УДК 517.53

О. Б. Скаскив, В. М. Сорокивский

О росте на горизонтальных лучах аналитических функций, представленных рядами Дирихле

Исследуется вопрос о совпадении обобщенных порядков роста аналитических функций, представленных абсолютно сходящимися в полуплоскости рядами Дирихле, на луче и в полуплоскости.

Досліджується питання про збіг узагальнених порядків росту аналітичних функцій, зображених абсолютно збіжними в півплощині рядами Діріхле, на промені і в півплощині.

1. Введение. Пусть F — аналитическая в $\Pi_0 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ функция, представленная абсолютно сходящимся в Π_0 рядом Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n), \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty, \quad n \to +\infty. \tag{1}$$

Класс таких функций, показатели которых удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty, \tag{2}$$

обозначим через $S(\Lambda)$, $\Lambda = (\lambda_n)$. Через $S_\delta(\Lambda)$ обозначим подкласс $S(\Lambda)$ такой, что

$$\delta = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|} < +\infty, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^2\right). \tag{3}$$

Заметим [1, с. 25], что если $n = o(\lambda_n)$, $n \to +\infty$, и $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$, $n \geqslant 1$, то индекс конденсации $\delta = 0$.

В работах [2—5] изучалась связь между поведением функции F на луче или в полуполосе и ее ростом во всей полуплоскости Π_0 в терминах величин R-порядков функции F на луче, в полуполосе и в Π_0. В настоящей статье исследуется вопрос о совпадении более общих характеристик роста функции F на луче и в Π_0, чем R-порядки. При этом используется понятие обобщенного порядка роста введенное в [6, 7]. Показано, что получаемые достаточные условия носят необходимый характер. Отметим, что теорему 3 и лемму 1 доказал В. М. Сорокивский, остальные теоремы, а также вспомогательные утверждения получил О. Б. Скаскив.

Для определения обобщенных порядков нам понадобятся некоторые вспомогательные классы положительных функций.

Через L обозначим класс непрерывных положительных возрастающих $k+\infty$ на $[a, +\infty)$ $a > -\infty$ функций, а через L_1 — класс медленно возрастающих функций, т. е., $h \in L_1$, если $h \in L$ и для каждого $c \in [0, +\infty)$ имеет место соотношение $h(cx) \sim h(x)$, $x \to +\infty$.

Пусть далее $h^{-1}(x)$ — функция, обратная к $h(x)$. Скажем, что $h \in L_0$, если $h \in L$

$$\lim_{u\to+\infty} h(cu)/h(u) = q_1(c) \to 1\ (c \to 1), \quad \lim_{u\to+\infty} h^{-1}(\varepsilon u)/h^{-1}_{(u)} = q_2(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0).$$

Заметим, что если h — дифференцируемая функция, то $h \in L_0$, лишь только $uh'(u) = O(h(u))$, $u \to +\infty$. Кроме того, если $h \in L_1$, то $h \in L_0$. Ниже считаем, что $h(x) = h(a)$ при $x \leqslant a$ и $h(+\infty) = +\infty$.

Если $\alpha \in L$ и $\beta \in L$, а $F(z)$ — произвольная функция вида (1), то обобщенными порядками роста функции F на луче и в Π_0 называем соответственно величины

$$\rho^*_{\alpha\beta} = \varlimsup_{\sigma\to-0} \frac{\alpha(\ln|F(\sigma)|)}{\beta(1/|\sigma|)}, \quad \rho_{\alpha\beta} = \varlimsup_{\sigma\to-0} \frac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(1/|\sigma|)},$$

где $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Ясно, что $\rho^*_{\alpha\beta} \leqslant \rho_{\alpha\beta}$. При $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$ получим определение R-порядков [4].

Пусть $\Phi^{-1}(x:c) = \alpha^{-1}(c\beta(x))$, $\Phi(x:c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$.

Основным результатом этой статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции α и β удовлетворяют какой-либо из следующих двух групп условий*:

1) $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ *и для каждого* $0 < c < \infty$

$$\Phi(x:c)/x \downarrow 0, \quad x \to +\infty, \tag{4}$$

$$\alpha(x/\Phi(x:c)) \sim \alpha(x), \quad x \to +\infty, \tag{5}$$

$$\frac{\Phi(x)}{x} \ln x \to 0, \quad x \to +\infty; \tag{6}$$

2) $\alpha \in L_0$ $\beta \in L_1$ *и для каждого* $0 < c < \infty$

$$\Phi^{-1}(x:c)/x \downarrow 0, \quad x \to +\infty, \tag{7}$$

$$\beta\left(\frac{x}{\Phi^{-1}(x:c)}\right) \sim \beta(x) \quad x \to +\infty, \tag{8}$$

$$\ln x/\Phi^{-1}(x:c) \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{9}$$

Тогда для того чтобы для каждой функции $F \in S_0(\Lambda)$ выполнялось $\rho_{\alpha\beta} = \rho^*_{\alpha\beta}$, необходимо и достаточно, чтобы в случае 1

$$\Delta_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to\infty} \alpha(\lambda_n)/\beta(\lambda_n/(-\ln|B'(\lambda_n)|)) = 0, \tag{10}$$

а в случае 2

$$\tilde{\Delta}_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \alpha(-\ln|B'(\lambda_n)|)/\beta(\lambda_n) = 0, \tag{11}$$

где $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - z)/(\lambda_n + z)$.

2. Вспомогательные утверждения. В [3, с. 525—526] фактически получено следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $F \in S(\Lambda)$, то для всех $n \geqslant 0$ и всех $\sigma < 0$*

$$|a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \frac{A\lambda_n}{|B'(\lambda_n)|} \int\limits_{-\infty}^{\sigma} |F(t)|\,dt, \tag{12}$$

где A — постоянная, не зависящая от n и σ.

Положим

$$k_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \alpha(\lambda_n)/\beta(\lambda_n/\ln^+|a_n|), \quad \tilde{k}_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \alpha(\ln^+|a_n|)/\beta(\lambda_n).$$

Лемма 2. *Если $\alpha \in L$, $\beta \in L_0$, выполняются условия (4) и для каждого $0 < c < \infty$*

$$\frac{\Phi(\lambda_n : c)}{\lambda_n} \ln n \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{13}$$

то $\rho_{\alpha\beta} \leqslant k_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Если $k_{\alpha\beta} = +\infty$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому считаем, что $k_{\alpha\beta} < +\infty$. В этом случае

$$\ln^+|a_n| < \lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{k}\right), \quad n \geqslant n_0, \tag{14}$$

где $k > k_{\alpha\beta}$ — произвольное, а $n_0 = n_0(k)$.

Обозначим через $N = \min\left\{n : \Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{k}\right) > (1+2\varepsilon)/|\sigma|\right\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\lambda_{N-1} \leqslant \Phi^{-1}\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}, k\right)$. Поскольку в силу условия (13)

$$\ln n \leqslant \varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{k}\right), \quad n \geqslant n_0, \tag{15}$$

то, учитывая условие (4), при $\sigma \to -0$ имеем

$$\ln(N-1) \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_{N-1}}{\Phi\left(\lambda_{N-1} : \frac{1}{k}\right)} \leqslant \frac{\varepsilon|\sigma|}{1+2\varepsilon} \Phi^{-1}\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}, k\right). \tag{16}$$

Оценим $\sum_1 = \sum\limits_{n \geqslant N} |a_n| \exp(\sigma\lambda_n)$. Из (14), используя определение N и неравенство (15), получаем

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \sum_{n\geqslant N} \exp\left\{-2\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{k}\right)\right\} \leqslant \sum_{n\geqslant N} \frac{1}{n^2},$$

т. е. $\Sigma_1 = o(1)$, $\sigma \to -0$. Отсюда, кроме того, следует, что центральный индекс ряда (1) $\nu(\sigma) = \max\{n : |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\} \leqslant N-1$, где $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 1\}$ — максимальный член. Значит, аналогично тому, как было получено (16), имеем

$$\ln\mu(\sigma, F) = \ln|a_{\nu(\sigma)}| - |\sigma|\lambda_{\nu(\sigma)} \leqslant \lambda_{\nu(\sigma)}/\Phi\left(\lambda_{\nu(\sigma)} : \frac{1}{k}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\sigma|}{1+2\varepsilon} \Phi^{-1}\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|} : k\right).$$

Таким образом, при $\sigma \to -0$ получаем

$$\ln M(\sigma) \leqslant \ln\left(\sum_{n=1}^{N-1} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} + \sum\nolimits_1\right) \leqslant \ln((N-1)\mu(\sigma, F) + o(1)) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}|\sigma| \Phi^{-1}\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}, k\right) + \ln 2 \leqslant \Phi^{-1}\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|} : k\right),$$

и окончательно $\rho_{\alpha\beta} \leqslant k \varlimsup_{\sigma\to -0} \beta\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}\right)/\beta\left(\frac{1}{|\sigma|}\right) = q(\varepsilon)\, k$, поскольку в силу условия $\beta \in L_0$ имеем $q(\varepsilon) \downarrow 1$, $\varepsilon \to +0$.

Лемма 3. *Если* $\alpha \in L$, $\beta \in L_0$ *и выполняется условие* (5), то $k_{\alpha\beta} \leqslant \rho_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $\rho_{\alpha\beta} < +\infty$. Тогда по определению $\rho_{\alpha\beta}$ в силу неравенства Коши $M(\sigma, F) \geqslant \mu(\sigma, F)$ имеем $\ln^+|a_n| \leqslant \lambda_n|\sigma| + \alpha^{-1}(\rho\beta(1/|\sigma|))$, где $\rho > \rho_{\alpha\beta}$ — произвольное. Положив $|\sigma| = 1/\Phi\left(\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{\rho}\right) : \frac{1}{\rho}\right)$, $\varepsilon > 0$, из последнего неравенства получим

$$\ln^+|a_n| \leqslant \lambda_n/\Phi\left(\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{\rho}\right) : \frac{1}{\rho}\right) + \varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{\rho}\right).$$

Заметим, что $\varliminf_{t\to+\infty} \beta((1/(1+\varepsilon))t)/\beta(t) = c(\varepsilon) \to 1$, $\varepsilon \to +0$, в силу условия $\beta \in L_0$. Кроме того, $\alpha\left(\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : \frac{1}{\rho}\right)\right) \sim \alpha(\lambda_n)$, $n \to +\infty$. Поэтому

$$\frac{1}{k_{\alpha\beta}} = \varliminf_{n\to+\infty} \beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln^+|\alpha_n|}\right)/\alpha(\lambda_n) \geqslant c(\varepsilon)\frac{1}{\rho}.$$

В силу произвольности выбора $\rho > \rho_{\alpha\beta}$, заключаем, что лемма 3 доказана.

Замечание. В теореме 1.1 [4] утверждается, что формула для вычисления R-порядка через коэффициенты ряда Дирихле (т. е. $\rho_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}$, $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$) справедлива, если $\lim_{n\to+\infty} \ln\ln n/\ln\lambda_n < 1$. Из лемм 2 и 3 вытекает, что достаточно требовать выполнения лишь условия (13), которое в случае R-порядка примет вид $\ln n = o(\lambda_n/\ln\lambda_n)$, $n \to +\infty$.

Лемма 4. *Если* $\alpha \in L_0$, $\beta \in L$ *и выполняются* условия (7), (8) и *для каждого* $0 < c < \infty$

$$\frac{\ln n}{\Phi^{-1}(\lambda_n : c)} \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{17}$$

то $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \tilde{k}_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что $\tilde{k}_{\alpha\beta} < \infty$. Тогда

$$\ln^+|a_n| < \Phi^{-1}(\lambda_n : k), \quad n \geqslant n_0, \tag{18}$$

где $\tilde{k}_{\alpha\beta} < k$ — произвольное. Обозначим через $N = \min\left\{n : \frac{\lambda_n}{\Phi^{-1}(\lambda_n : k)} > \frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}\right\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда $(\lambda_{N-1}/\Phi^{-1}(\lambda_{N-1} : k)) \leqslant (1+2\varepsilon)|\sigma|$. В силу условия (17) и (8) при $\sigma \to -0$ имеем

$$\ln(N-1) \leqslant \varepsilon\Phi^{-1}(\lambda_{n-1} : k) = \varepsilon\alpha^{-1}(k\beta(\lambda_{N-1})) =$$
$$= \varepsilon\alpha^{-1}\left(k(1+o(1))\beta\left(\frac{\lambda_{N-1}}{\Phi^{-1}(\lambda_{N-1} : k)}\right)\right) \leqslant \varepsilon\alpha^{-1}\left((k+o(1))\beta\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}\right)\right). \tag{19}$$

Из (18), используя определение N и условие (17), при $\sigma \to -0$ получаем

$$\sum_1 = \sum_{n\geqslant N} |\alpha_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \sum_{n\geqslant N} \exp(-2\varepsilon\Phi^{-1}(\lambda_n : k)) \leqslant \sum_{n\geqslant N} \frac{1}{n^2} = o(1). \tag{20}$$

Как и при доказательстве леммы 2, отсюда следует, что центральный индекс ряда (1) $\nu(\sigma) \leqslant N - 1$. Следовательно, как и при доказательстве (19)

$$\ln\mu(\sigma) \leqslant \ln|a_{\nu(\sigma)}| \leqslant \Phi^{-1}(\lambda_{\nu(\sigma)} : k) \leqslant \Phi^{-1}(\lambda_{N-1} : k) \leqslant$$

$$\alpha^{-1}\left((k+o(1))\,\beta\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}\right)\right)$$

при $\sigma\to-0$. Отсюда, а также из (19) и (20) выводим

$$\ln M(\sigma)\leqslant\ln 2+\ln(N-1)+\ln\mu(\sigma:F)\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon+o(1))\,\alpha^{-1}\left((k+o(1))\,\beta\left(\frac{1+2\varepsilon}{|\sigma|}\right)\right),\quad\sigma\to-0.$$

Поскольку в силу условия $\alpha\in L_0$, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,\alpha((1+\varepsilon)t)/\alpha(t)=q(\varepsilon)\downarrow 1$, то окончательно имеем $\rho_{\alpha\beta}\leqslant q(\varepsilon)\,k$, откуда, благодаря произволу в выборе $k>\tilde{k}_{\alpha\beta}$, заключаем, что $\rho_{\alpha\beta}\leqslant\tilde{k}_{\alpha\beta}$.

Лемма 5. *Пусть* $\alpha\in L_0$, $\beta\in L$. *Тогда* $\tilde{k}_{\alpha\beta}\leqslant\rho_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Как и выше, считаем, не уменьшая общности, что $\rho_{\alpha\beta}<+\infty$. Тогда для любого $\rho>\rho_{\alpha\beta}$, применяя неравенство Коши и полагая $|\sigma|=1/|\lambda_n|$, получаем $\ln^+|a_n|\leqslant\lambda_n|\sigma|+\alpha^{-1}(\rho\beta(1/|\sigma|))=1+$ $+\alpha^{-1}(\rho\beta(\lambda_n))$, $n\geqslant n_0(\rho)$. В силу условия $\alpha\in L^0$ отсюда имеем $\alpha(\ln^+|a_n|)\leqslant$ $\leqslant(\rho+o(1)\,\beta(\lambda_n)$. Следовательно, $\tilde{k}\leqslant\rho$. В силу произвольности $\rho>\rho_{\alpha\beta}$ лемма доказана.

3. Достаточные условия совпадения обобщенных порядков на луче и в полуплоскости. Теорема 2. *Пусть* $\alpha\in L_1$, $\beta\in L_0$ *и выполняются условия* (4)—(6). *Если* $F\in S(\Lambda)$ *и* $\Delta_{\alpha\beta}=0$, *то* $\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Поскольку $\rho_{\alpha\beta}\geqslant\rho^*_{\alpha\beta}$, то достаточно доказать, что $\rho_{\alpha\beta}\leqslant\rho^*_{\alpha\beta}$ в случае $\rho^*_{\alpha\beta}<\infty$. Из определения $\rho^*_{\alpha\beta}$ следует, что для каждого $\rho>\rho^*_{\alpha\beta}$

$$|F(\sigma)|<\exp\{\alpha^{-1}(\rho\beta(1/|\sigma|))\},\quad\sigma_0\leqslant\sigma<0,\quad\rho_0=\sigma_0(\rho),\tag{21}$$

а из определения $\Delta_{\alpha\beta}=0$ для каждого $\Delta>0$ имеем $-\ln|B'(\lambda_n)|\leqslant\lambda_n/$ $/\beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(\lambda_n)\right)$, $n\geqslant n_0(\Delta)$. Отсюда и из неравенства (12) получим

$$\ln^+|\alpha_n|\leqslant\ln|(A\lambda_n)-\ln|B'(\lambda_n)|+\ln\left(\int\limits_{-\infty}^{\sigma_0}|F(t)|\,dt+\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}|F(t)|\,dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant\ln(A_1\lambda_n)+\lambda_n/\beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(\lambda_n)\right)+\alpha^{-1}(\rho\beta(1/|\sigma|))+\lambda_n|\sigma|,$$

где $A_1>A$ — некоторая постоянная.

Полагая $\dfrac{1}{|\sigma|}=\beta^{-1}\left(\dfrac{1}{\rho}\alpha(\varepsilon\lambda_n/\Phi(\lambda_n:1/\rho))\right)=\Phi(\varepsilon\lambda_n/\Phi(\lambda_n:1/\rho):1/\rho)$ и используя условие (6), при $n\to+\infty$ имеем

$$\ln^+|a_n|\leqslant(1+o(1))\,\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n:\frac{1}{\Delta}\right)+\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n:\frac{1}{\rho}\right)+\lambda_n/\Phi\times$$

$$\times(\varepsilon\lambda_n/\Phi(\lambda_n:1/\rho):1/\rho).$$

Заметим, что в силу условия $\beta\in L^0\,\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,\beta^{-1}(\varepsilon t)/\beta^{-1}(t)=q_1(\varepsilon_1)\to 0$, $\varepsilon_1\to+0$. Поэтому

$$\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right)\geqslant\beta\left(\Phi(\varepsilon\lambda_n/\Phi(\lambda_n:1/\rho):1/\rho)/(1+o(1))\left(\varepsilon+q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)+1\right)\right).\tag{22}$$

Отсюда, поскольку $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,\beta((1+\varepsilon_1)t)/\beta(t)=q_2(\varepsilon_1)\to 1$, $\varepsilon_1\to+\infty$, следует

$$\beta\left(\frac{\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right)\geqslant q_2\left(\frac{1}{\varepsilon+q_1\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)+1}-1\right)\frac{1}{\rho}\,\alpha\left(\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : 1/\rho\right)\right). \tag{23}$$

Используя условие (5), в силу произвольности $\Delta>0$ и $\rho>\rho^*_{\alpha\beta}$ из последнего неравенства получаем $k_{\alpha\beta}\leqslant\rho^*_{\alpha\beta}$.

Доказательство теоремы 2 завершается применением леммы 2, поскольку в силу условия (2) $n=o(\lambda_n)$, $n\to+\infty$, и, значит, условие (13) леммы 2 является следствием условия (6).

В случае, когда $\alpha\in L_1$, $\beta\in L_1$, утверждение теоремы 1 можно усилить.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha\in L_1$, $\beta\in L_1$ *и выполняются условия* (4) — (6). *Если* $F\in S(\Lambda)$ *и* $\Delta_{\alpha\beta}<\rho^*_{\alpha\beta}$, *то* $\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\alpha\beta}$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 вплоть до получения неравенства (22) включительно. Из (22), применяя соотношение $\beta(ct)\sim\beta(t)$, $t\to+\infty$, вместо (22) получим

$$\beta\left(\lambda_n/\ln^+|a_n|\right)\geqslant\frac{1+o(1)}{\rho}\,\alpha\left(\varepsilon\lambda_n/\Phi\left(\lambda_n : 1/\rho\right)\right).$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Следующая теорема дополняет теорему 2.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha\in L_0$, $\beta\in L_1$ *и выполняются условия* (7) — (9). *Если* $F\in S(\Lambda)$ *и* $\tilde\Delta_{\alpha\beta}=0$, *то* $\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\alpha\beta}$.

Доказательство. Как и выше, предполагаем, что $\rho^*_{\alpha\beta}<+\infty$. Из определения $\tilde\Delta_{\alpha\beta}$ для любого $\Delta>\tilde\Delta_{\alpha\beta}$ имеем $-\ln|B'(\lambda_n)|<\alpha^{-1}(\Delta\beta\times(\lambda_n))=\Phi^{-1}(\lambda_n : \Delta)$, $n\geqslant n_0(\Delta)$. Применяя это неравенство вместе с (21) к соотношению (12), получаем $\ln^+|a_n|\leqslant\ln(A_1\lambda_n)+\alpha^{-1}(\Delta\beta(\lambda_n))+\alpha^{-1}\times(\rho\beta(1/|\sigma|))+\lambda_n|\sigma|$, где $A_1>A$ — некоторая постоянная. Полагая $1/|\sigma|=\lambda_n$ и используя условие (9), отсюда находим

$$\ln^+|a_n|\leqslant\alpha^{-1}(\Delta\beta(\lambda_n))+(1+o(1))\,\alpha^{-1}(\rho\beta(\lambda_n)),\quad n\to+\infty. \tag{24}$$

Поскольку в силу условия $\alpha\in L_0$ имеем $\alpha^{-1}(\Delta t)<\left(q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)+\varepsilon\right)\alpha^{-1}(\rho t)$, $t\to+\infty$, $\varepsilon>0$ — произвольное и $\alpha\left(\left(1+q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)+\varepsilon\right)t\right)<\left(q_1\left(1+q_2\times\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)+\varepsilon\right)+\varepsilon_1\right)\alpha(t)$, $t\to+\infty$, $\varepsilon_1>0$ — произвольное, то из (24) получим $\tilde k_{\alpha\beta}\leqslant\rho\left[q_1\left(1+q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)+\varepsilon\right)+\varepsilon_1\right]$. Отсюда, учитывая что $q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)\to 0$, $\Delta\to 0$, и $q_1(c)\to 1$, $c\to 1$, а также ввиду произвольности $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1>0$, $\Delta>0$, $\rho>\rho^*_{\alpha\beta}$ имеем $\tilde k_{\alpha\beta}\leqslant\rho^*_{\alpha\beta}$. Применяя неравенство $\rho_{\alpha\beta}\leqslant\tilde k_{\alpha\beta}$ из леммы 4, получаем равенство $\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\alpha\beta}$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что в силу условия (2) имеет место равенство $n=o(\lambda_n)$, $n\to+\infty$, поэтому условие (17) леммы немедленно следует из условия (9).

Следующая теорема усиливает утверждение теоремы 4 в случае, когда $\alpha\in L_1$, $\beta\in L_1$.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha\in L_1$, $\beta\in L_1$ *и выполняются условия* (7) — (9). *Если* $F\in S(\Lambda)$ *и* $\tilde\Delta_{\alpha\beta}<\rho^*_{\alpha\beta}$, *то* $\rho_{\alpha\beta}=\rho^*_{\alpha\beta}$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4 вплоть до неравенства (24) включительно.

Из (24) получим $\ln^+|a_n|\leqslant(2+o(1))\,\alpha^{-1}(\rho\beta(\lambda_n))$. Отсюда в силу условия $\alpha(ct)\sim\alpha(t)$, $t\to+\infty$, $0<c<\infty$ имеем $\tilde k_{\alpha\beta}\leqslant\rho$, что в силу произвольности $\rho>\rho^*_{\alpha\beta}$ дает $\tilde k_{\alpha\beta}\leqslant\rho^*_{\alpha\beta}$. Применение леммы 4 завершает доказательство.

4. Пример абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле, ограниченного на отрицательном луче. Идея постройки ограниченной на действительной оси целой функции, представленной лакунарным степенным рядом, содержится в работе [8, с. 636—639] и затем она получила свое дальнейшее развитие в [9, 10]. Проводимое ниже построение абсолютно сходящегося в полуплоскости ряда Дирихле с требуемыми свойствами базируется на развитии идей работ [8—10] применительно к классу функций $S(\Lambda)$.

Теорема 6. *Для любой последовательности $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), ряд Дирихле вида (1) с коэффициентами*

$$a_n = 1/(1+\lambda_n)^2 B_1'(\lambda_n), \quad B_1(z) = e^{\delta z} B(z),$$

представляет функцию $F \in S_\delta(\Lambda)$, ограниченную на отрицательном луче.

Доказательство. Покажем, что при $x < 0$ функция F, являющаяся суммой ряда Дирихле (1), может быть представлена интегралом

$$F(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{tx}}{(1+t)_2 B_1(t)}\, dt. \tag{25}$$

Поскольку $|B_1(iy)| = 1$ для всех $y \in \mathbb{R}$, то функция, определенная в (25) ограничена для всех $x \in \mathbb{R}$.

Заметим, что если $\lambda_n < R_k < \lambda_{n+1}$, а контур $\Gamma_k = \{z : |z| = R_k, -\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2\} \cup [iR_k - iR_k]$ считать ориентированным в положительном направлении, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k} \frac{e^{zx}}{(1+z)^2 B_1(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=\lambda_j} \frac{e^{zx}}{(1+z)^2 B_1(z)} = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{x\lambda_j}, \tag{26}$$

где $1/a_j = B_1'(\lambda_j)(1+\lambda_j)^2$.

Рассмотрим сначала функцию $B(z)$. При $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in]\theta, \pi-\theta[$, $0 < \theta < \pi/2$, выбирая ту ветвь $\ln B(z)$, для которой $\ln B(0) = 0$ имеем [11, с. 92]

$$\ln B(z) = -z\int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t(t-z)}\, dt - z\int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t(t+z)}\, dt = -2z\int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^2-z^2}\, dt,$$

где $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ — считающая функция последовательности (λ_n). Поскольку $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{t^2-z^2}\right) = \frac{R(t^2-R^2)\cos\varphi}{|t^2-z^2|^2}$, $|t - Re^{i\varphi}| \geqslant |t+R|\sin(\theta/2)$ и $|t + Re^{i\varphi}|^2 \geqslant t^2 + R^2$ для всех $|\varphi| \in [\theta, \pi/2]$, то для $|\varphi| \in [\theta, \pi/2]$ имеем

$$-\ln|B(z)| = 2\operatorname{Re}\left(z\int_0^{\infty} \frac{n(t)}{t^2-z^2}\, dt\right) \leqslant \frac{R\cos\varphi}{\sin^2(\theta/2)}\int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{(t+R)^2}\, dt. \tag{27}$$

Заметим, что в силу условия (2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{(t+R)^2}\, dt = o(1), \quad R \to +\infty. \tag{28}$$

С другой стороны [1, с. 67], для угла $\{z : |\arg z| \leqslant \theta\}$ найдется последовательность $R_k \uparrow +\infty$ такая, что при $z = R_k e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \theta$, $\ln \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{z}{\lambda_n}\right| \geqslant$

$\geqslant -R_k \varepsilon(R_k)$, где $\varepsilon(R_k) \to +0$. Поэтому для $z = R_k e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant \theta$ имеем

$$-\ln|B(z)| = -\ln \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z}{\lambda_n} \right| + \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left| 1 + \frac{z}{\lambda_n} \right| < R_k \varepsilon_1(R_k),$$

$$R_k \to +\infty, \tag{29}$$

где $\varepsilon_1(R_k) \to 0$, $R_k \to \infty$, поскольку $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z/\lambda_n)$ — целая функция минимального типа первого порядка.

Пусть n_k — последовательность такая, что $\lambda_{n_k} < R_k < \lambda_{n_k+1}$. Из (26) для $\theta \in]0, \pi/2[$ выводим

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-iR_k}^{iR_k} \frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B_1(t)} dt + \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j e^{x\lambda_j} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi/\alpha}^{\pi/2} \frac{R_k e^{i\varphi} e^{xR_k e^{i\varphi}}}{(1 + R_k e^{i\varphi})^2 B_1(R_k e^{i\varphi})} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{-\pi/2}^{-\theta} \right| + \left| \int_{\theta}^{\pi/2} \right| + \left| \int_{-\theta}^{\theta} \right| = I_1 + I_2 + I_3. \tag{30}$$

Интегралы I_1 и I_2 оценим, использовав (27):

$$I_1 + I_2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{R_k}{1 + R_k^2} \exp\left\{ R_k \cos\varphi \left(x - \delta + \int_0^{+\infty} \frac{n(t)\,dt}{(t + R_k)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \right\} d\varphi.$$

Поскольку $\delta \geqslant 0$, в силу (28) при $x < 0$ получим

$$I_1 + I_2 \leqslant \frac{1}{R_k} = o(1), \quad R_k \to +\infty. \tag{31}$$

Для оценки I_3 используем (29). При $x < 0$ выводим

$$I_3 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{R_k}{1 + R_k^2} \exp\left\{ R_k \cos\varphi \left(x - \delta + \frac{\varepsilon_1(R_k)}{\cos\varphi} \right) \right\} d\varphi = o(1), \quad R_k \leftarrow +\infty.$$

Отсюда с учетом (30) и (31) для всех $x < 0$ имеем

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B_1(t)} dt = -\lim_{n_k \to +\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j e^{x\lambda_j}. \tag{32}$$

Далее, поскольку $\delta < \infty$, то из легко проверяемого неравенства

$$-\ln|B_1'(\lambda_n)| < -\delta\lambda_n + \ln 4 - \ln|L'(\lambda_n)| + 2N(\lambda_n) +$$

$$+ 2n(\lambda_n)\ln 2 + 2\lambda_n \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/\lambda_j,$$

где $N(t) = \int_0^t n(u)\, d\ln u$, следует $-\ln|B_1'(\lambda_n)| = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$. Поэтому $\ln|a_n| = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, и значит [12, с. 115], абсцисса сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n)$ равна нулю.

Следовательно, в силу (32) интеграл $-\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{tx}}{(1+t)^2 B_1(t)}\,dt$ является сужением на полуось $\{z = x + iy;\ y = 0,\ x < 0\}$ функции $F \in S_\delta(\Lambda)$. Теорема 6 доказана.

Замечание. В случае $\Delta_{\alpha\beta} < \infty$ и $\tilde{\Delta}_{\alpha\beta} < \infty$, как легко видеть из условий (4) и (7), индекс конденсации $\delta = 0$.

Доказательство необходимости в теореме 1. Поскольку $\delta = 0$, то по теореме 6 существует функция $F \in S_0(\Lambda)$, ограниченная на отрицательном луче (следовательно, $\rho^* = 0$). Пусть сначала $\Delta_{\alpha\beta} > 0$ в условиях случая 1. Для любого $0 < \Delta < \Delta_{\alpha\beta}$ вдоль некоторой последовательности $n_j \uparrow +\infty$ имеем $-\ln|B'(\lambda_n)| \geqslant \lambda_n/\beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(\lambda_n)\right)$, $n = n_j$. Поэтому в силу условия (6) при $n = n_j \to +\infty$ $\ln^+|\alpha_n| \geqslant -2\ln(1+\lambda_n) - \ln|B' \times$ $\times (\lambda_n)| \geqslant (1 + o(1))\,\lambda_n/\beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(\lambda_n)\right)$, откуда, учитывая, что $\beta \in L^0$, получаем $k_{\alpha\beta} \geqslant \Delta$. В силу произвольности Δ имеем $k_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$. Осталось применить лемму 3. Необходимость в случае 1 доказана.

Если $\tilde{\Delta}_{\alpha\beta} > 0$ в условиях случая 2, то для любого $0 < \Delta < \tilde{\Delta}_{\alpha\beta}$ вдоль некоторой последовательности $n_j \uparrow +\infty$ $-\ln|B'(\lambda_n)| \geqslant \alpha^{-1}(\Delta\beta(\lambda_n))$. В силу условия (9) при $n = n_j \to +\infty$ получим $\ln^+|a_n| \geqslant (1 + o(1))\,\alpha^{-1} \times$ $\times (\Delta\beta(\lambda_n))$. Поскольку $\alpha \in L^0$, в силу произвольности Δ из последнего неравенства следует, что $\tilde{k}_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$. Применяя лемму 5, имеем $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \tilde{k}_{\alpha\beta} \geqslant$ $\geqslant \tilde{\Delta}_{\alpha\beta} > 0$, т. е. необходимость в теореме 1 доказана.

Достаточность немедленно получим из утверждений теорем 2 и 4. Теорема 1 доказана полностью.

Анализ доказательства необходимости в теореме 1 показывает, что в условиях (3) и (5) доказаны следующие утверждения.

Теорема 7. *Для любой последовательности $\Lambda = (\lambda_n)$, для которой $\delta = 0$, выполняется условие* (2) *и* 1) $\Delta_{\alpha\beta} > 0$, $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ *или* 2) $\tilde{\Delta}_{\alpha\beta} > 0$, $\alpha \in L_0$, $\beta \in L$, *существует функция* $F \in S_0(\Lambda)$, *ограниченная на отрицательном луче и* $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$ *в случае* 1) *и* $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \tilde{\Delta}_{\alpha\beta}$ *в случае* 2).

1. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
2. *Yu Chia-Yung.* Sur la croissance de certaines series de Dirichlet sur des demi-droites horisontales // C. r. Acad. sci. Ser. 1.— 1983.— **296**, N 4.— P. 187—190.
3. *Сорокивский В. М.* О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 4.— С. 524—528.
4. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле в полуполосе // Мат. сб.— 1982.— **117**, № 3.— С. 412—244.
5. *Гайсин А. М.* Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах // Мат. заметки.— 1987.— **42**, вып. 5.— С. 660—669.
6. *Галь Ю. М., Шеремета М. Н.* О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1978.— № 12.— С. 1064—1067.
7. *Галь Ю. М.* Асимптотические свойства аналитических функций, заданных абсолютно сходящимися в полуплоскости рядами Дирихле: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1986.— 10 с.
8. *Polya G.* Untersuchungen über Lucken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Z.— 1929.— **29**.— S. 549—640.
9. *Macintyre A. J.* Asymptotic paths of integral functions with gap power series // Proc. London Math. Soc.— 1952.— **2**.— P. 286—298.
10. *Шеремета М. Н.* Теоремы единственности для целых рядов Дирихле // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 7.— С. 64—72.
11. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
12. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.

Львов. ун-т

Получено 30.05.88