УДК 517.929.4

Д. Я. ХУСАИНОВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Оценки устойчивости решений систем дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа

Рассматривается система линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа. Исследование устойчивости проводится методом функций Ляпунова квадратичного вида. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости и оценки экспоненциального затухания решений для произвольного и малого отклонения аргумента.

Розглядається система лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. Дослідження стійкості провадиться методом функцій Ляпунова квадратичного вигляду. Одержані достатні умови асимптотичної стійкості і оцінки експоненціального згасання розв'язків для довільного та малого відхилення аргументу.

Рассмотрим систему дифференциально-функциональных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}(E-D)\,x(t)=Lx(t),\tag{1}$$

где $(E-D)\,x(t)=x(t)-\int\limits_{-\tau}^{0}d\mu(s)\,x(s+t)$, $Lx(t)=\int\limits_{-\tau}^{0}d\eta(s)\,x(s+t)$, $\mu(s)$ и $\eta(s)$, $-\tau\leqslant s\leqslant 0$, — матричные функции, для которых $\int\limits_{-\tau}^{0}|d\mu(s)|$, $\int\limits_{-\tau}^{0}|d\eta(s)|$ — ограниченные величины [1, 2]. Предположим, что функционал D является «сильно устойчивым», т. е. существует τ_1: $0<\tau_1<\tau$, при котором $\|D_0\|_\tau+\|D_0\|_{\tau_1}<1$, где $\|D_0\|_\tau=\int\limits_{-\tau}^{0}|d\mu(s)|$, $\|D_0\|_{\tau_1}=\int\limits_{-\tau_1}^{0}|d\mu(s)|$.

Исследование устойчивости и получение оценок решений системы (1) будем проводить методом функций Ляпунова. Известно, что если система без отклонения аргумента

$$\frac{d}{dt}x(t)=\overline{L}_0x(t),\tag{2}$$

где

$$\overline{L}_0x(t)=\Big[E-\int\limits_{-\tau}^{0}d\mu(s)\Big]^{-1}\Big[\int\limits_{-\tau}^{0}d\eta(s)\Big]x(t),\tag{3}$$

асимптотически устойчива, то при определенных условиях, налагаемых на параметры системы и запаздывание τ, асимптотически устойчивой будет и система (1) [3, 4]. В настоящей работе получены условия асимптотической устойчивости системы (1), соответствующие произвольному $\tau>0$ и достаточно малому $\tau<\tau_0$, где τ_0 — некоторая функция параметров системы и коэффициентов функции Ляпунова.

Система (2) представляет собой линейную систему с постоянными коэффициентами. Если существует квадратичная функция $v(x)=x^THx$, симметричная положительно определенная матрица H которой определяется из матричного уравнения

$$\overline{L}_0^T H + H\overline{L}_0 = -C,$$

где C — отрицательно определенная матрица, то система (2) асимптотически устойчива [5]. Для функции $v(x)$ справедливы неравенства

$$\lambda_{\min}(H)\,|x|^2 \leqslant v(x) \leqslant \lambda_{\max}(H)\,|x|^2, \tag{4}$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$ и $\lambda_{\max}(\cdot)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы. Под векторной нормой будем понимать

$$|x(t)| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\{|x(s+t)|\},$$

$$|x(t_1)|_1 = \max\{|x(t)|,\ |\dot{x}(t)|\},$$

под матричной — $|D| = \{\lambda_{\max}(DD^T)\}^{1/2}$. Поверхность уровня функции Ляпунова обозначим ∂v^α, а область, ограниченную этой поверхностью, — v^α, т. е.

$$\partial v^\alpha = \{x : x^T H x = \alpha\}, \quad v^\alpha = \{x : x^T H x < \alpha\}.$$

Лемма 1. *Пусть для решения $x(t)$ системы* (1) $\|x(t_0)\|_\tau < \delta_1$. *Тогда при $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ справедливо неравенство*

$$|x(t)| < A^k(\tau)\,\delta_1 e^{r\tau}, \tag{5}$$

где $A(\tau) = \dfrac{1 + 2\|D_0\|_\tau + \tau_1\|L\|_\tau}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}}$, $r = \dfrac{\|L\|_\tau}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}}$, $k = [\tau/\tau_1] + 1$ — *функция целой части числа*

$$\|L\|_\tau = \sup_{\|x(t)\|_\tau \neq 0}\left\{\frac{\left|\int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(s)\,x(s+t)\right|}{\|x(t)\|_\tau}\right\}.$$

Доказательство. Перепишем систему (1) в виде

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{-\tau}^{-\tau_1} d\mu(s)\,[x(s+t) - x(s+t_0)] + \int\limits_{-\tau_1}^{0} d\mu(s)\,[x(s+t) - x(s+t_0)] +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t}\Big[\int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(s)\,x(s+\xi)\Big]\,d\xi.$$

Отсюда получаем

$$|x(t)| < (1 + 2\|D_0\|_{\tau-\tau_1} + \|D_0\|_{\tau_1})\,\delta_1 + \|D_0\|_{\tau_1}\|x(t)\|_{\tau_1} + \int\limits_{0}^{t}\|L\|_\tau\,\|x(\xi)\|_\tau\,d\xi,$$

где $\|D_0\|_{\tau-\tau_1} = \int\limits_{-\tau}^{-\tau_1}|d\mu(s)|$. Далее

$$\|x(t)\|_{\tau_1} < (1 + 2\|D_0\|_{\tau-\tau_1} + \|D_0\|_{\tau_1})\,\delta_1 + \|D_0\|_{\tau_1}(\|x(t)\|_{\tau_1} + \delta_1) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t}\|L\|_\tau(\|x(\xi)\|_{\tau_1} + \delta_1)\,d\xi$$

и

$$(1 - \|D_0\|_{\tau_1})\,\|x(t)\|_{\tau_1} < (1 + 2\|D_0\|_\tau + \tau_1\|L\|_\tau)\,\delta_1 + \int\limits_{t_0}^{t}\|L\|_\tau\,\|x(\xi)\|_{\tau_1}\,d\xi.$$

Используя неравенство Р. Беллмана, на промежутке $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau_1$ получаем $\|x(t)\|_{\tau_1} < A(\tau)\,\delta_1 e^{r\tau_1}$. Рассмотрим следующий промежуток $t_0 + \tau_1 < t \leqslant t_0 + 2\tau_1$. Повторяя приведенные выше преобразования, запишем

$\| x(t) \|_{\tau_1} < A^2(\tau)\,\delta_1 e^{2r\tau_1}$. Для всего промежутка $t_0 < t \leqslant t_0 + \tau$ справедливо неравенство (5).

Лемма 2. *Пусть для решения $x(t)$ системы (1) для произвольного $\alpha > 0$ существует $t > t_0$ такое, что при $t_0 - \tau \leqslant s < t$ выполняется $x(s) \in v^\alpha$, $x(t) \in \partial v^\alpha$. Тогда для произвольного $\theta: t_0 \leqslant \theta \leqslant t$ будет*

$$| \dot{x}(\theta) | < d \, \| \dot{x}(t_0) \|_\tau + l(0)\,\varphi(H)\,| x(t) |, \tag{6}$$

где

$$l(0) = \frac{\| L_0 \|_\tau}{1 - \| D_0 \|_\tau - \| D_0 \|_{\tau_1}}, \quad \| L_0 \|_\tau = \int_{-\tau}^{0} | d\eta(s) |,$$

$$\varphi(H) = \sqrt{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)}, \quad d = \frac{\| D_0 \|_\tau}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}}.$$

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^{-\tau_1} d\mu(s)\,\dot{x}(s+t) + \int_{-\tau_1}^{0} d\mu(s)\,\dot{x}(s+t) + \int_{-\tau}^{0} d\eta(s)\,x(s+t).$$

Будет выполняться следующее неравенство:

$$\| \dot{x}(t) \|_{\tau_1} \leqslant \| D_0 \|_{\tau-\tau_1} \| \dot{x}(t-\tau_1) \|_{\tau-\tau_1} + \| D_0 \|_{\tau_1} \| \dot{x}(t) \|_{2\tau_1} + \| L_0 \|_\tau \varphi(H)\,| x(t) |.$$

Так как

$$\| \dot{x}(t) \|_{2\tau_1} \leqslant \| \dot{x}(t) \|_{\tau_1} + \| \dot{x}(t-\tau_1) \|_{\tau_1},$$

то

$$(1 - \| D_0 \|_{\tau_1}) \| \dot{x}(t) \|_{\tau_1} \leqslant \| D_0 \|_\tau \| \dot{x}(t-\tau_1) \|_\tau + \| L_0 \|_\tau \varphi(H)\,| x(t) |.$$

Получаем итерационную зависимость

$$\| \dot{x}(t) \|_{\tau_1} \leqslant d \, \| \dot{x}(t-\tau_1) \|_\tau + \frac{\| L_0 \|_\tau \varphi(H)}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} | x(t) |.$$

Пусть $t_0 + (n-1)\tau_1 \leqslant t < t_0 + n\tau_1$. Тогда

$$\| \dot{x}(t) \|_{\delta_1} \leqslant d^n \| \dot{x}(t_0) \|_\tau + (1 + d + \ldots + d^{n-1}) \frac{\| L_0 \|_\tau \varphi(H)}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} | x(t) |.$$

Используя условие $\| D_0 \|_\tau + \| D_0 \|_{\tau_1} < 1$, получаем (6).

Из доказанных лемм вытекают условия асимптотической устойчивости для произвольного отклонения аргумента. Обозначим

$$\| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau = \int_{-\tau}^{0} \left| H \left(E - \int_{-\tau}^{0} d\mu(s_1) \right)^{-1} d\mu(s_2) \right|,$$

$$\| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau = \int_{-\tau}^{0} \left| H \left(E - \int_{-\tau}^{0} d\mu(s_1) \right)^{-1} d\eta(s_2) \right|, \tag{7}$$

$$\Delta = [\lambda_{\min}(C) - 2 \| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau (1 + \varphi(H))] / 4 \| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau.$$

Теорема 1. *Пусть система (2) асимптотически устойчива и матричное уравнение (3) имеет решение H, при котором выполняется неравенство*

$$\Delta - l(0)\,\varphi(H) > 0. \tag{8}$$

Тогда система (1) асимптотически устойчива при произвольном $\tau > 0$. Причем $| x(t) |_1 < \varepsilon$, $t > t_0$, если $\| x(t_0) \|_\tau < \delta_1(\varepsilon)$, $\| \dot{x}(t_0) \|_\tau < \delta_2(\varepsilon)$, где

$$\delta_1(\varepsilon) = R\varepsilon/\varphi(H), \tag{9}$$

$$\delta_2(\varepsilon) = [\Delta - l(0)\varphi(H)] R\varepsilon / d\varphi(H), \tag{10}$$

$$R = \min\{1, [\Delta/\varphi(H) + l(0)(\varphi(H) - 1)]^{-1}\}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — произвольное решение системы (1), удовлетворяющее $\| x(t_0) \|_\tau < \delta_1$. Тогда для $t \in [t_0 - \tau, t_0]$: $x(t) \in v^\alpha$, а множество v^α содержится в $R\varepsilon$-окрестности положения равновесия, если $\alpha = (R\varepsilon)^2 \lambda_{\min}(H)$ и $\delta_1(\varepsilon)$ выбрано согласно (9). Покажем, что $x(t) \in v^\alpha$ и при $t > t_0$. Для этого рассмотрим полную производную функции $v(x) = x^T H x$ в силу системы

$$\dot{x}(t) = (E - D_0)^{-1} \left\{ L_0 x(t) + \frac{d}{dt}[Dx(t) - D_0 x(t)] + [Lx(t) - L_0 x(t)] \right\}, \tag{1'}$$

полученной из (1). Используя уравнение (3), находим

$$\dot{v}(x(t)) = -x^T(t) C x(t) + 2x^T(t) H (E - D)^{-1} \frac{d}{dt}[Dx(t) - D_0 x(t)] +$$

$$+ 2x^T(t) H (E - D_0)^{-1} [Lx(t) - L_0 x(t)].$$

Пусть существует $T > t_0$, при котором $x(T) \in \partial v^\alpha$. Тогда

$$\dot{v}(x(T)) \leqslant -\lambda_{\min}(C) | x(T) |^2 + 2 | x(T) | \int_{-\tau}^{0} | H (E - D_0)^{-1} d\mu(s) | \times$$

$$\times [| \dot{x}(T) | + | \dot{x}(s + T) |] + 2 | x(T) | \int_{-\tau}^{0} | H (E - D_0)^{-1} d\eta(s) | [| x(T) | +$$

$$+ | x(s + T) |].$$

По предположению $x(s) \in v^\alpha$, $x(T) \in \partial v^\alpha$, $t_0 - \tau \leqslant s < T$. Поэтому, используя (6), получаем

$$\dot{v}(x(T)) < -\{\lambda_{\min}(C) - 2 \| H (E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau (1 + \varphi(H))\} | x(T) |^2 +$$

$$+ 4 \| H (E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau [d \| \dot{x}(t_0) \|_\tau + l(0) \varphi(H) | x(T) |] | x(T) |.$$

Если выполняется (8), то при $\| \dot{x}(t_0) \|_\tau < \delta_2(\varepsilon)$, где $\delta_2(\varepsilon)$ определено в (10), полная производная функции $v(x(t))$ при $t = T$ будет отрицательно определенной, т. е. $x(t) \in v^\alpha$, $t > t_0$. В этом случае из (6) следует

$$| \dot{x}(t) | < [\Delta - l(0)\varphi(H)] R\varepsilon / \varphi(H) + l(0)\varphi(H) R\varepsilon.$$

Чтобы выполнялось неравенство $| \dot{x}(t) | < \varepsilon$, достаточно R выбрать согласно соотношению (11). Теорема доказана.

Покажем, что существуют постоянные, при которых справедлива экспоненциальная сходимость решений. Будем использовать функцию Ляпунова $v(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$, где H является решением уравнения (3), $\gamma > 0$ определим в дальнейшем. Будем рассматривать расширенное фазовое пространство $R^n \times R$ переменных (x, t) и через ∂v_t^α обозначим поверхность уровня функции Ляпунова, а через v_t^α — область, содержащуюся внутри нее, т. е.

$$\partial v_t^\alpha = \{(x, t) : e^{\gamma t} x^T H x = \alpha\}, \quad v_t^\alpha = \{(x, t) : e^{\gamma t} x^T H x < \alpha\}.$$

Лемма 3. *Пусть для функции $v(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$ вдоль любой непрерывно дифференцируемой кривой $x(t)$ при $t > t_0$ выполняется*

$$\dot{v}(x(t), t) < -\beta e^{\gamma t} | x(t) |^2 + \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e^{\theta_i t} | x(t) |, \quad \beta, \zeta_i > 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|x(t)| < \left[|x(t_0)| - \sum_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i \varphi(H) e^{(\theta_i - \gamma)t_0}}{\beta + (2\theta_i - \gamma)\lambda_{\max}(H)}\right] \varphi(H) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\lambda_{\max}(H)} + \gamma\right](t - t_0)\right\} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i \varphi(H) e^{(\theta_i - \gamma)t}}{\beta + (2\theta_i - \gamma)\lambda_{\max}(H)}. \qquad (12)$$

Доказательство. Используя неравенство (4), перепишем условия леммы в виде

$$\dot{v}(x(t), t) < -\frac{\beta}{\lambda_{\max}(H)} v(x(t), t) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i e^{(\theta_i - \gamma/2)t}}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \sqrt{v(x(t), t}.$$

Решая полученное дифференциальное неравенство с учетом начальных условий, имеем

$$\sqrt{v(x(t), t)} < \exp\left\{-\frac{\beta(t - t_0)}{2\lambda_{\max}(H)}\right\} \sqrt{v(x(t_0), t_0)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i \lambda_{\max}(H)\left[\exp\{(\theta_i - \gamma/2)(t - t_0)\} - \exp\{-\beta(t - t_0)/2\lambda_{\max}(H)\}\right]}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\left[\beta + (2\theta_i - \gamma)\lambda_{\max}(H)\right]}.$$

Преобразуем полученное выражение к виду

$$\sqrt{v(x(t), t)} < \left[\sqrt{v(x(t_0), t_0)} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i \sqrt{\lambda_{\max}(H)}\, \varphi(H) e^{(\theta_i - \gamma/2)t_0}}{\beta + (2\theta_i - \gamma)\lambda_{\max}(H)}\right] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\beta(t - t_0)}{2\lambda_{\max}(H)}\right\} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\zeta_i \sqrt{\lambda_{\max}(H)}\, \varphi(H) e^{(\theta_i - \gamma/2)t}}{\beta + (2\theta_i - \gamma)\lambda_{\max}(H)}.$$

Вновь используя неравенство (4), получаем (12).

Лемма 4. *Пусть существуют* $\tau_1: 0 < \tau_1 < \tau$ *и* $\gamma > 0$, *при которых* $\|D_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2} + \|D_0\|_{\tau_1} < 1$, *и для произвольного* $\alpha > 0$ *существует* t: $t_0 + (n-1)\tau_1 \leqslant t < t_0 + n\tau_1$ *такое, что при* $t_0 - \tau \leqslant s < t$ *будет* $(x(s), s) \in v_t^\alpha$, $(x(t), t) \in \partial v_t^\alpha$. *Тогда справедливо*

$$|x(t)| < d^n \|\dot{x}(t_0)\|_\tau + l(\gamma)\varphi(H) e^{\gamma\tau/2} |x(t)|, \qquad (13)$$

где

$$l(\gamma) = \frac{\|L_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \|D_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2} - \|D_0\|_{\tau_1}}.$$

Доказательство. Как следует из доказательства леммы 2,

$$\|\dot{x}(t)\|_{\tau_1} \leqslant d\|\dot{x}(t - \tau_1)\|_\tau + \frac{\|L_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}\varphi(H)}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}} e^{\gamma\tau/2} |x(t)|.$$

Пусть $\|\dot{x}(t - \tau_1)\|_\tau = |\dot{x}(\xi)|$, $t - \tau_1 - \tau \leqslant \xi \leqslant t - \tau_1$. Выполняя следующий шаг, получаем

$$\|\dot{x}(t)\|_{\tau_1} \leqslant d\left[d\|\dot{x}(\xi - \tau_1)\|_\tau + \frac{\|L_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}\varphi(H)}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}} e^{\gamma\tau/2} |x(\xi)|\right] +$$

$$+ \frac{\|L_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}\varphi(H)}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}} e^{\gamma\tau/2} |x(t)| \leqslant d^2 \|\dot{x}(t - 2\tau_1)\|_{2\tau} +$$

$$+ \left(1 + \frac{\|D_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}}\right) \frac{\|L_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}\varphi(H)}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}} e^{\gamma\tau/2} |x(t)|.$$

Повторяя процедуру n раз и учитывая, что $\| D_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2} + \| D_0 \|_\tau < 1$, получаем (13).

Введем следующие обозначения:

$$\overline{R} = 1 + \frac{8 \| H (E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau \varphi (H) \| \dot{x} (t_0) \|_\tau}{[\beta (\gamma) + (2\theta - \gamma) \lambda_{\max} (H)] \| x (t_0) \|_\tau},$$

$$\beta (\gamma) = \lambda_{\min} (C) - \gamma\lambda_{\max} (H) - 2 \| H (E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau (1 + \varphi (H) e^{\gamma\tau/2}) -$$

$$- 4 \| H (E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l (\gamma) \varphi (H) e^{\gamma\tau/2}, \qquad (14)$$

$$\beta (0) = \beta(\gamma) |_{\gamma=0}, \quad \theta = \gamma + \tau_1^{-1} \ln d,$$

$$K_1 = \lambda_{\min} (C) - 2 \| H (E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau, \quad K_2 = 2\varphi (H) \| H (E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau,$$

$$K_3 = 2\varphi (H) [d \| H (E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau + 2 \| L_0 \|_\tau (1 - \| D_0 \|_\tau)^{-1}],$$

$$\gamma_1 = \min \left\{ \frac{2}{\tau_1} \ln [(K_1 d + K_2 \pm \sqrt{(K_1 d + K_2)^2 - 4K_1 K_3})/2K_3] \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть система* (2) *асимптотически устойчива и матричное уравнение* (3) *имеет решение* H, *при котором выполняется* (8). *Тогда для решений* $x (t)$ *системы* (1) *при* $t > t_0$ *справедливы неравенства*

$$| x (t) | < \overline{R} \varphi (H) \| x (t_0) \|_\tau \exp \{- \gamma (t - t_0)/2\}, \qquad (15)$$

$$| \dot{x} (t) | < \| \dot{x} (t_0) \|_\tau \exp \{- (t - t_0) \ln d/\tau_1\} + \overline{R} l (\gamma) \varphi^2 (H) e^{\gamma\tau/2} \| x (t_0) \|_\tau \times$$

$$\times \exp \{- \gamma (t - t_0)/2\},$$

где $\gamma \leqslant \gamma_1 \beta (0) [\gamma_1 \lambda_{\max} (H) + \beta (0)]^{-1}$.

Доказательство. Пусть $x (t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию $\| x (t_0) \|_\tau < \delta_1$. Тогда при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ будет $(x (t), t) \in \in v_t^\alpha$, где

$$\alpha = [\overline{R} \delta_1 \exp \{\gamma t_0/2\}]^2 \lambda_{\max} (H),$$

$\overline{R} \geqslant 1$, $\gamma > 0$ — произвольные постоянные. Используя (4), получаем, что при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ справедливо неравенство

$$| \overline{x} (t) | < \overline{R} \varphi (H) \delta_1 \exp \{- \gamma (t - t_0)/2\}. \qquad (16)$$

Покажем, что существует $\gamma > 0$, при котором неравенство сохранится и при $t > t_0$. Пусть это не так и существует $T > t_0$, при котором $(x (T), T) \in \in \partial v_t^\alpha$. Рассмотрим полную производную $v (x, t)$ вдоль решений $x (t)$ системы (1′)

$$\dot{v} (x (t), t) \leqslant - e^{\gamma t} \{\lambda_{\min} (C) | x (t) |^2 - \gamma\lambda_{\max} (H) | x (t) |^2 - 2 | x (t) | \times$$

$$\times \int_{-\tau}^{0} | H (E - D_0)^{-1} d\mu (s) | [| \dot{x} (t) | + | \dot{x} (s + t) |] - 2 | x (t) | \int_{-\tau}^{0} | H (E - D_0)^{-1} \times$$

$$\times d\eta (s) | [| x (t) | + | x (s + t) |].$$

При $t = T$ справедлива лемма 4. Поэтому получаем

$$\dot{v} (x (T), T) < - e^{\gamma T} \{\lambda_{\min} (C) - \gamma\lambda_{\max} (H) - 2 \| H (E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau \times$$

$$\times (1 + \varphi (H) e^{\gamma\tau/2}) - 4 \| H | E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l (\gamma) \varphi (H) e^{\gamma\tau/2}\} | x (T) |^2 +$$

$$+ 4 \| H (E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau e^{\gamma T} d^n \| \dot{x} (t_0) \|_\tau | x (T) |.$$

По предположению $n > (T - t_0)/\tau_1$. Поэтому

$$d^n = \exp \left\{ - n \ln \frac{1}{d} \right\} < \exp \left\{ - \frac{T - t_0}{\tau_1} \ln \frac{1}{d} \right\}$$

и

$$\dot{v}(x(T),T) < -e^{\gamma T}\{\lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H) - 2\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau \times$$
$$\times (1+\varphi(H)e^{\gamma\tau/2}) - 4\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau l(\gamma)\varphi(H)e^{\gamma\tau/2}\}|x(T)|^2 +$$
$$+ 4\|H|E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau \exp\left\{\left[\gamma - \frac{1}{\tau_1}\ln\frac{1}{d}\right]T\right\} d^{-t_0/\tau_1}\|\dot{x}(t_0)\|_\tau |x(T)|.$$

Обозначим

$$\zeta = 4\|H|(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau d^{-t_0/\tau_1}\|\dot{x}(t_0)\|_\tau.$$

Используя выражения $\beta(\gamma)$, θ (14), получаем

$$\dot{v}(x(T),T) < -\beta(\gamma)e^{\gamma T}|x(T)|^2 + \zeta e^{\theta T}|x(T)|.$$

Тогда, как следует из леммы 3, будет выполняться неравенство (12).

Найдем постоянные $\overline{R}$, γ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\left[\|x(t_0)\|_\tau - \frac{\zeta\varphi(H)e^{(\theta-\gamma)t_0}}{\beta(\gamma)+(2\theta-\gamma)\lambda_{\max}(H)}\right]\varphi(H) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta(\gamma)}{\lambda_{\max}(H)} + \gamma\right](T-t_0)\right\} + \frac{\zeta\varphi^2(H)e^{(\theta-\gamma)T}}{\beta(\gamma)+(2\theta-\gamma)\lambda_{\max}(H)} <$$
$$< \overline{R}\|x(t_0)\|_\tau\varphi(H)\exp\{-\gamma(t-t_0)/2\}.$$

Тогда допущение $(x(T),T)\in\partial v_t^\alpha$ будет неверным и выполняется (16). Если $\beta(\gamma)>0$, $-\tau_1^{-1}\ln d-\gamma/2>0$, то оно выполняется при любом

$$\overline{R} \geqslant 1 + \frac{8\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau\varphi(H)\|\dot{x}(t_0)\|_\tau}{[\beta(\gamma)+(2\theta-\gamma)\lambda_{\max}(H)]\|x(t_0)\|_\tau}.$$

Рассмотрим оценку $|\dot{x}(t)|$. Из леммы 4 следует справедливость неравенств (13), (15).

Найдем такое $\gamma>0$, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{2}{\tau_1}\ln\frac{1}{d} > \gamma,\ [\lambda_{\min}(C) - 2\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau] - 2\left[\|H(E-D_0)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times L_0\|_\tau e^{\gamma\tau/2} + \frac{2\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau\|L_0\|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}}{1-\|D_0\|_\tau e^{\gamma\tau_1/2} - \|D_0\|_{\tau_1}}\right]\varphi(H) > \gamma\lambda_{\max}(H).$$

Заменим последнее неравенство усиленным

$$[\lambda_{\min}(C) - 2\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau] - 2\left[\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau +\right.$$
$$\left.+\frac{2\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau\|L_0\|_\tau}{1-\|D_0\|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \|D_0\|_{\tau_1}}\right]e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}\varphi(H) > \gamma\lambda_{\max}(H).$$

Левая часть по переменной γ представляет собой вогнутую функцию. Заменив ее отрезком прямой, величину γ найдем, решая уравнение

$$[\lambda_{\min}(C) - 2\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau(1+\varphi(H)) - 4\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau \times$$
$$\times l(0)\varphi(H)](1-\gamma/\gamma_1) = \gamma\lambda_{\max}(H).$$

Теорема доказана.

Условия (8) представляют собой строгие ограничения. Покажем, что если они не выполняются, а система без отклонения аргумента (2) асимптотически устойчива, то свойство асимптотической устойчивости сохраняется и для (1), но при малом отклонении аргумента.

Лемма 6. *Пусть для решения $x(t)$ для произвольного $\alpha > 0$ имеется $t > t_0 + \tau$, при котором для $t_0 - \tau \leqslant \theta < t$ выполняется $x(\theta) \in v^\alpha$, $x(t) \in \partial v^\alpha$. Тогда при $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ будет выполняться неравенство*

$$|x(t) - x(s+t)| < 2d(1+d)\|x(t_0)\|_\tau + l(0)\varphi(H)|x(t)|\tau. \qquad (17)$$

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$x(t) = x(s+t) + \int_{-\tau}^{-\tau_1} d\mu(\xi)[x(\xi+t) - x(\xi+s+t)] + \int_{-\tau_1}^{0} d\mu(\xi) \times$$
$$\times [x(\xi+t) - x(\xi+s+t)] + \int_{s+t}^{t}\left[\int_{-\tau}^{0} d\eta(\zeta)x(\zeta+\xi)\right]d\xi.$$

Получаем

$$\|x(t) - x(s+t)\|_{\tau_1} \leqslant \|D_0\|_{\tau-\tau_1}\|x(t-\tau_1) - x(s+t-\tau_1)\|_\tau + \|D_0\|_{\tau_1} \times$$
$$\times [\|x(t) - x(s+t)\|_{\tau_1} + \|x(t-\tau_1) - x(s+t-\tau_1)\|_{\tau_1}] + \|L_0\|_\tau \times$$
$$\times \varphi(H)|x(t)|\tau.$$

Таким образом, имеем

$$\|x(t) - x(s+t)\|_{\tau_1} \leqslant d\|x(t-\tau_1) - x(s+t-\tau_1)\|_\tau + \frac{\|L_0\|_\tau\varphi(H)|x(t)|}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}}\tau.$$

Пусть $t_0 + n\tau_1 \leqslant t < t_0 + (n+1)\tau_1$. Проделав n итераций, будем иметь

$$\|x(t) - x(s+t)\|_{\tau_1} \leqslant d^n[\|x(t-n\tau_1) - x(t_0)\|_{2\tau} + \|x(t_0) - x(t-(n+1) \times$$
$$\times \tau_1)\|_\tau] + [1 + d + \ldots + d^{n-1}]\frac{\|L_0\|_\tau\varphi(H)|x(t)|}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}}\tau.$$

Отсюда следует (17).

Лемма 7. *Пусть для решения $x(t)$ для произвольного $\alpha > 0$ существует $t > t_0 + \tau$, при котором для $t_0 - \tau \leqslant \theta < t$ выполняется $x(\theta) \in v^\alpha$, $x(t) \in \partial v^\alpha$. Тогда при $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ будет*

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(s+t)| < 2d(1+d)[\|\dot{x}(t_0)\|_\tau + l(0)\|x(t_0)\|_\tau] +$$
$$+ l^2(0)\varphi(H)|x(t)|\tau. \qquad (18)$$

Доказательство. Из системы (1) следует

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(s+t)| \leqslant \int_{-\tau}^{-\tau_1}|d\mu(\xi)||\dot{x}(\xi+t) - \dot{x}(\xi+s+t)| + \int_{-\tau_1}^{0}|d\mu(\xi)||\times$$
$$\times|\dot{x}(\xi+t) - \dot{x}(\xi+s+t)| + \int_{-\tau}^{0}|d\eta(\xi)||x(\xi+t) - x(\xi+s+t)|.$$

Отсюда

$$\|\dot{x}(t) - \dot{x}(s+t)\|_{\tau_1} \leqslant \|D_0\|_{\tau-\tau_1}\|\dot{x}(t-\tau_1) - \dot{x}(s+t-\tau_1)\|_\tau +$$
$$+ \|D_0\|_{\tau_1}[\|\dot{x}(t) - \dot{x}(s+t)\|_{\tau_1} + \|\dot{x}(t-\tau_1) - \dot{x}(s+t-\tau_1)\|_{\tau_1}] +$$
$$+ \|L_0\|_\tau[2d(1+d)\|x(t_0)\|_\tau + l(0)\varphi(H)|x(t)|\tau].$$

Таким образом, получаем

$$\|\dot{x}(t) - \dot{x}(s+t)\|_{\tau_1} \leqslant d\|\dot{x}(t-\tau_1) - \dot{x}(s+t-\tau_1)\|_\tau +$$
$$+ \frac{\|L_0\|_\tau}{1 - \|D_0\|_{\tau_1}}[2d(1+d)\|x(t_0)\|_\tau + l(0)\varphi(H)|x(t)|\tau].$$

Пусть $t_0+n\tau_1 \leqslant t < t_0+(n+1)\tau_1$. Проделав n итераций, будем иметь

$$\|\dot{x}(t)-\dot{x}(s+t)\|_{\tau_1} \leqslant d^n [\|\dot{x}(t-n\tau_1)-\dot{x}(t_0)\|_{2\tau}+\|\dot{x}(t_0)-\\ -\dot{x}(t-(n+1)\tau_1)\|_\tau] + [1+d+\ldots+d^{n-1}] \frac{\|L_0\|_\tau}{1-\|D_0\|_{\tau_1}} \times \\ \times \{2d(1+d)\|x(t_0)\|_\tau + l(0)\varphi(H)|x(t)|\tau\}.$$

Отсюда следует (18).

Используя приведенные леммы, докажем условия асимптотической устойчивости системы (1) при $\tau<\tau_0$.

Теорема 3. *Пусть система* (2) *асимптотически устойчива и*

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{2l(0)\varphi(H)} [\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau l(0)+\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau]^{-1}. \quad (19)$$

Тогда при $\tau<\tau_0$ *будет асимптотически устойчивой и система* (1). *Причем для произвольного решения* $x(t)$ *при* $t>t_0$ *будет* $|x(t)|_1<\varepsilon$, *если* $\|x(t_0)\|_\tau<\delta_1(\varepsilon,\tau)$, $\|\dot{x}(t_0)\|_\tau<\delta_2(\varepsilon,\tau)$, *где*

$$\delta_1(\varepsilon,\tau)=\min\left\{A^{-k}(\tau)e^{-r\tau}, \frac{\lambda_{\min}(C)(1-\tau/\tau_0)(1-\zeta)}{4d(1+d)}[\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau \times \right.\\ \left. \times l(0)+\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau]^{-1}\right\}\frac{R\varepsilon}{\varphi(H)}, \quad (20)$$

$$\delta_2(\varepsilon,\tau)=\frac{\lambda_{\min}(C)(1-\tau/\tau_0)\zeta}{4d(1+d)\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau}\frac{R\varepsilon}{\varphi(H)},$$
$$R=\min\left\{1,\left[\frac{\lambda_{\min}(C)(1-\tau/\tau_0)\zeta}{4d(1+d)\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau}+l(0)\varphi(H)\right]^{-1}\right\}, \quad (21)$$

$0<\zeta<1$ — *произвольная фиксированная величина.*

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 1, выберем $\alpha=(R\varepsilon)^2\lambda_{\min}(H)$ и $\delta_1 \leqslant [A^k(\tau)e^{r\tau}]^{-1}R\varepsilon/\varphi(H)$. Тогда произвольное решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее условию $\|x(t_0)\|_\tau<\delta_1$, при $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0+\tau$ будет находиться в v^α. Покажем, что $x(t)\in v^\alpha$ и при $t>t_0+\tau$. Рассмотрим полную производную функции $v(x)=x^THx$ вдоль решений $x(t)$ при $t=T$:

$$\dot{v}(x(T)) \leqslant -\lambda_{\min}(C)|x(T)|^2+2|x(T)|\int_{-\tau}^{0}|H(E-D_0)^{-1}d\mu(s)||\dot{x}(T)-\\ -\dot{x}(s+T)|+2|x(T)|\int_{-\tau}^{0}|H(E-D_0)^{-1}d\eta(s)||x(T)-x(s+T)|.$$

Учитывая неравенства (17), (18), получаем

$$\dot{v}(x(T))<-\{\lambda_{\min}(C)-2[\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau l(0)+\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau]\times \\ \times l(0)\varphi(H)\tau\}|x(T)|^2+4d(1+d)\{\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau\|\dot{x}(t_0)\|_\tau+ \\ +[\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau l(0)+\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau]\|x(t_0)\|_\tau\}|x(T)|.$$

Используя обозначения (19), отсюда имеем

$$\dot{v}(x(T))<-\lambda_{\min}(C)(1-\tau/\tau_0)|x(T)|^2+4d(1+d)\{\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau\times \\ \times\|\dot{x}(t_0)\|_\tau+[\|H(E-D_0)^{-1}D_0\|_\tau l(0)+\|H(E-D_0)^{-1}L_0\|_\tau]\times \\ \times\|x(t_0)\|_\tau\}|x(T)|.$$

Пусть

$$\delta_1 \leqslant \frac{\lambda_{\min}(C)(1-\tau/\tau_0)(1-\zeta)}{4d(1+d)} [\| H(E-D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l(0) +$$

$$+ \| H(E-D_0)^{-1} L_0 \|_\tau]^{-1} \frac{R\varepsilon}{\varphi(H)},$$

$$\delta_2 \leqslant \frac{\lambda_{\min}(C)(1-\tau/\tau_0)\zeta}{4d(1+d)\| H(E-D_0)^{-1} D_0 \|_\tau} \frac{R\varepsilon}{\varphi(H)},$$

где $0 < \zeta < 1$ — произвольная постоянная. Тогда $\ddot{v}(x(T))$ будет отрицательно определенной и $x(t) \in v^\alpha$ при всех $t > t_0$. Если величину R выбрать согласно условиям теоремы, то из неравенства (6) следует $|\ddot{x}(t)| < \varepsilon$, $t > t_0$.

Покажем, что решения экспоненциально затухают.

Лемма 8. *Пусть существуют $\tau_1: 0 < \tau_1 < \tau$ и $\gamma > 0$ такие, что $\| D_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2} + \| D_0 \|_{\tau_1} < 1$, и для решения $x(t)$ при произвольном $\alpha > 0$ существует $t: t_0 + n\tau_1 \leqslant t < t_0 + (n+1)\tau_1$ такое, что при $t_0 - \tau \leqslant \theta < t$ будет $(x(\theta), \theta) \in v_t^\alpha$, $(x(t), t) \in \partial v_t^\alpha$. Тогда*

$$|x(t) - x(s+t)| < 2d^n (1+d) \| x(t_0) \|_\tau + l(\gamma)\varphi(H) e^{\gamma\tau/2} | x(t) | \tau. \quad (22)$$

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 6, имеем

$$\| x(t) - x(s+t) \|_{\tau_1} \leqslant d \| x(t-\tau_1) - x(s+t-\tau_1) \|_\tau +$$

$$+ \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} \varphi(H) e^{\gamma\tau/2} | x(t) | \tau.$$

Пусть $\| x(t-\tau_1) - x(s+t-\tau_1) \|_\tau = | x(\zeta) - x(s+\zeta) |$, $t - \tau_1 - \tau \leqslant \zeta \leqslant$ $\leqslant t - \tau_1$. Выполняя следующий шаг итерации, получаем

$$\| x(t) - x(s+t) \|_{\tau_1} \leqslant d^2 \| x(t-2\tau_1) - x(s+t-2\tau_1) \|_{2\tau} + (1 + d e^{\gamma\tau_1/2}) \times$$

$$\times \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} \varphi(H) e^{\gamma\tau/2} | x(t) | \tau.$$

Проделав n итераций, будем иметь

$$\| x(t) - x(s+t) \|_{\tau_1} \leqslant d^n [\| x(t-n\tau_1) - x(t_0) \|_{2\tau} + \| x(t_0) - x(t-(n+1)\tau_1) \|_\tau] +$$

$$+ [1 + d e^{\gamma\tau_1/\tau} + \ldots + (d e^{\gamma\tau_1/2})^{n-1}] \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} \varphi(H) e^{\gamma\tau/2} | x(t) | \tau.$$

Отсюда следует (22).

Лемма 9. *Пусть существуют $\tau_1: 0 < \tau_1 < \tau$ и $\gamma > 0$ такие, что $\| D_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2} + \| D_0 \|_{\tau_1} < 1$ и для решения $x(t)$ для произвольного $\alpha > 0$ существует $t: t_0 + n\tau_1 \leqslant t < t_0 + (n+1)\tau_1$ такое, что при $t_0 - \tau \leqslant \theta < t$ будет $(x(\theta), \theta) \in v_t^\alpha$, $(x(t), t) \in \partial v_t^\alpha$. Тогда*

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(s+t)| < 2d^n (1+d) [\| \dot{x}(t_0) \|_\tau + n l(\gamma) \| x(t_0) \|_\tau] +$$
$$+ l^2(\gamma) \varphi(H) e^{\gamma\tau/2} | x(t) | \tau. \quad (23)$$

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 7, с учетом неравенства (22) получаем

$$\| \dot{x}(t) - \dot{x}(s+t) \|_{\tau_1} \leqslant d \| \dot{x}(t-\tau_1) - \dot{x}(s+t-\tau_1) \|_\tau + \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} \times$$

$$\times [2d^n (1+d) \| x(t_0) \|_\tau + l(\gamma)\varphi(H) e^{\gamma\tau/2} | x(t) | \tau] \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant d^n [\| \dot{x}(t-n\tau_1) - \dot{x}(t_0) \|_{2\tau} + \| \dot{x}(t_0) - \dot{x}(t-(n+1)\tau_1) \|_\tau] +$$

$$+ n \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} < 2d^n (1 + d) \| x(t_0) \|_\tau + \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma\tau_1/2}}{1 - \| D_0 \|_{\tau_1}} [1 + de^{\gamma\tau_1/2} + \ldots$$

$$\ldots + (de^{\gamma\tau_1/2})^{n-1}] \, l(\gamma) \, \varphi(H) \, e^{\gamma\tau/2} \, | x(t) | \, \tau.$$

Отсюда следует (23).

Введем следующие обозначения:

$$K_1 = \| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau l^{-1}(0) \, [\| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l(0) +$$
$$+ \| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau]^{-1},$$
$$N_1 = \| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l^{-1}(0) \, [\| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l(0) +$$
$$+ \| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau]^{-1},$$
$$\overline{R} = 2(1 + R_1 + R_2),$$
$$R_1 = L\mu^{1-\tau/\tau_1} (l \ln \mu)^{-1} \max \{ \| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l(\gamma), \tag{24}$$
$$\| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau \} \, \{\overline{\beta}(\gamma) + [\gamma + 2\tau_1^{-1} \ln (\mu d)] \, \lambda_{\max}(H)\}^{-1},$$
$$R_2 = L \| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau \, \{\overline{\beta}(\gamma) + [\gamma + 2\tau_1^{-1} \ln d] \, \lambda_{\max}(H)\}^{-1},$$
$$L = 4(1 + d) \, d^{-\tau/\tau_1} A^{-k}(\tau) \, e^{-r\tau},$$
$$\overline{\beta}(\gamma) = \lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H) - 2l(\gamma) \, [\| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l(\gamma) +$$
$$+ \| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau] \, e^{\gamma\tau/2} \tau\varphi(H).$$

Теорема 4. *Пусть система* (2) *асимптотически устойчива. Тогда при* $\tau < \tau_0$ *для решений* $x(t)$ *системы* (1) *справедливо*

$$| x(t) | < \overline{R}\varphi(H) \, A^k(\tau) \, \| x(t_0) \|_\tau \exp \{r\tau - \gamma(t - t_0 - \tau)/2\},$$

$$| \dot{x}(t) | < \| \dot{x}(t_0) \|_\tau \exp \{-(t - t_0) \ln d/\tau_1\} + \overline{R} l(\gamma) \, \varphi^2(H) \times$$
$$\times e^{\gamma\tau/2} \| x(t_0) \|_\tau A^k(\tau) \exp \{r\tau - \gamma(t - t_0 - \tau)/2\},$$

$$\gamma \leqslant \min \left\{ \frac{\gamma_1 \lambda_{\min}(C)(1 - \tau/\tau_0)}{\gamma_1 \lambda_{\max}(H) + \lambda_{\min}(C)(1 - \tau/\tau_0)}, \frac{2}{\tau + \tau_1} \ln \frac{1}{\mu | D |} \right\},$$

μ — *произвольная величина:* $1 < \mu < d^{-1}$, γ_1 — *минимальный положительный корень уравнения*

$$1 - \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} \varphi(H) \, \tau/\tau_0}{1 - \| D_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \| D_0 \|_{\tau_1}} \left[\frac{N_1 \| L_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}}{1 - \| D_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \| D_0 \|_{\tau_1}} + K_1 \right] = 0.$$

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 2, рассмотрим производную функции $v(x, t) = e^{\gamma t} x^T H x$ вдоль решений $x(t)$ системы (1). Пусть при $t = T$, где $t_0 + n\tau_1 \leqslant T < t_0 + (n + 1)\tau_1$, будет $(x(T), T) \in \partial v_t^\alpha$. Тогда, используя неравенства (22), (23), получаем

$$\dot{v}(x(T), T) < e^{\gamma T} \{\lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H) - 2l(\gamma) \, \tau \, [\| H(E - D_0^{-1}) \, D_0 \|_\tau l(\gamma) +$$
$$+ \| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau] \, e^{\gamma\tau/2} \varphi(H)\} \, | x(T) |^2 + 4e^{\gamma T} d(1 + d) \| H(E - D_0)_0^{-1} \times$$
$$\times D_0 \|_\tau \| \dot{x}(t_0) \|_\tau | x(T) | + 4e^{\gamma T} d^n (1 + d) \, [\| H(E - D_0)^{-1} L_0 \|_\tau +$$
$$+ \| H(E - D_0)^{-1} D_0 \|_\tau n l(\gamma)] \, \| x(t_0) \|_\tau | x(T) |.$$

По предположению $t_0 + n\tau_1 \leqslant T < t_0 + (n + 1)\tau_1$. Поэтому

$$d^n \leqslant d^{-t_0/\tau_1} \exp \{T\tau_1^{-1} \ln d\}.$$

Возьмем фиксированную постоянную $1 < \mu < d^{-1}$. Для нее справедливо неравенство

$$(n+1)\mu^{-(n+1)} \leqslant (e \ln \mu)^{-1}.$$

Поэтому

$$(n+1) d^n = (n+1)\mu^{-(n+1)} (\mu d)^{n+1} d^{-1} \leqslant \frac{\mu}{e \ln \mu} (\mu d)^{-t_0/\tau_1} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{T}{\tau_1} \ln \frac{1}{\mu d}\right\}.$$

Обозначим

$$\zeta_1 = 4(1+d) d^{-t_0/\tau_1} \frac{\mu}{e \ln \mu} \max\{\| H(E-D_0)^{-1} D_0 \|_\tau l(\gamma), \| H(E-D_0)^{-1} \times$$
$$\times L_0 \| \tau\} \| x(t_0) \|_\tau,$$

$$\zeta_2 = 4(1+d) d^{-t_0/\tau_1} \| H(E-D_0)^{-1} D_0 \|_\tau \| \dot{x}(t_0) \|_\tau,$$

$$\theta_1 = \gamma - \frac{1}{\tau_1} \ln \frac{1}{\mu d}, \quad \theta_2 = \gamma - \frac{1}{\tau_1} \ln \frac{1}{d}.$$

Повторяя оценки для производной функции Ляпунова вдоль решений системы, получаем

$$\dot{v}(x(T), T) < -\beta(\gamma) e^{\gamma T} | x(T) |^2 + (\zeta_1 e^{\theta_1 T} + \zeta_2 e^{\theta_2 T}) | x(T) |.$$

Из леммы 3 следует справедливость неравенства (11). Выберем $\bar{R}_1 \geqslant 1$, $\gamma > 0$ таким образом, чтобы выполнялось

$$\left[A^k(\tau) e^{r\tau} \| x(t_0) \|_\tau - \sum_{i=1}^{2} \frac{\zeta_i \varphi(H) e^{(\theta_i - \gamma)(t_0+\tau)}}{\bar{\beta}(\gamma) + (2\theta_i - \gamma) \lambda_{\max}(H)}\right] \times$$
$$\times \varphi(H) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\beta}(\gamma)}{\lambda_{\max}(H)} + \gamma\right](T - t_0 - \tau)\right\} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \frac{\zeta_i \varphi(H) e^{(\theta_i - \gamma) T}}{\bar{\beta}(\gamma) + (2\theta_i - \gamma) \lambda_{\max}(H)} < \bar{R} A^k(\tau) \varphi(H) \| x(t_0) \|_\tau \exp\{r\tau -$$
$$- \gamma(t - t_0 - \tau)/2\}.$$

Тогда допущение $(x(T), T) \in \partial v_t^\alpha$ будет неверным и $(x(t), t) \in v_t^\alpha$ при всех $t > t_0$. Если $\bar{\beta}(\gamma) > 0$, $2\tau_1^{-1} \ln(\mu d) + \gamma < 0$, то оно выполняется при любом $\bar{R} > 2(1 + R_1 + R_2)$. Для оценки производной $|\dot{x}(t)|$ справедливо (12). Найдем $\gamma > 0$ таким образом, чтобы выполнялось

$$\lambda_{\min}(C) - \gamma \lambda_{\max}(H) - \frac{2 \| L_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} \tau}{1 - \| D_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \| D_0 \|_{\tau_1}} \times$$
$$\times \left[\frac{\| H(E-D_0)^{-1} D_0 \|_\tau \| L_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}}{1 - \| D_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \| D_0 \|_{\tau_1}} + \| H(E-D_0)^{-1} L_0 \|_\tau\right] \times$$
$$\times e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} \varphi(H) > 0, \quad \frac{2}{\tau+\tau_1} \ln \frac{1}{\mu d} > \gamma.$$

Воспользуемся обозначениями K_1, N_1. Тогда первое из неравенств примет вид

$$\lambda_{\min}(C) \left\{1 - \frac{\| L_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} \varphi(H) \tau/\tau_0}{1 - \| D_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \| D_0 \|_{\tau_1}} \times\right.$$
$$\left.\times \left[\frac{N_1 \| L_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}}{1 - \| D_0 \|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/1} - \| D_0 \|_{\tau_1}} + K_1\right]\right\} > \gamma \lambda_{\max}(H).$$

Поскольку при $0 < \gamma < \gamma_1$, где γ_1 определяется из условия равенства нулю левой части неравенства,

$$\lambda_{\min}(C)\left\{1 - \frac{\|L_0\|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}\varphi(H)\,\tau/\tau_0}{1 - \|D_0\|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \|D_0\|_{\tau_1}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{N_1\|L_0\|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2}}{1 - \|D_0\|_\tau e^{\gamma(\tau+\tau_1)/2} - \|D_0\|_{\tau_1}} + K_1\right]\right\} > \lambda_{\min}(C)(1 - \tau/\tau_0)(1 - \gamma/\gamma_1),$$

то величину γ можно найти, решая уравнение

$$\lambda_{\min}(C)(1 - \tau/\tau_0)(1 - \gamma/\gamma_1) = \gamma\lambda_{\max}(H).$$

Теорема доказана.

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1984.— 421 с.
2. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
3. *Хусаинов Д. Я., Шарковский А. Н.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Функциональные и дифференциальные уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 141—147.
4. *Хусаинов Д. Я., Юнькова Е. А.* Оценка величины запаздывания в линейных системах с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 2.— С. 261—264.
5. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова.— М. : Наука, 1970.— 240 с.
6. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эридитарных систем.— М. : Наука, 1988.— 106 с.

Получено 12.12.89