K*\varphi$ — свертка функций $K \in L_1$ (ядра свертки) и $\varphi \in L_1$. Положим $\mu = \mu(K) = 1$, если $\int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt = 0$, и $\mu = \mu(K) = 0$, если $\int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt \neq 0$; H_{2n-1}^T $(n = 1, 2, \ldots)$ — множество три-

гонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$; $H^S_{2n,r}$ $(r=0, 1, \ldots)$ — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами $l\pi n^{-1}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Если заданы ядро K и множество $F \subset L_1$, то через $K*F$ обозначим класс функций вида

$$f = a\cdot\mu + K*\varphi, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in F, \quad \varphi \perp \mu.$$

Многие важные для теории приближения и теории квадратур классы 2π-периодических функций являются классами типа $K*F$. Так, если $\mathcal{P}_r(x)$ — алгебраический полином степени r с вещественными корнями, то положим

$$B(\mathcal{P}_r; x) = (2\pi)^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' e^{ilx}/\mathcal{P}_r(il)$$

$\left(\sum'\right.$ означает, что суммирование ведется по таким l, что $\left.\mathcal{P}_r(il) \neq 0\right)$. Класс $B(\mathcal{P}_r; \cdot)*F$ — это класс функций $f \in C$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$, таких, что $\mathcal{P}_r(d/dx)\, f \in F$. В частности, если $\mathcal{P}_r(x) = x^r$, то $B_r(\cdot) = B(\mathcal{P}_r; \cdot)$ — это функции Бернулли, а класс B_r*F — это класс W^rF функций f таких, что $f^{(r)} \in F$. Если $F = F_p$ — единичный шар в L_p, то получаем стандартный класс W^r_p.

Ядро K будем называть CVD-ядром (и писать $K \in CVD$), если для любых $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, $\varphi \perp \mu$

$$\nu(a\cdot\mu + K*\varphi) \leqslant \nu(\varphi)$$

(здесь и везде ниже $\nu(g)$ — число перемен знака на периоде для 2π-периодической функции g); CVD-ядра образуют весьма широкую и важную совокупность ядер. Очевидно, $B_r \in CVD$ и, более общо, $B(P_r; \cdot) \in CVD$. Ядра

$$A_h(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{ilx}/\operatorname{ch}(lh), \quad h > 0, \tag{1}$$

— это δ-образные (при $\nu \to 0$) CVD-ядра. Нужные нам элементарные свойства сверток с CVD-ядрами легко следуют из определений. Более подробные сведения о специальных и общих CVD-ядрах можно найти в [2, 3].

Для $f \in L_1$, $f \geqslant 0$, через $P(f, t)$ обозначим убывающую перестановку (см., например, [4, с. 92, 93] и [5 гл. 2] сужения f на период. Для любой $g \in L_1$ положим [4, с. 99] $\Pi(g, t) = P(g_+, t) - P(g_-, 2\pi - t)$, где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$.

Множество $F \subset L_1$ назовем перестановочно инвариантным (Π-инвариантным), если из $f \in F$ и $\Pi(g) = \Pi(f)$ следует, что $g \in F$. Примеры таких множеств см. в [1, 6].

Для $p \in [1, \infty]$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $f \in L_p$ положим $\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p$. Если $p < \infty$; $\alpha, \beta > 0$; $H \subset L_p$ — локально компактное множество и $f \in L_p$, то величину

$$E(f, H)_{p;\alpha,\beta} = \inf\{\|f - u\|_{p;\alpha,\beta} : u \in H\} \tag{2}$$

назовем наилучшим (α, β)-приближением функции f множеством H в метрике L_p, а элемент $u_0 \in H$, реализующий inf в (2) — элементом наилучшего (α, β)-приближения. Для α или β в (2) будем допускать также значение $+\infty$, отождествляя в силу теоремы 2 из [7] или теоремы 1.4.10 из [8] $E(f, H)_{p;1,\infty}$ с наилучшим приближением снизу $E^+(f, H)_p$, и $E(f, H)_{p;\infty,1}$ с наилучшим приближением сверху $E^-(f, H)_p$. Если K и F таковы, что $K*F \subset L_p$, то положим

$$E(K*F, H)_{p;\alpha,\beta} = \sup\{E(f, H)_{p;\alpha,\beta} : f \in K*F\}.$$

Вместо $E(f, H)_{p;1,1}$ и $E(K*F; H)_{p;1,1}$ будем писать $E(f, H)_p$ и $E(K*F, H)_p$. Это наилучшие L_p-приближения без ограничений функции f и класса $K*F$.

Напомним, что n-поперечником Колмогорова класса $K*F$ в пространстве L_p называется величина

$$d_n(K*F, L_p) = \inf E(K*F, a + H)_p,$$

где inf берется по всевозможным n-мерным подпространствам $H \subset L_p$ и по всевозможным элементам $a \in L_p$.

Задачу оптимизации квадратурных формул для классов $K*F$ (в связи с тем, что эти классы, вообще говоря, не симметричны, т. е. из $f \in K*F$ не следует, что $-f \in K*F$) будем рассматривать в следующей постановке.

Пусть K и F таковы, что $K*F \subset C$. Обозначим через Q_n, $n = 1, 2,$ множество всевозможных функционалов вида

$$q(f) = \sum_{l=1}^{m} a_l f(x_l), \tag{3}$$

где $x_1 < \ldots < x_m < x_1 + 2\pi$; $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$; $m \leqslant n$. Функционалы из Q_n будем называть квадратурными формулами. Для $f \in K*F$ и $q \in Q_n$ положим

$$R(f, q) = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt - q(f).$$

Далее пусть $R^-(K*F; q) = \inf\{R(f, q) : f \in K*F\}$, $R^+(K*F, q) = \sup\{R(f, q) : f \in K*F\}$ и $I(K*F; q) = [R^-(K*F; q), R^+(K*F; q)]$. Для симметричных классов $K*F$ величины $|R^-(K*F; q)|$ и $|R^+(K*F; q)|$ совпадают между собой и совпадают с обычной погрешностью

$$R(K*F, q) = \sup\{|R(f, q)| : f \in K*F\}$$

квадратурной формулы q на классе $K*F$.

Пусть $Q \subset Q_n$. Квадратурную формулу $\overline{q}$ назовем Q-оптимальной для класса $K*F$, если $\overline{q} \in Q$ и $I(K*F; \overline{q}) \subset I(K*F; q)$ для любой другой формулы $q \in Q$.

Наибольший интерес представляют Q_n-оптимальные формулы, и в случае $\mu = \mu(K) = 1$ для классов $K*F$ получим именно Q_n-оптимальные формулы. Далее, для $\sigma \in \mathbb{R}$ обозначим через $Q_{n,\sigma}$ совокупность квадратурных формул вида (3), для которых $\sum_{l=1}^{m} a_l = 2\pi\sigma$. В случае $\mu = 0$ для классов $K*F$ при любом σ будем решать задачу о нахождении $Q_{n,\sigma}$-оптимальных формул. Дело в том, что $\inf\{R^+(K*F; q) : q \in Q_n\}$ может достигаться для $q_1 \in Q_{n,\sigma_1}$, а $\sup\{R^+(K*F; q) : q \in Q_n\}$ — для $q_2 \in Q_{n,\sigma_2}$, и при этом будет $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Тогда Q_n-оптимальной формулы заведомо не существует.

Отметим, что при $\mu = 1$ класс $K*F$ вместе с любой функцией f содержит и любую функцию вида $f + a$, $a \in \mathbb{R}$. Поэтому Q_n-оптимальную формулу для этого класса можно искать только среди формул, точных на константах, т. е., решая задачу отыскания $Q_{n,1}$-оптимальной формулы.

2. Основные результаты. Пусть $\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f(x) = \alpha \operatorname{sgn} f_+(x) - \beta \operatorname{sgn} f_-(x)$. Для $n = 1, 2, \ldots$; $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ и $\sigma \in (-\beta, \alpha)$ положим

$$\varphi^{\sigma}_{n;\alpha,\beta}(x) = \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}\left(\cos nx - \cos\frac{\pi(\beta + \sigma)}{\alpha + \beta}\right)$$

(вместо $\varphi^0_{n;1,1}$ будем писать φ_n). Это четная $2\pi/n$-периодическая функция, которая принимает значение α для $x \in [0, \pi(\beta + \sigma) n^{-1} (\alpha + \beta)^{-1})$, значение $-\beta$ для $x \in [\pi(\beta + \sigma) n^{-1} (\alpha + \beta)^{-1}, \pi n^{-1}]$ и имеет на периоде среднее значение σ.

Теорема 1. *Пусть $K \in CVD$, F — произвольное Π-инвариантное множество; $n = 1, 2, \ldots$; H есть H^T_{2n-1} или $K*H^S_{2n,r}$ $(r = 0, 1, \ldots)$. Тогда*

$$d_{2n-1}(K*F; L_1) = d_{2n-1+\mu}(K*F; L_1) = E(K*F, H)_1 =$$
$$= \sup\left\{\int_0^{2\pi} \Pi(K*\varphi_n; t)\,\Pi(\varphi, t)\,dt : \varphi \in F, \varphi \perp \mu\right\}.$$

Большинство известных результатов о поперечниках классов периодических функций в пространстве L_1 приведены в [8—13], где можно найти ссылки на другие работы.

Пусть $n = 1, 2, \ldots$; $\sigma \in \mathbb{R}$. Положим

$$q_{n,\sigma}(f) = \frac{2\pi\sigma}{n} \sum_{l=1}^{n} f\left(\frac{2\pi l}{n}\right) \tag{4}$$

и

$$M_{n,\sigma}(K; x) = \int_0^{2\pi} K(t)\,dt - \frac{2\pi\sigma}{n} \sum_{l=1}^{n} K\left(\frac{2\pi l}{n} - x\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$; $K \in CVD$ *и* Π — *инвариантное множество* F *таковы, что* $K*F \subset C$; $\sigma \in \mathbb{R}$ *произвольно и* $Q = Q_{n,\sigma}$, *если* $\mu = \mu(K) = 0$; $\sigma = 1$ *и* $Q = Q_n$, *если* $\mu = 1$. *Тогда формула* $q_{n,\sigma}$ *является* Q-*оптимальной для класса* $K*F$. *При этом*

$$R^{\pm}(K*F; q_{n,\sigma}) = \pm \sup\left\{\int_0^{2\pi} \Pi(\pm M_{n,\sigma}(K;\cdot); t)\,\Pi(\varphi, t)\,dt : \varphi \in F, \varphi \perp \mu\right\}.$$

Изложение большинства известных результатов по оптимизации квадратурных формул и ссылки на другие работы можно найти в [13—21]. Теорема 2 анонсирована в [19]. Выяснение возможно более широких условий, обеспечивающих оптимальность для данного класса функций квадратурных формул типа (4), представляет интерес, в частности, в связи с результатами работы [22].

Важную роль при доказательстве теорем 1 и 2 будут играть представляющие самостоятельный интерес интегральные неравенства для перестановок «(γ, δ)-сплайнов» и «моносплайнов» (теоремы 3 и 4).

Обозначим через $S_{n;\gamma,\delta}$ $(n = 1, 2, \ldots; \gamma, \delta > 0)$ совокупность всевозможных функций из L_∞, принимающих только значения γ и $-\delta$ и имеющих на периоде $\leqslant 2n$ перемен знака (точек разрыва). Если $-\delta < \sigma < \gamma$, то $S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta} = \left\{f \in S_{n;\gamma,\delta} : \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 2\pi\sigma\right\}$. Функции из $K*S_{n;\gamma,\delta}$ будем называть (γ, δ)-сплайнами. Везде ниже будем писать $f \prec F$, если $f, F \in L_1$; f, $F \geqslant 0$, и для любого $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{x} P(f, t)\,dt \leqslant \int_0^{x} P(F, t)\,dt.$$

Теорема 3. *Пусть* $K \in CVD$; $\gamma, \delta > 0$; $\sigma \in (-\delta, \gamma)$ *произвольно, если* $\mu(K) = 0$, *и* $\sigma = 0$, *если* $\mu(K) = 1$. *Тогда для любых* $g \in S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(K*\varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta} - \lambda)_{\pm} \prec (K*g - \lambda)_{\pm}.$$

Эта теорема обобщает теорему 1.4 из [5] (см. также [13], теорема 2) и включает в себя практически все известные результаты по экстремальным свойствам совершенных сплайнов.

Пусть $f \in K*F$, т. е. $f = a\cdot\mu + K*\varphi$, где $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in F$, $\varphi \perp \mu$. Для заданной квадратурной формулы $q \in Q_n$ вида (3) после несложных преобразований имеем

$$R(f, q) = a\cdot\mu\left(2\pi - \sum_{l=1}^{m} a_l\right) + \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,M(t)\,dt,$$

где

$$M(t) = \int_0^{2\pi} K(u)\,du - \sum_{l=1}^{m} a_l K(x_l - t). \tag{5}$$

Так как в случае $\mu = 1$ нас будут интересовать только формулы $q \in Q_{n,1}$, то мы всегда (и при $\mu = 0$, и при $\mu = 1$) будем иметь

$$R(f, q) = \int_0^{2\pi} \varphi(t) M(t)\,dt. \tag{6}$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathfrak{M}_{n,\sigma}(K)$ совокупность функций вида (5) таких, что $\sum_{l=1}^{m} a_l = 2\pi\sigma$. Функции из $\mathfrak{M}_{n,\sigma}(K)$ будем (по аналогии со случаем $K = B_r$) называть моносплайнами. Согласно (6) каждой формуле $q \in Q_{n,\sigma}$ (при всех σ, если $\mu = 0$, и при $\sigma = 1$, если $\mu = 1$) соответствует моносплайн $M \in \mathfrak{M}_{n,\sigma}(K)$ вида (5).

Теорема 4. *Пусть $K \in CVD$; $\sigma \in \mathbb{R}$ произвольно, если $\mu = 0$, и $\sigma = 1$, если $\mu = 1$; $n = 1, 2, \ldots$. Тогда для любых $M \in \mathfrak{M}_{n,\sigma}(K)$ и $\lambda \in R$*

$$(M_{n,\sigma}(K; \cdot) - \lambda)_{\pm} \prec (M - \lambda)_{\pm}.$$

Эта теорема обобщает теорему 3 из [13] и содержит все экстремальные свойства моносплайнов $M_{n,\sigma}$, установленные в [13—21].

Основную роль при доказательстве теорем 3 и 4 будет играть следующая теорема, представляющая и самостоятельный интерес.

Теорема 5. *Пусть $n = 1, 2, \ldots$; $K \in CVD$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$; $\sigma \in (-\delta, \gamma)$ произвольно, если $\mu(K) = 0$, и $\sigma = 0$, если $\mu(K) = 1$. Тогда для любой функции $g \in S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ справедливо неравенство*

$$E(K * \varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}; H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \leqslant E(K * g, H_1^T)_{1;\alpha,\beta}.$$

3. Вспомогательные сведения. Следующая теорема распространяет на случай наилучших (α, β)-приближений теорему двойственности С. М. Никольского [8, предложение 1.4.1].

Теорема 6 [7, *теорема* 5]. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$; $p^{-1} + q^{-1} = 1$; $\alpha, \beta \in (0, \infty]$. Для произвольной функции $f \in L_p$ и любого конечномерного подпространства $H \subset L_p$*

$$E(f; H)_{p;\alpha,\beta} = \sup \left\{ \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\,dt : \| g \|_{q;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leqslant 1; g \perp H \right\}.$$

Для любой функции f, отличной почти всюду от нуля,

$$\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f = \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sgn} f - \frac{\beta - \alpha}{2}. \tag{7}$$

Учитывая (7), легко доказать, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $f \in L_1$ отлична почти всюду от любого элемента g конечномерного подпространства $H \subset L_1$. Тогда для всех $\alpha, \beta \in (0, \infty)$*

$$E(f, H)_{1;\alpha,\beta} = \inf_{g \in H} \left[\frac{\alpha + \beta}{2} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|\,dt - \frac{\beta - \alpha}{2} \int_0^{2\pi} (f(t) - g(t))\,dt \right].$$

Лемма 2 [7, *теорема* 4]. *Пусть $f \in L_1$; $H \subset L_1$ — конечномерное подпространство. Для того чтобы $g_0 \in H$ было элементом наилучшего (α, β)-приближения для f, достаточно и, если $f - g_0 \neq 0$ почти всюду, необходимо, чтобы для любого $g \in H$*

$$\int_0^{2\pi} g(t) \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(f(t) - g_0(t))\,dt = 0$$

(*когда* $f - g_0 \neq 0$ *почти всюду, это соотношение эквивалентно такому:*

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{sgn}\left(f(t) - g_0(t)\right) dt = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt\Big).$$

Несложные вычисления с учетом того, что $B_1(x) = \dfrac{\pi - x}{2\pi}$ для $x \in (0, 2\pi)$, показывают, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_1 + 2\pi\ (m \leqslant n)$ — *точки разрыва функции* $s \in S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ $(n = 1, 2, \ldots; \gamma, \delta > 0; -\delta < \sigma < \gamma)$, *которая на интервале* (x_1, x_2) *принимает значение* γ. *Тогда* $\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l x_l = 2\pi\dfrac{\sigma+\delta}{\gamma+\delta}$; $s(x) = (\gamma+\delta)\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l B_1(x_l - x) + \sigma$, *и если* $S(x) = a\cdot\mu + (K*s)(x)$, *то*

$$S(x) = a\cdot\mu + (\gamma+\delta)\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l\int_0^{2\pi} B_1(x_l - t)\,K(x-t)\,dt + \sigma\int_0^{2\pi} K(t)\,dt. \quad (8)$$

Учитывая, что при фиксированных $K \in L_1$; $n = 1, 2, \ldots; \gamma, \delta > 0$ и $\sigma \in (-\delta, \gamma)$ множество $K*S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ локально компактно в топологии равномерной сходимости, нетрудно убедиться, что справедлива такая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $n = 1, 2, \ldots$; $K \in L_1$; $\gamma, \delta > 0$; $\sigma \in (-\delta, \gamma)$ *произвольно, если* $\mu = 0$, *и* $\sigma = 0$, *если* $\mu = 1$; $\alpha, \beta \in (0, \infty]$, $\min\{\alpha, \beta\} < \infty$. *Тогда во множестве* $K*S^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$ *существует элемент, минимизирующий величину* $E(S, H_1^T)_{1;\alpha,\beta}$.

С помощью известных свойств перестановок (см. например, [4], гл. 5; [6], гл. 2) устанавливаются следующие две леммы.

Лемма 5 [5, *лемма* 2.3]. *Пусть* $f, g \in C$; $f, g \perp 1$ *и* $(f-\lambda)_{\pm} \prec (g-\lambda)_{\pm}$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in L_1$

$$\int_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t)\,\Pi(f, t)\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi; t)\,\Pi(g, t)\,dt.$$

Лемма 6 [5, *лемма* 2.2]. *Для любых* $f, g \in L_1$

$$\sup_{\Pi(\varphi)=\Pi(f)} \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \Pi(f; t)\,\Pi(g; t)\,dt.$$

В дальнейшем во многих рассуждениях с *CVD*-ядрами K (например, при доказательстве теоремы 5) будет удобно считать ядра K аналитическими на вещественной оси. Это не приведет к потере общности, поскольку произвольное *CVD*-ядро можно как угодно хорошо в смысле метрики L_1 аппроксимировать такими ядрами (достаточно рассмотреть ядра $A_h * K$, где A_h определены равенством (1)). Существенную техническую роль при доказательстве теоремы 5 будет играть такая лемма 7.

Лемма 7. *Пусть отличное от константы ядро* K *является аналитическим на вещественной оси. Для любой пары непересекающихся отрезков* Δ_1 *и* Δ_2, *лежащих на одном участке монотонности* K, *найдутся функции* $\omega_1, \omega_2 \in C$ *такие, что*

1) $\omega_j(x) \neq 0\ (j = 1, 2)$ *только для* $x \in \bigcup_{l\in\mathbb{Z}}(2\pi l + \Delta_j)$ *и* $\int_0^{2\pi}\omega_j(t)\,dt = 0$;

2) *для* $j = 1, 2$ *существуют* $c_j \in \Delta_j$ *такие, что* $\mathrm{sgn}\,\omega_j(x) = (-1)^j\,\mathrm{sgn}(x - c_j)$ *для* $x \in \Delta_j$;

3) *найдется* $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$, *такое, что*

$$\xi \int_{\Delta_1} K(t)\,\omega_1(t)\,dt + \int_{\Delta_2} K(t)\,\omega_2(t)\,dt = 0, \tag{9}$$

и при этом

$$\xi \int_{\Delta_1} K'(t)\,\omega_1(t)\,dt + \int_{\Delta_2} K'(t)\,\omega_2(t)\,dt \neq 0.$$

Доказательство. Существование функций ω_1, ω_2 со свойствами 1 — 3 очевидно. При этом $\int_{\Delta_j} K(t)\,\omega_j(t)\,dt \neq 0$, $j = 1, 2$, и имеют разные знаки, поэтому каковы бы ни были ω_1 и ω_2, легко удовлетворить условию (9). Предполагая, что всякий раз, когда справедливо (9), справедливо также

$$\xi \int_{\Delta_1} K'(t)\,\omega_1(t)\,dt + \int_{\Delta_2} K'(t)\,\omega_2(t)\,dt = 0,$$

получаем (фиксируя какую-нибудь функцию ω_2), что

$$\frac{\int_{\Delta_1} K'(t)\,\omega_1(t)\,dt}{\int_{\Delta_1} K(t)\,\omega_1(t)\,dt} = \frac{\int_{\Delta_2} K'(t)\,\omega_2(t)\,dt}{\int_{\Delta} K(t)\,\omega_2(t)\,dt} = \eta$$

для любой функции ω_1, которая непрерывна на Δ_1, меняет знак только один раз и имеет на Δ_1 нулевое среднее значение. Это возможно, только если на Δ_1

$$K'(t) + \eta K(t) \equiv \mathrm{const}. \tag{10}$$

Поскольку среди аналитических решений уравнения (10) период 2π имеют только константы, приходим к противоречию и лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть $f, g \in C$ имеют равные средние значения на периоде и для всех $\alpha, \beta \in (0, \infty)$*

$$E(f, H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \leqslant E(g, H_1^T)_{1;\alpha,\beta}.$$

Тогда $(f - \lambda)_\pm \prec (g - \lambda)_\pm$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эта теорема доказана в [5, теорема 2.3] при условии, что f и g имеют нулевые средние значения на периоде. Однако, легко видеть, что это условие несущественно.

4. Доказательство теорем 5 и 3. В п. 3 отмечено, что теорему 6 достаточно доказать для ядер K вида $A_h * K_1$, где $K_1 \in CVD$. Пусть числа n, α, β, γ, δ, σ фиксированы, причем $\sigma = 0$, если $\mu(K) = 1$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$E(S, H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \to \inf, \quad S \in K * S_{n;\gamma,\delta}^\sigma. \tag{11}$$

В силу леммы 4 существует $\bar{S} \in K * S_{n;\gamma,\delta}^\sigma$, реализующий inf в (11). Предположим, что $\bar{S} = K * \bar{s}$, где $\bar{s}$ имеет на периоде $2m \leqslant 2n$ точек разрыва $\bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_{2m}$. Очевидно, можно считать, что эти точки лежат на интервале $(0, 2\pi)$ и $\bar{s}(x) = \gamma$ для $x \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, т. е. (лемма 3)

$$\bar{S}(x) = (\gamma + \delta) \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l \int_0^{2\pi} B_1(\bar{x}_l - t)\,K(x - t)\,dt + \sigma \int_0^{2\pi} K(t)\,dt. \tag{12}$$

Тогда в силу лемм 1 и 3 точки $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2m}$ и константа $\bar{c}$ наилучшего (α, β)-приближения для $\bar{S}$ реализуют inf в следующей задаче:

$$F(x_1, \ldots, x_{2m}; c) \to \inf, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l x_l = 2\pi \frac{\sigma + \delta}{\gamma + \delta},$$

$$0 < x_1 < \ldots < x_{2m} < 2\pi, \tag{13}$$

где

$$F = F(x_1, \dots, x_{2m}, c) =$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left| (\gamma+\delta) \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l \int\limits_0^{2\pi} B_1(x_l - t) K(x-t)\,dt + \sigma \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt - c \right| dx -$$

$$- \pi(\beta-\alpha)\left(\sigma \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt - c\right).$$

Функция F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{2m}, \overline{c})$ в том смысле, что существуют и непрерывны частные производные $\partial F/\partial x_j$, $j = 1, \dots, 2m$ и $\partial F/\partial c$, причем

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = (-1)^j \frac{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}{2} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn}\left[(\gamma+\delta) \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l \int\limits_0^{2\pi} B_1(x_l - t) K(x-t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sigma \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt - c\right] \cdot \left[K(x - x_j) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt\right] dx; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -\frac{\alpha+\beta}{2} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn}\left[(\gamma+\delta) \sum_{l=1}^{2m} (-1)^l \int\limits_0^{2\pi} B_1(x_l - t) K(x-t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sigma \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt - c\right] dx + \pi(\beta-\alpha). \qquad (15)$$

Применяя для изучения задачи (13) принцип Лагранжа (см., например, [23], §§ 1.3, 3.2]) и учитывая соотношения (14), (15), (12), (8), устанавливаем, что свертка $K(-\cdot) * \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(\overline{S} - \overline{c})$ принимает в точках $\overline{x}_j$ (точках разрыва $\overline{s}$) равные значения.

Пусть $\eta = (K(-\cdot) * \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(\overline{S} - \overline{c}))(\overline{x}_j)$, $j = 1, \dots, 2m$. Положим (везде ниже $g = \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(\overline{S} - \overline{c}))$ $G = K(-\cdot) * g - \eta$, так что $G(\overline{x}_j) = 0$ при $j = 1, \dots, 2m$. Поскольку $K(-\cdot) \in CVD$, нетрудно убедиться в том, что G на $[0, 2\pi)$ обращается в нуль только в точках $\overline{x}_j$ и в каждой из этих точек меняет знак. В случае $\mu = 1$ рассуждаем так. Для любого тригонометрического полинома T, имеющего достаточно малую C-норму, $\nu(G - T) \leqslant \nu(g) = \nu(\overline{S} - \overline{c}) \leqslant \nu(\overline{s}) = 2m$. С другой стороны, если бы какая-то из точек $\overline{x}_j$ не была точкой перемены знака или, кроме точек $\overline{x}_j$, у G имелись бы и другие нули на $[0, 2\pi)$, то можно было бы подобрать T так, чтобы $\nu(G - T) > 2m$, что противоречит предыдущему. Случай $\mu = 0$ лишь немногим сложнее.

Таким образом,

$$\operatorname{sgn} G = \pm \operatorname{sgn} \overline{s}. \qquad (16)$$

Докажем, что это возможно (с точностью до сдвига аргумента), только если $\overline{S} = K * \varphi^{\sigma}_{m;\gamma,\delta}$.

Если $y \in \mathbb{R}$, то положим $h_{y,0}(x) = \overline{s}(x) - \overline{s}(x+y)$, $h_y(x) = \overline{S}(x) - \overline{S}(x+y)$, $H_{y,0}(x) = g(x) - g(x+h)$, $H_y(x) = G(x) - G(x+h)$.

Лемма 8. *Для любого y*

$$\nu(H_y) \geqslant \nu(h_{y,0}), \ \ \nu(H_{y,0}) \leqslant \nu(h_y). \qquad (17)$$

Действительно, если на периоде найдется $2d$ точек $t_1 < \dots < t_{2d}$, в окрестностях которых $h_{y,0}$ принимает ненулевые значения с чередованием знаков при переходе от одной окрестности к другой, то в силу равенства (16) в этих точках и H_y будет принимать ненулевые значения с чередованием знаков. Отсюда $\nu(H_y) \geqslant \nu(h_{y,0})$. Учитывая, что $\operatorname{sgn} g = \operatorname{sgn}(\overline{S} - \overline{c})$, аналогично устанавливаем неравенство $\nu(H_{y,0}) \leqslant \nu(h_y)$.

Лемма 9. *Для любого $y \in \mathbb{R}$ функция H_y либо тождественно равна нулю, либо имеет только простые изолированные нули.*

Доказательство. Отметим, что у $H_y \not\equiv 0$ могут быть только изолированные нули. Пусть $H_y \not\equiv 0$. Так как $K \in CVD$, получаем $\nu(h_{y,0}) \geqslant \nu(h_y)$, откуда с учетом первого равенства в (17) следует $\nu(H_y) \geqslant \nu(h_y)$. С другой стороны, учитывая, что $K(-\cdot) \in CVD$, а также второе из неравенств (17), выводим $\nu(H_y) \leqslant \nu(H_{y,0}) \leqslant \nu(h_y)$. Таким образом,

$$\nu(H_y) = \nu(H_{y,0}). \tag{18}$$

Предположим, что H_y имеет кратный нуль x_0, т. е. $H_y(x_0) = 0$ и $H'_y(x_0) = 0$. Выберем какой-нибудь отрезок, лежащий на участке монотонности функции $K(x - x_0)$, на котором $H_{y,0}$ всюду отлична от нуля. На этом отрезке, в свою очередь, выберем два непересекающихся отрезка Δ_1 и Δ_2. В силу леммы 7 найдутся непрерывные функции ω_1, ω_2, обладающие по отношению к $K(x - x_0)$ свойствами 1—4 из леммы 7. Положим $\omega_\varepsilon = \varepsilon(\xi\omega_1 + \omega_2)$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$. В силу свойства 4 леммы 7 $(K(-\cdot)*\omega_\varepsilon)(x_0) = 0$ и $(K(-\cdot)*\omega_\varepsilon)'(x_0) \neq 0$. Число ε теперь можно подобрать настолько малым по абсолютной величине и знак его выбрать так, чтобы $\nu(H_{y,0} + \omega_\varepsilon) = \nu(H_{y,0})$, в окрестности каждой точки перемены знака H_y функция $H_y + K(-\cdot)*\omega_\varepsilon$ также имела бы перемену знака, а в окрестности точки x_0 функция $H_y + K(-\cdot)*\omega_\varepsilon$ имела бы не меньше двух перемен знака. Тогда с учетом (18) имеем

$$\nu(K(-\cdot)*(H_{y,0} + \omega_\varepsilon)) = \nu(H_y + K(-\cdot)*\omega_\varepsilon) \geqslant \nu(H_y) + 2 = \nu(H_{y,0}) + 2 = \nu(H_{y,0} + \omega_\varepsilon) + 2$$

в противоречие с тем, что $K(-\cdot) \in CVD$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 5. В силу леммы 9 все отличные от тождественного нуля разности H_y имеют только простые нули. Покажем, что отсюда следует $2\pi/m$-периодичность функции G. Пусть T — минимальный период G и a_1 — точка наименьшего по величине положительного локального максимума G. Покажем, что на интервале $[a_1, a_1 + T]$ у функции G ровно два нуля. Предположим противное: на интервале $[a_1, a_1 + T]$ имеется, по крайней мере, четыре нуля G. Но тогда на этом интервале найдется еще, по крайней мере, одна точка положительного локального максимума G. Обозначим через a_2 ближайшую справа к точке a_1 точку локального максимума G и через a_3 — ближайшую слева к точке $a_1 + T$ точку локального максимума G. Далее, b_1—ближайшая справа к a_1 точка локального минимума G, а b_2—ближайшая слева к a_1+T точка локального минимума G. Докажем, что найдется $y \in (0, T)$ такое, что H_y имеет кратный нуль. Это будет означать, что G имеет период $y < T$, что противоречит минимальности периода T. Если $G(a_1) = G(a_2)$, то в качестве y можно взять $y = a_2 - a_1 < T$ (H_y имеет тогда кратный нуль в точке a_1). Аналогичен случай, когда $G(a_1 + T) = G(a_3)$ (может случиться, что $a_2 = a_3$, тогда рассмотрение упрощается). Предположим теперь, что $G(a_2) > G(a_1)$ и $G(a_3) > G(a_1) = G(a_1 + T)$. Рассмотрим числа $G(b_1)$ и $G(b_2)$. Если они равны, то можно положить $y = b_2 - b_1$. Пусть $G(b_1) \neq G(b_2)$ и для определенности $G(b_2) < G(b_1)$. Покажем, что на интервалах (b_1, a_2) и $(b_2, a_1 + T)$ найдутся соответственно точки w_1 и w_2, для которых $G(w_1) = G(w_2)$ и $G'(w_1) = G'(w_2)$ (в случае $G(b_2) > G(b_1)$ такие точки найдутся на интервалах (a_1, b_1) и (a_3, b_2)). Тогда можно будет считать $y = w_2 - w_1$. Пусть G_1 — сужение функции G на (b_1, a_2), а G_2 — сужение G на $(b_2, a_1 + T)$. В интервале $(G(b_1), G(a_1 + T))$ определены непрерывно дифференцируемые функции G_1^{-1} и G_2^{-1}. При этом предел $(G_1^{-1})'(x)$ конечен, когда x, возрастая, стремится к $G(a_1 + T)$, и равен $+\infty$, когда x, убывая, стремится к $G(b_1)$. Для $(G_1^{-1})'(x)$ этот предел конечен при $x \to G(b_1)$ и равен $+\infty$ при $x \to G(a_1 + T)$. Поэтому найдется точка $u \in (G(b_1), G(a_1 + T))$ такая, что $(G_1^{-1})'(u) =$

$= (G_2^{-1})'(u)$. Пусть $w_1 = G_1^{-1}(u)$ и $w_2 = G_2^{-1}(u)$. Тогда $G(w_1) = G(w_2)$ и

$$G'(W_1) = \frac{1}{(G_1^{-1})'(u)} = \frac{1}{(G_2^{-1})'(u)} = G'(w_2).$$

Итак, предполагая, что на интервале $[a_1, a_1 + T]$ есть, по крайней мере, четыре нуля G, приходим к тому, что функция G имеет период $y \in (0, T)$, что противоречит минимальности T. Таким образом, на $[a_1, a_1 + T]$ функция G обладает ровно двумя нулями. Поскольку нули G расположены T-периодическим образом и их на $[0, 2\pi)$ в точности $2m$, получаем, что $T = 2\pi/m$. Следовательно, G имеет период $2\pi/m$. Но тогда и $\overline{s}$, и $\overline{S}$ будут $2\pi/m$-периодическими, так что $\overline{S} = K*\varphi^{\sigma}_{m;\gamma,\delta}$ с точностью до сдвига аргумента. Мы показали, что нижнюю грань в задаче (13) реализуют узлы $\varphi^{\sigma}_{m;\gamma,\delta}$. Поскольку $E(K*\varphi^{\sigma}_{m;\gamma,\delta}; H_1)_{1;\alpha,\beta} > E(K*\varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}; H_1^T)_{1;\alpha,\beta}$ при $n > m$, видим, что нижнюю грань в задаче (11) реализует функция $\overline{S} = K*\varphi^{\sigma}_{n;\gamma,\delta}$. Теорема 5 доказана.

Для доказательства теоремы 3 теперь достаточно сопоставить теоремы 5 и 7.

5. Доказательство теоремы 4. Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 10. *Пусть $K \in CVD$ и является аналитическим на вещественной оси; $\alpha, \beta > 0$; $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1 + 2\pi$. Тогда существует функция $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ такая, что (α, β)-сплайн $K*s$ принимает в точках $x_1, \ldots, x_n$ значение $\min_t (K*s)(t)$.*

Доказательство. Полагая $x_1, \ldots, x_n$ фиксированными, рассмотрим совокупность A функций $g(t)$ вида

$$g(t) = \sum_{l=1}^{n} a_l K(x_l - t) + \sum_{l=1}^{n} b_l K'(x_l - t),\ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R},\ \sum_{l=1}^{n} a_l = -1.$$

Для этой совокупности функции рассморим экстремальную задачу

$$E(g, H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \to \inf, \quad g \in A. \tag{19}$$

Очевидно, ее решение существует. Пусть inf в (19) реализует функция $\overline{g} \in A$. Учитывая лемму 1 и применяя принцип Лагранжа, устанавливаем, что если $s = \mathrm{sgn}_{\alpha,\beta}(\overline{g} - \lambda_0)$, где λ_0 — константа наилучшего (α, β)-приближения для $\overline{g}$ (так что в силу леммы 2 $\int_0^{2\pi} s(t)\,dt = 0$), то для некоторого числа ξ

$$\int_0^{2\pi} K(x_l - t)\, s(t)\, dt = \xi \text{ и } \int_0^{2\pi} K'(x_l - t)\, s(t)\, dt = 0, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Учитывая, что $K \in CVD$, нетрудно убедиться в том, что $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ (в частности, $\nu(s) \leqslant 2n$) и либо $\xi = \min_t (K*s)(t)$, либо $\xi = \max_t (K*s)(t)$. Но

$$0 < E(\overline{g}; H_1^T)_{1;\alpha,\beta} = \int_0^{2\pi} \overline{g}(t)\, s(t)\, dt = \sum_{l=1}^{n} a_l \int_0^{2\pi} K(x_l - t)\, s(t)\, dt = -\xi,$$

значит, $\xi < 0$, и следовательно, $(K*s)(x_l) = \min_t (K*s)(t)$. Лемма доказана.

В силу теоремы 7 для доказательства теоремы 4 достаточно показать, что для $M \in \mathfrak{M}_{n,\sigma}(K)$ при всех $\alpha, \beta > 0$

$$E(M; H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \geqslant E(M_{n,\sigma}(K; \cdot); H_1^T)_{1;\alpha,\beta}. \tag{20}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — узлы моносплайна M вида (5), и (см. лемму 10) $s \in S^0_{n;\alpha,\beta}$ таково, что $K*s$ принимает в точках $x_1, \ldots, x_m$ значение

$\min_t (K*s)(t)$. Для функции $K*s$ справедливо равенство

$$E^+(K*s; H_1^T)_1 = -2\pi\min_t (K*s)(t). \tag{21}$$

В силу теоремы 6

$$E(M; H_1^T)_{1;\alpha,\beta} = \sup\left\{\int_0^{2\pi} M(t)\, g(t)\, dt : \| g \|_{\infty;\alpha-1,\beta-1} \leqslant 1,\ g \perp 1\right\},$$

и следовательно,

$$E(M; H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \geqslant \int_0^{2\pi} M(t)\, s(t)\, dt = -\sum_{l=1}^{m} a_l \int_0^{2\pi} K(x_l - t)\, s(t)\, dt =$$

$$= -2\pi\sigma\min_t (K*s)(t) = \sigma E^+(K*s; H_1^T)_1.$$

Таким образом,

$$E(M; H_1^T)_{1;\alpha,\beta} \geqslant \sigma E^+(K*s; H_1^T)_1.$$

С другой стороны,

$$E(M_{n,\sigma}(K; \cdot); H_1^T)_{1;\alpha,\beta} = -\frac{2\pi\sigma}{n}\sum_{l=1}^{n}\int_0^{2\pi} K\left(\frac{2l\pi}{n} - u\right)\times$$

$$\times \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(M_{n,\sigma}(K; u) - \lambda)\, du, \tag{22}$$

где λ — константа наилучшего (α, β)-приближения для $M_{n,\sigma}(K; \cdot)$ в L_1. Функция

$$F(t) := \int_0^{2\pi} K(t-u) \operatorname{sgn}_{\alpha,\beta}(M_{n,\sigma}(K; u) - \lambda)\, du$$

разве что сдвигом аргумента отличается от функции $K*\varphi^0_{n;\alpha,\beta}$, поэтому ввиду (22)

$$E(M_{n,\sigma}(K; \cdot); H_1^T)_{1;\alpha,\beta} = -\frac{2\pi\sigma}{n}\sum_{l=1}^{n} F\left(\frac{2l\pi}{n}\right) =$$

$$= -2\pi\sigma F\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leqslant -2\pi\sigma \min_t (K*\varphi^0_{n;\alpha,\beta})(t) = \sigma E^+(K*\varphi^0_{n;\alpha,\beta}; H_1^T)_1. \tag{23}$$

В силу теоремы 3

$$E^+(K*s; H_1^T)_1 \geqslant E^+(K*\varphi^0_{n;\alpha,\beta}; H_1^T)_1. \tag{24}$$

Сопоставляя (21), (23), (24), завершаем доказательство неравенства (20), а значит и теоремы 4.

6. Доказательство теоремы 1. В условиях теоремы 1 имеем ([1], теорема 8.1)

$$d_{2n}(K*F, L_1) \leqslant d_{2n-1}(K*F, L_1) \leqslant E(K*F; H)_1 =$$

$$= \sup\left\{\int_0^{2\pi} \Pi(K*\varphi_n; t)\, \Pi(\varphi, t)\, dt : \varphi \in F,\ \varphi \perp 1\right\},$$

где $H = H^T_{2n-1} \vee K*H^S_{2n,r}$. Следовательно, для доказательства теоремы 1 поперечники $d_{2n-1}(K*F, L_1)$ и $d_{2n-1+\mu}(K*F, L_1)$ достаточно оценить снизу.

Лемма 11 ([9], *лемма* 6.8.1). *Для любого $2n$-мерного подпространства $H \subset L_1$, содержащего константы, найдется функция $g_H \in S^0_{n;1,1}$, ортогональная этому подпространству.*

Классы $K*F$ в случае $\mu=\mu(K)=1$ вместе с любой функцией f содержат также любую функцию вида $f+c$, $c=\mathrm{const}$. Поэтому для получения нужных оценок снизу поперечников $d_{2n}(K*F, L_1)$ таких классов достаточно доказать, что для любого $a\in L_1$, и любого $2n$-мерного подпространства $H\subset L_1$, содержащего константы

$$E(K*F, a+H)_1 \geqslant \sup\left\{\int_0^{2\pi}\Pi(K*\varphi_n; t)\,\Pi(\varphi, t)\,dt : \varphi\in F, \varphi\perp 1\right\} \qquad (25)$$

(если H констант не содержит, то $E(K*F, a+H)_1=+\infty$). В случае $\mu=0$ нам нужна оценка (25) для любого $(2n-1)$-мерного подпространства $H\subset L_1$. Но если $H'=\mathrm{lin}\,(H, H_1^T)$, то $\dim H'\leqslant 2n$, H' содержит константы и $E(K*F; a+H)_1\geqslant E(K*F, a+H')_1$. Таким образом, в обоих случаях ($\mu=1$ и $\mu=0$) достаточно доказать (25) для произвольного $2n$-мерного подпространства $H\subset L_1$, содержащего константы.

В силу теоремы двойственности для наилучшего приближения выпуклым множеством в пространстве L_p (см., например, [8], предложение 1.4.1) для любой функции $f\in L_1$

$$E(f, a+H)_1=\sup_{\|g\|_\infty\leqslant 1}\left\{\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx-\sup_{u\in H}\int_0^{2\pi}(a(x)+u(x))\,g(x)\,dx\right\}=$$

$$=\sup_{\|g\|_\infty\leqslant 1}\left\{\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx-\int_0^{2\pi}a(x)\,g(x)\,dx-\sup_{u\in H}\int_0^{2\pi}u(x)\,g(x)\,dx\right\}.$$

Внешний sup можно брать только по $g\perp H$, так как в противном случае $\sup\limits_{u\in H}\int_0^{2\pi}u(x)\,g(x)\,dx=+\infty$. Поэтому

$$E(f, a+H)_1=\sup\left\{\int_0^{2\pi}[f(x)-a(x)]\,g(x)\,dx : \|g\|_\infty\leqslant 1, g\perp H\right\},$$

и если g_H — функция из леммы 11, то

$$E(K*F, a+H)_1=\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\ \sup_{\substack{\|g\|_\infty\leqslant 1\\ g\perp H}}\left\{\int_0^{2\pi}(K*\varphi)(x)\,g(x)\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi}a(x)\,g(x)\,dx\right\}\geqslant\max\left\{\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}(K*\varphi)(x)\,g_H(x)\,dx-\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx,\right.$$

$$\left.\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}(K*\varphi)(x)(-g_H(x))\,dx+\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx\right\}=$$

$$=\max\left\{\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}(K(-\cdot)*g_H)(x)\,\varphi(x)\,dx-\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx,\right.$$

$$\left.\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}(K(-\cdot)*(-g_H))(x)\,\varphi(x)\,dx+\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx\right\}.$$

Учитывая теорему 3 и леммы 5,6 получаем

$$E(K*F; a+H)_1\geqslant\max\left\{\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(K(-\cdot)*g_H, t)\,\Pi(\varphi, t)\,dt-\right.$$

$$-\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx,$$

$$\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(K(-\cdot)*(-g_H),t)\,\Pi(\varphi,t)\,dt+\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx\Big\}\geqslant$$

$$\geqslant\max\Big\{\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(K(-\cdot)*\varphi_n,t)\,\Pi(\varphi,t)\,dt-\int_0^{2\pi}a(x)\,g_H(x)\,dx,$$

$$\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(K(-\cdot)*\varphi_n,t)\,\Pi(\varphi,t)\,dt+\int_0^{2\pi}a(x)g_H(x)dx\Big\}\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(K*\varphi_n,t)\,\Pi(\varphi,t)\,dt.$$

Соотношение (25) для любого $2n$-мерного подпространства H, содержащего константы, а с ним и теорема 1, доказаны.

7. Доказательство теоремы 2. Пусть $\sigma=1$, если $\mu(K)=1$, и $\sigma\in\mathbb{R}$ произвольно, если $\mu=0$; $q\in Q_{n,\sigma}$ и $M\in\mathfrak{M}_{n,\sigma}(K)$ соответствует q по формуле (6). Используя последовательно лемму 6, теорему 4 и лемму 5, получаем

$$R^+(K*F;q)=\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}M(t)\,\varphi(t)\,dt=\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(M,t)\,\Pi(\varphi,t)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{\varphi\in F,\varphi\perp\mu}\int_0^{2\pi}\Pi(M_{n,\sigma}(K;\cdot),t)\,\Pi(\varphi,t)\,dt=R^+(K*F;q_{n,\sigma}).$$

Аналогично, $R^-(K*F;q)\leqslant R^-(K*F;q_{n,\sigma})$. Таким образом, для любой квадратурной формулы $q\in Q_{n,\sigma}$ (для любой $q\in Q_n$, если $\mu=1$ и $\sigma=1$) $I(K*F,\ q_{n,\sigma})\subset I(K*F;q)$. Теорема 2 доказана.

1. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн.—1987.— 28, № 5.— С. 6—21.
2. *Karlin S.* Total Positivity. Vol. 1.— Stanford: Stanford. Univ. Press, 1968.— 576 p.
3. *Pincus A.* n-Width in Approximation Theory.— Berlin etc.: Springer, 1985.— 291 p.
4. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями.— Киев : Наук. думка, 1982.— 252 с.
5. *Babenko V. F.* Approximation, widths and optimal quadrature formulae for classes of periodic functions with rearrengement invariant sets of derivatives // Anal. math.— 1987.— 13, N 4.— P. 281—306.
6. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М.: Наука, 1978.— 400 с.
7. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 4.— С. 409—416.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
9. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
10. *Субботин Ю. Н.* Поперечник класса W^rL в $L(0,2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Мат. заметки.— 1970.— 7, № 1.— С. 43—52.
11. *Pinkus A.* On n-width of periodic functions // J. Anal. math.— 1979.— 35.— P. 209—235.
12. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О поперечниках одного класса периодических функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т.— 1977.— С. 12—17.
13. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования//Докл. АН СССР.—1983.— 272, № 5.— С. 1038—1041.
14. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Наука, 1988.— 256 с.
15. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n}p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— 38, № 3.— С. 583—614.
16. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки.— 1976.— 19, № 6.— С. 913—926.
17. *Женсыкбаев А. А.* Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук.— 1981.— 36, № 4.— С. 107—159.

18. *Бабенко В. Ф., Гранкина Т. А.* О наилучших квадратурных формулах на классах сверток с $O(M, \Delta)$-ядрами // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложения.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т.— 1982.— С. 6—13.
19. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов сверток // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1986.— С. 7—10.
20. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* О наилучших методах интегрирования и восстановления функций на классах, задаваемых свертками, не увеличивающими осцилляцию //Успехи мат. наук.— 1984.— 39.— Вып. 2.— С. 177—178.
21. *Чахкиев М. А.* Линейные дифференциальные операторы и оптимальные квадратурные формулы // Докл. АН СССР.— 1983.— 273, № 1.— С. 60—65.
22. *Осколков К. И.* Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций // Там же.— 1979.— 249, № 1.— С. 49—52.
23. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 432 с.

Получено 15.01.91