УДК 517.9

Е. П. Трофимчук, С. И. Трофимчук

Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: структура множества моментов толчков

Рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, когда у множества моментов «толчков» допускаются конечные предельные точки. Выясняется топологическая структура этого множества: оно должно быть разреженным, в частности нигде не плотным в R.

Розглядаються звичайні диференціальні рівняння з імпульсним збуренням в фіксовані моменти часу, коли у множини моментів «поштовхів» допускаються скінченні граничні точки. З'ясовується топологічна структура цієї множини: вона повинна бути розрідженою, зокрема ніде не щільною в R.

1. В настоящей статье продолжается исследование импульсных систем [1, 2]

$$dx/dt = f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad t \in [a, b], \; x \in \Omega \subset R^n, \tag{1}$$

$$\Delta x\,|_{t_i} = h_i(x), \quad i \in N, \; \Delta x\,|_{t_i} \overset{\text{def}}{=} x(t_i + 0) - x(t_i), \tag{2}$$

когда у множества $T \overset{\text{def}}{=} \{t_i, \, i \in N\}$ допускаются конечные предельные точки. Если предположить ограниченность в Ω функций $h_i(x)$, то, исключая лишние моменты импульсного воздействия, без ограничения общности можно положить $H_i \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in \Omega} \| h_i(x) \| > 0$. Уже при анализе простейших систем такого вида (например, $T_1 = \{t_n = 1 - 1/n, \; n \geqslant 2\}$,

$$dx/dt = 0, \quad t \in [0, 2] \setminus T, \quad x \in R, \tag{3}$$

$$\Delta x\,|\,t_i = c_i, \quad c_i \in R \setminus \{0\}, \quad i \geqslant 2), \tag{4}$$

можно предугадать основные необходимые ограничения на функции f, h_i, и множество T для корректного определения системы (1), (2) и ее решения $x(t)$ как функции, удовлетворяющей уравнениям (1), (2).

Так, решение задачи Коши $x(0) = x_0$ для (3), (4) можно определить сразу на любом сегменте $[0, 1 - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$, как решение обычной импульсной системы с конечным числом моментов толчков: если $c_1 \overset{\text{def}}{=} 0$, то $x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i$ при $1 - 1/n \leqslant t < 1 - 1/(n+1)$. Для продолжения решения $x(t)$ на сегмент $[0, 1]$, очевидно, необходимо существование конечного предела $\lim_{t \to 1-0} x(t)$, т. е. сходимости ряда $\sum_{i=1}^{+\infty} c_i \overset{\text{def}}{=} c_\infty$. Если $c_\infty \in R$, то, положив $x(t) = c_\infty$ при $t \in [1, 2]$, получим функцию, которая удовлетворяет начальному условию и уравнениям (3), (4) всюду, кроме точки $t = 1$ (где осталось невыясненным, равна ли нулю производная $x'(1)$). Так как $x'(1) = \lim_{\varepsilon \to 0} (1/\varepsilon) \sum_{t_i : |1 - t_i| \leqslant \varepsilon} c_i$, то равенство нулю производной $dx/dt\,|_{t=1}$ равносильно тому что $\sum_{t_i : |1 - t_i| < \varepsilon} c_i = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее, чтобы поставленная задача Коши была корректна, необходимо, чтобы при малых сдвигах моментов времени, в которое происходит импульсное воздействие, решение задачи Коши также мало «шевелилось» бы. Применительно к системе (3), (4) это означает, что при перестановке слагаемых и, может быть, выбрасывания некоторого количества слагаемых с

© Е. П. ТРОФИМЧУК, С. И. ТРОФИМЧУК, 1990

достаточно большими номерами ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} c_i$ его сумма мало бы менялась. Но для этого необходима и достаточна абсолютная сходимость указанного ряда.

Пусть система (1), (2) удовлетворяет следующим условиям (не учитывая условий типа гладкости функций f, h_i):

$$\sum_{a \leqslant t_i \leqslant b} H_i = \sum_{i=1}^{+\infty} H_i < +\infty, \quad H_i > 0; \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{t_i : |t_i - t| < \varepsilon \\ t \in T}} H_i = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Как было показано в [2], добавление еще нескольких условий к приведенным выше обеспечивает существование, единственность решения (и корректность) задачи Коши $x(a) = x_0$ для системы (1), (2).

В (3), (4) множество $T_1 = \{1 - 1/n,\ n \geqslant 2\}$ (рассматриваемое как метрическое пространство с метрикой, индуцированной вложением $T_1 \subset R$) имело такую особенность: его производное множество ∂T_1 (т. е. совокупность предельных точек T_1) пусто. Установлению некоторых аналогов этого свойства множества T в общем случае и посвящена настоящая работа.

2. Обсудим два определения общей топологии.

Определение (см. [3, с. 83—85]). *Множество $X \subset R$ называется плотным в себе, если оно не содержит изолированных точек. Множество $Y \subset R$ называется разреженным, если оно не пусто и не содержит никакого плотного в себе подмножества.*

Так, любое конечное множество точек $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset R$ разрежено. Более того, бесконечное множество $\{t_1,\ i \in N\} \subset [a, b]$, состоящее из изолированных точек (т. е. дискретное множество), очевидно разрежено (например, таково множество $T_1 = \{1 - 1/n,\ n \geqslant 2\}$). Заметим, что разреженное множество состоит не более чем из счетного числа точек [3, с. 261] и характеризуется таким свойством: существует счетное трансфинитное число α такое, что производное множество $\partial^\alpha Y$ порядка α множества Y пусто: $\partial^\alpha Y = \varnothing$ [3, с. 270]. При этом Y рассматривается как метрическое подпространство R.

Приведенные выше в качестве примеров разреженные множества хороши тем, что при подходящем выборе последовательности положительных чисел $h = \{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ пара (h, T) удовлетворяет условиям (5), (6). Докажем это для более общего второго случая. Символом $\mathrm{Cl}\, A$ обозначено замыкание множества A в метрическом пространстве R с евклидовым расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма. *Пусть каждая точка, вообще говоря, бесконечного множества $T = \{t_i,\ i \in N : t_i \neq t_j,\ i \neq j\} \subset [a, b]$ изолирована, μ — произвольное положительное число: $0 < \mu \leqslant 1$ ($\mu = \mu(T)$ — некоторый нормирующий множитель, который впоследствии будем выбирать в зависимости от свойств T).*

Тогда существует такая последовательность положительных чисел $h = \{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$, что пара (h, T) удовлетворяет соотношениям типа (5), (6)

$$\sum_{a \leqslant t_i \leqslant b} h_i \leqslant \mu(T)\ (b - a), \tag{7}$$

$$\sum_{\substack{t_i : |t_i - t| < \varepsilon \\ t \in T}} h_i \leqslant \mu(T)\ (b - a)\, \varepsilon^2. \tag{8}$$

Доказательство. Положим $[a, b] = [0, 1]$, общий случай можно рассмотреть, разбивая сегмент $[a, b]$ на конечное число составляющих подсегментов длины, не превышающей единичной. Фиксируем точку t_i и рассмотрим числа $^*t_i$ и t_i^*, равные соответственно $\sup\{t_k : t_k < t_i\}$ и $\inf\{t_k : t_k > t_i\}$. Очевидно, $^*t_i,\ t_i^* \in R$ и $^*t_i < t_i < t_i^*$ в силу изолированности точки

t_i. Положим $h_i = \mu(T)\min((t_i^* - t_i)^3, (t_i - {}^*t_i)^3)$, $h_i > 0$. Поскольку интервалы $({}^*t_i, t_i) \subset [0, 1]$ не пересекаются, то

$$\sum_{a\leqslant t_i\leqslant b} h_i \leqslant \sum_{a\leqslant t_i\leqslant b} \mu(T)(t_i - {}^*t_i)^3 \leqslant \mu(T) \sum_{a\leqslant t_i\leqslant b} (t_i - {}^*t_i) \leqslant \mu(T)(b-a).$$

Далее, если $t \notin \mathrm{Cl}\, T$, то (8) выполнено очевидным образом, так как $\sum\limits_{t_i:|t_i-t|<\varepsilon} h_i = 0 \ \forall \varepsilon < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \rho(T, t) > 0$ — расстояние между замкнутыми множествами $\mathrm{Cl}\, T$ и t. Пусть, наконец, $t \in \mathrm{Cl}\, T \setminus T$. Тогда

$$\sum_{t_i:|t_i-t|<\varepsilon} h_i = \mu(T) \sum_{t_i:|t_i-t|<\varepsilon} \{\min((t_i^* - t_i), (t_i - {}^*t_i)) \min((t_i^* - t_i)^2,$$

$$(t_i - {}^*t_i)^2)\} \leqslant \mu(T) \sum_{t_i:|t-t|<\varepsilon} \min((t_i^* - t_i), (t_i - {}^*t_i))\varepsilon^2 \leqslant \mu(T)(b-a)\varepsilon^2.$$

Лемма доказана.

Вскоре мы увидим, что доказанное в лемме свойство дискретного подмножества $[a, b]$ присуще и любому разреженному на $[a, b]$ точечному множеству.

3. В данном пункте мы решаем поставленный вопрос, указывая полную топологическую характеристику множества моментов импульсного воздействия системы (1), (2).

Теорема. А. *Пусть множество T и последовательность положительных чисел $h = \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ таковы, что условия* (5), (6) *выполнены. Тогда множество T разрежено.* Б. *Наоборот, по любому разреженному множеству $T \subset [a, b]$, $T = \{t_j;\ j \in N\}$ можно указать такое счетное множество положительных чисел $h = \{h_j\}_{j=1}^{+\infty}$, что пара (h, T) удовлетворяет* (5), (6).

Доказательство. А. Пусть множество T не разрежено, т. е. содержит плотное в себе подмножество $S = \{t_j, j \in \Gamma \subset N\}$. Укажем тогда точку $t^* \in \mathrm{Cl}\, S \setminus T$, в которой условие (6) выполняться не будет. Пусть $t_{n_1} \in S$. В силу (5) существует сегмент $[a_1, b_1]$, внутренность которого содержит точку t_{n_1} и такой, что величина h_j для всех $t_j \in [a_1, b_1]$ меньше 10^{-1}. Выберем в интервале (a_1, b_1) такую точку $t_{n_2} \in S$, что $|t_{n_2} - t_{n_1}| < h_{n_1}^2$ и $h_{n_2} < h_{n_1}^2$ (это можно сделать вследствие плотности в себе множества S). Аналогичным образом включаем точку t_{n_2} во внутренность сегмента $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ такого, что $h_j < 10^{-2} \ \forall t_j \in [a_2, b_2]$ и т. д. В результате получаем последовательность вложенных сегментов $[a_1, b_2] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots$. В сегменте $[a_k, b_k]$ лежит выбранная точка $t_{n_k} \in S$ (очевидно, $t_{n_k} \neq t_{n_s}$ при $k \neq s$, так как $h_{n_k} \neq h_{n_s}$ при $k \neq s$). Поскольку при $t_l \in [a_k, b_k]$ имеем $h_l < 10^{-k}$, то при $k \to +\infty$ $b_k - a_k \to 0$. По лемме о стягивающихся отрезках $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k] = \{t^*\}$. Далее, $t^* \notin T$ (если бы $t^* = t_r$ при некотором $r \in N$, то, очевидно, величина h_r равнялась бы нулю, что в силу предположения, сделанного вначале, невозможно). С другой стороны, $\lim\limits_{k\to+\infty} t_{n_k} = t^*$. Поэтому $t^* \in \mathrm{Cl}\, S \setminus T$. Рассмотрим разность

$$|t_{n_{k+p}} - t_{n_k}| \leqslant |t_{n_{k+p}} - t_{n_{k+p-1}}| + |t_{n_{k+p-1}} - t_{n_{k+p-2}}| + \ldots$$
$$\ldots + |t_{n_{k+1}} - t_{n_k}| \leqslant h^2_{n_{k+p-1}} + h^2_{n_{k+p-2}} + \ldots + h^2_{n_k} \leqslant (h^2_{n_k})^{p-1} + \ldots$$
$$\ldots + (h^2_{n_k})^2 + h^2_{n_k}.$$

Устремив p к $+\infty$, получим

$$|t^* - t_{n_k}| \leqslant 1,1\, h^2_{n_k}. \tag{9}$$

Рассмотрим правую часть (6) при $\varepsilon = \varepsilon_k = 2h_{n_k}^2$ и $t = t^*$,

$$(1/\varepsilon_k) \sum_{t_j : |t^* - t_j| \leqslant \varepsilon_k} h_j \geqslant (1/(2h_{n_k}^2)) \sum_{t_j \, |t^* - t_j| < 2h_{n_k}^2} h_j \geqslant (1/(2h_{n_k}^2))\, h_{n_k} = 1/(2h_{n_k}).$$

Таким образом, существует последовательность положительных чисел ε_k, стремящаяся к 0 и такая, что

$$\lim_{k \to +\infty} \Big[(1/\varepsilon_k) \sum_{t_j \cdot |t^* - t_j| < \varepsilon_k} h_j\Big] = +\infty,$$

поэтому условие (6) не выполнено для пары (h, T). Итак, множество T разрежено.

Б. Для любого порядкового числа α можно определить производное множество $\partial^\alpha T$ подпространства $T \subset R$ порядка α (см. [3], § 24, IV). Известно (см. там же), что разреженное пространство T представимо в виде счетного объединения дизъюнктных множеств $D^{(\alpha)} \overset{\text{def}}{=} \partial^\alpha T \setminus \partial^{\alpha+1} T$, состоящих из изолированных точек:

$$T = \bigcup_\alpha D^{(\alpha)}. \tag{10}$$

Теперь рассмотрим T как подмножество метрического пространства R Семейство множеств $\mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)}$ убывает:

$$\mathrm{Cl}\, D^{(0)} = \mathrm{Cl}\,(T \setminus \partial T) \supset \mathrm{Cl}\, D^{(1)} \supset \ldots \supset \mathrm{Cl}\, D^{(\beta)} \supset \ldots .$$

Это легко установить, учитывая тот факт, что семейство производных множеств T убывает [3]: $\partial^{(0)} T = T \supset \partial T \supset \ldots \supset \partial^\beta T \supset \ldots$, и соотношение

$$\mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)} = \mathrm{Cl}\, \partial^\alpha T, \tag{11}$$

доказательство которого приводим. Поскольку $D^{(\alpha)} = \partial^\alpha T \setminus \partial^{\alpha+1} T \subset \partial^\alpha T$, то

$$\mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)} \subseteq \mathrm{Cl}\, \partial^\alpha T. \tag{12}$$

Далее, t — изолированная точка множества $\partial^\alpha T$ только в том случае, когда $t \in \partial^\alpha T \setminus \partial^{\alpha+1} T$. Если же t — предельная точка множества $\partial^\alpha T$, то можно указать сходящуюся к ней последовательность $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ изолированных точек $\partial^\alpha T$ (действительно, пересечение любой окрестности $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ точки t с множеством T дает разреженное множество, а потому содержит бесконечно много изолированных точек). Таким образом, $t \in \mathrm{Cl}\,(\partial^\alpha T \setminus \partial^{\alpha+1} T)$.

В силу изложенного выше получаем $\partial^\alpha T \subset \mathrm{Cl}\,(\partial^\alpha T \setminus \partial^{\alpha+1} T) = \mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)}$ и, следовательно,

$$\mathrm{Cl}\, \partial^\alpha T \subseteq \mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)}. \tag{13}$$

Объединяя (12) с (13), завершаем доказательство соотношения (11). (Если $\partial^{(\alpha)} T = \varnothing$, то, очевидно, и $D^{(\alpha)} = \varnothing$; если же $D^{(\alpha)} = \varnothing$, то $\partial^\alpha T = \partial^{(\alpha+1)} T$, а это, при условии разреженности T, возможно лишь в том случае, когда $\partial^\alpha T = \partial^{(\alpha+1)} T = \varnothing$).

Пронумеруем элементы $D^{(\alpha)}$ счетного множества $\{D^{(\alpha)}, \alpha \leqslant \gamma < \Omega\}$. Для этого введем вторую индексацию $D_j^{(\alpha)}$, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть $\mu(D_j^{(\alpha)}) = 2^{-j}$. Если $t_s \in T$, то, обращаясь к разложению (10), можно указать то единственное множество $D_p^{(\alpha)}$, которому принадлежит эта точка. Теперь, используя лемму, определим и положительное число h_s — «скачок» в точке t_s. При этом ряд $\sum_k h_k$ сходится, так как (с учетом (7))

$$\sum_{a\leqslant t_j\leqslant b} h_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{t_k:t_k\in D_j^{(\alpha)}} h_k \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \mu(D_j^{(\alpha)})(b-a) = 2(b-a).$$

Докажем справедливость (6). Если $t \notin \mathrm{Cl}\, T \setminus T$, то $\sum_{t_n:|t-t_n|<\varepsilon} h_n = 0$ при $\varepsilon < \varepsilon_0 = \bar\rho(t, \mathrm{Cl}\, T)$. Пусть $t \in \mathrm{Cl}\, T \setminus T \subset \mathrm{Cl}\, \partial^{(0)} T$. Рассмотрим совокупность $K = \{\mathrm{Cl}\, D^{(\beta)} : \beta \leqslant \gamma < \Omega\}$ всех множеств $\mathrm{Cl}\, D^{(\beta)}$, не содержащих точку t. K — вполне упорядоченное множество ($\mathrm{Cl}\, D^{(\beta)} < \mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)}$, если $\mathrm{Cl}\, D^{(\beta)} \subset \mathrm{Cl}\, D^{(\alpha)}$, т. е. если $\beta < \alpha$), и поэтому содержит минимальный элемент $\mathrm{Cl}\, D^{(\delta)}$. Очевидно, $t \in \mathrm{Cl}\, D^{(\beta)}$, если $\beta < \delta$, и $t \notin \mathrm{Cl}\, D^{(\beta)}$, если $\beta \geqslant \delta$. Итак,

$$\sum_{t_i:|t_i-t|<\varepsilon} h_i = \sum_{\substack{t_i:|t_i-t|<\varepsilon \\ t_i\in \bigcup_{\beta<\delta} D^{(\beta)}}} h_i + \sum_{\substack{t_i:|t_i-t|<\varepsilon \\ t_i\in \bigcup_{\beta\geqslant\delta} D^{(\beta)}}} h_i = \sum_{\substack{t_i:|t_i-t|<\varepsilon \\ t_i\in \bigcup_{\beta<\delta} D^{(\beta)}}} h_i$$

при $\varepsilon < \varepsilon_0 = \bar\rho(t, \mathrm{Cl}\, D^{(\delta)}) \neq 0$. Далее, с учетом (8) имеем

$$\sum_{\substack{t_i:|t_i-t|<\varepsilon \\ t_i\in \bigcup_{\beta<\delta} D^{(\beta)}}} h_i = \sum_{\beta<\delta} \sum_{\substack{t_i:|t_i-t|<\varepsilon \\ t_i\in D_{j(\beta)}^{(\beta)}}} h_i \leqslant \sum_{j(\beta):\beta<\delta} 2^{-j(\beta)}\varepsilon^2 (b-a) \leqslant 2\varepsilon^2 (b-a) = o(\varepsilon).$$

Таким образом, вторая часть теоремы доказана.

Пример [4, с. 246]. Пусть r_n — последовательность всех рациональных чисел отрезка [0, 1]. Рассмотрим систему уравнений

$$dx/dt = 0. \tag{14}$$

$$\Delta x|_{r_n} = 2^{-n}, \quad n \geqslant 1. \tag{15}$$

Функция $x(t) = \sum_{n:r_n<t} (1/2^n)$ $(x(0) = 0)$ удовлетворяет (15) во всех точках r_n; в остальных (иррациональных) точках непрерывна и как функция скачков почти всюду удовлетворяет (14) [5, с. 24]. Однако классического решения (исследованием которого мы занимались) задачи Коши $x(0) = 0$ у импульсной системы (14), (15) не существует в силу доказанной нами теоремы, поскольку множество $Q \cap [0, 1] = \{r_n;\ n \geqslant 1\}$ не разрежено. Более того, анализируя доказательство части A теоремы, можно увидеть, что множество точек непрерывности функции $x(t)$, в которой конечная производная $x(t)$ не существует, всюду плотно в [0; 1].

Следствие 1. *В предположениях* (5), (6) *множество моментов импульсного воздействия системы* (1), (2) *нигде не плотно в* $[a, b]$.

Действительно, разреженное на $[a, b]$ множество нигде не плотно в $[a, b]$ [3, с. 84].

Пример. Рассмотрим линейную импульсную систему

$$dx/dt = ax, \quad a \in R, \quad t \neq q \in T, \quad t \in [0, 1], \tag{16}$$

$$\Delta x|_q = \beta(q)\, x \qquad \forall q \in T, \tag{17}$$

где множество T состоит из всех чисел $q \in [0, 1]$, представимых в виде конечной десятичной дроби $0, q_1q_2 \ldots q_m$ такой, что $q_i \notin \{0; 9\}$ $\forall i$, а $\beta(q) = \beta(0, q_1 \ldots q_m) = 10^{-(m+1)^2}$. Множество T дискретно, так как $10^{-(m+2)}$ — окрестность точки $0, q_1q_2 \ldots q_m \in T$ — содержит лишь точки вида $0, q_1 \ldots (q_m - 1)\, 9p_{m+1} \notin T$. Множество T' предельных точек T в R состоит из бесконечных десятичных дробей $t = 0, t_1 \ldots t_n \ldots$ таких, что $t_i \notin \{0; 9\}$ $\forall i$ и, как легко убедиться, подобно канторову множеству (в частности, несчетно).

Заметим, что

$$\sum_{q\in[0,1]} \beta(q) = \sum_{i=1}^{8} \beta(0, i) + \sum_{i,j=1}^{8} \beta(0, ij) + \ldots = 8\cdot 10^{-4} + 64\cdot 10^{-9} + \ldots \in R \tag{18}$$

и если $t = 0,\ t_1 t_2 \ldots \in T'/T,\ \varepsilon : 10^{-(l+1)} \leqslant \varepsilon < 10^{-l}$, то

$$\sum_{q \in T : |q-t| \leqslant \varepsilon} \beta(q) = \beta(0, t_1 \ldots t_l) + \sum_{j=1,8} \beta(0, t_1 \ldots t_l j) + \ldots$$

$$\ldots = 10^{-(l+1)^2} + 8 \cdot 10^{-(l+2)^2} + \ldots \leqslant 2 \cdot 10^{-(l+1)^2} \leqslant 2\varepsilon^2. \qquad (19)$$

Функция

$$x(t) = \exp(at)\, x_0 \prod_{0 \leqslant q < t} (1 + \beta(q)), \quad (x(0) \overset{\text{def}}{=} 0), \qquad (20)$$

(вследствии (18) определенная корректно) будет решением задачи Коши $x(0) = x_0$ для системы (16), (17). Действительно, функция $\delta(t) = \ln \prod_{0<q<t} (1 + \beta(q)) = \sum_{0<q<t} \ln(1+\beta)$ согласно (19) дифференцируема в точке $s \in T$ и $\sigma'(s) = 0$. Поэтому $d/dt \left(\prod_{0<q<t} (1+\beta(q)) \right) = d/dt \exp(\sigma(t))|_{t=s} = 0$ и $dx/dt = ax(t) + \exp(at)\, x_0 \cdot d/dt \left(\prod_{0<q<t} (1 + \beta(q)) \right) = ax(t)$. Наконец, если $p \in T$, то

$$x(p+0) = \exp(at)\, x_0 \prod_{0<q\leqslant p} (1 + \beta(q)) = \left(\exp(at)\, x_0 \prod_{0<q<p} (1 + \beta(q)) \right) (1+\beta(p)) = x(p)(1 + \beta(p)).$$

Таким образом, $x(t)$ удовлетворяет уравнениям (16), (17). (Заметим, что формула (20) вполне пригодна для вычисления значений $x(t)$ с любой точностью, например, $x(0{,}5) = \exp(a/2)\, x_0 \cdot 1{,}000400032 \ldots$)

Из доказательства первой части теоремы вытекает следующее предложение.

Следствие 2. *Если функция скачков* [4, с. 246] $s(x) : [a, b] \to R$ *имеет во всех своих точках непрерывности (за исключением, может быть, конечного их числа) конечную производную, то множество точек ее разрывов разрежено на* $[a, b]$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
2. *Трофимчук Е. П., Трофимчук С. И.* Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: существование, единственность решения и корректность задачи Коши // Укр. мат. журн.— 1990.— **40**, № 2.— С. 230—237.
3. *Куратовский К.* Топология: В 2-х т.— М. : Мир, 1966.— Т. 1.— 594 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ: Справ. пос.— Киев : Вища шк., 1985.— 527 с.
5. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 587 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.04.88