УДК 519.21

Я. И. Елейко

Предельное распределение временных средних для процессов с полумарковским вмешательством случая

Найдено предельное распределение временных средних для процессов с полумарковским вмешательством случая без условий конечности средних значениеи моментов вмешательства.

Знайдено граничний розподіл часових середніх для процесів з напівмарківським втручанням випадку без умови скінченності середніх значень моментів втручання.

Рассмотрим процесс x_t с произвольным пространством состояний $(X, \mathcal{B})$ и марковским вмешательством случая τ [1]. Тогда $x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \ldots, x_{\tau_k}, \ldots$ — вложенная цепь Маркова. В дальнейшем будем предполагать счетную порожденность σ-алгебры $\mathcal{B}$, а также эргодичность x_{τ_k} со стационарным распределением $\Pi(\cdot)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} P^k(x, A) = \Pi(A)$ $\forall x \in X$, $A \in \mathcal{B}$, где $P^k(x, A) = P_x\{x_{\tau_k} \in A\}$, P_x — условная вероятность при условии $x_0 = x$.

Пусть $f(x)$ — измеримое отображение $(X, \mathcal{B}) \to (R^+, \mathcal{B}^+)$, $\mathcal{B}^+$ — σ-алгебра борелевских множеств на $[0, \infty) = R^+$.

Рассмотрим $\zeta_t = \int\limits_0^t f(x_u)\, du$.

Цель настоящей статьи — найти условия, при которых существует предельное распределение ζ_t/t в случае бесконечности средних времен τ.

Теорема. *Пусть для процесса x_t с полумарковским вмешательством случая τ вложенная цепь Маркова x_{τ_k} эргодична со стационарным распределением $\Pi(\cdot)$. Если*

$$\frac{t^\alpha}{L(1/t)} [1 - M_x(e^{-\frac{s}{t}\tau - \lambda/t \int\limits_0^\tau f(x_u)du})] \underset{t\to\infty}{\to} a(\lambda, s, x) \tag{1}$$

Π-почти всюду и в среднем по мере $\Pi(\cdot)$,

$$\int\limits_X a(\lambda, s, x)\, \Pi(dx) > 0, \tag{2}$$

$$\frac{t^\alpha}{L(1/t)} M_x(e^{-\frac{\lambda}{t}\int\limits_0^t f(x_u)du}, \tau > t) \underset{t\to\infty}{\to} b(\lambda, x), \tag{3}$$

Π-почти всюду,

$$\int\limits_X b(\lambda, x)\, \Pi(dx) > 0, \tag{4}$$

где $L(s)$ — медленноменяющаяся в нуле функция, $\alpha \in (0, 1)$, то для всякой положительной ограниченной измеримой функции f Π-почти всюду имеют место равенства

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(x_u)\, du < y\right\} = G(y)$$

и

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda u} dG(u) = \int\limits_X \int\limits_0^1 \Pi(dy)\, \mu_\lambda(du)\, b(\lambda(1-u), y)(1-u)^{-\alpha},$$

а мера $\mu_\lambda(\cdot)$ определяется преобразованием Лапласа

$$\int\limits_0^\infty e^{-su} \mu_\lambda(du) = \int\limits_X a(\lambda, s, z)\, \Pi(dz).$$

Доказательство. Обозначим через $\bar{x}_t$ полумарковский процесс построенный по цепи Маркова x_{τ_k}, $\eta_t = t - \sup_k \{\tau_k < t\}$ — время, прошедшее после последнего скачка.

Рассмотрим совместное распределение $(\zeta_t, \eta_t/t, x_t \in B)$, $B \in \mathscr{B}$. По формуле полной вероятности имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_x (e^{-\lambda\zeta_t}, \tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}, \eta_t/t > v, \bar{x}_t \in B) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \int_X M_x (e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy) M_y (e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t - u, \eta_t/t > v, \bar{x}_t \in B) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{t-tv} \int_B M_x (e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy) M_y (e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t - u).$$

Введем обозначения

$$\Phi_\lambda^{k^*} (x, du, dy) = M_x (e^{-\lambda\zeta_{\tau_k}}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in dy), \quad R_\lambda (x, du, dy) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_\lambda^{k^*} (x, du, dy).$$

Тогда в принятых обозначениях справедливо равенство

$$M_x (e^{-\lambda\zeta_t}, \eta_t/t > v, \bar{x}_t \in B) = \int_0^{t(1-v)} \int_B R_\lambda (x, du, dy) M_y (e^{-\lambda\zeta_{t-u}}, \tau > t - u). \quad (5)$$

Будем искать предел (5) при λ, равном λ/t_m. Из соотношения (5) получим

$$M_x (e^{-\lambda\zeta_{t_m}/t_m}, \eta_{t_m}/t_m > v, \bar{x}_{t_m} \in B) = \int_0^{1-v} \int_B R_{\lambda/t_m} (x, t_m du, dy) \times$$

$$\times M_y (e^{-\lambda\zeta_{t_m(1-u)}/t_m}, \tau > t_m (1 - u)). \quad (6)$$

Рассмотрим преобразование Лапласа ядра восстановления $R_\lambda (x, du, A$ при фиксированнном $A \in \mathscr{B}$. В результате будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-su} M_x (e^{-\lambda\zeta_u}, \tau_k \in du, x_{\tau_k} \in A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A M_x (e^{-\lambda\zeta_{\tau_k} - s\tau_k} \mid x_{\tau_k} = y) P^k (x, dy). \quad (7)$$

Найдем теперь предел (7) при условии $\lambda = \lambda/t_m$, $t = s/t_m$. Обозначим

$$q_m (x, y) = M_x (e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau - \frac{s}{t_m}\tau} / x_\tau = y).$$

В силу предположений $q_m (x, y) \uparrow 1$, $m \to \infty$. Используя теорему 3 из [2], получаем $\lim_{m\to\infty} \sup_{A \in \mathscr{B}} | \varepsilon_m R_m (x, A) - \Pi (A) | = 0$ Π-почти всюду. Так как значения

$$f_m (x) = \frac{M_x (1 - e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau - \frac{s}{t_m}\tau})}{1 - M_\Pi (e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau - \frac{s}{t_m}\tau})}$$

положительны, то $\int_X f_m (x) \Pi (dx) = 1$. В силу (1) $f_m (x)$ сходятся в средном по мере П и П-почти всюду, поэтому $f_m(x)$ равномерно интегрируема и, согласно теореме 3 из [2], $\varepsilon_m \sim M_\Pi(1-q_m(x_{\tau_0}, x_{\tau_1}))$, $m\to\infty$, т. е.

$$\varepsilon_m \sim M_\Pi(1-e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau - \frac{s}{t_m}\tau}) = \int_X \Pi(dy)[1-M_y(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_\tau-\frac{s}{t_m}\tau})], \quad m\to\infty.$$

Из (1) следует соотношение

$$\varepsilon_m \sim t_m^{-\alpha} L(1/t_m)\int_X a(\lambda, s, y)\,\Pi(dy), \quad m\to\infty,$$

и, следовательно,

$$t_m^{-\alpha} L(1/t_m)\int_0^\infty R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, B)\, e^{-su} \xrightarrow[m\to\infty]{} \Pi(B)\int_X a(\lambda, s, z)\,\Pi(dz).$$

Отсюда П-почти всюду имеет место слабая сходимость по u, причем

$$\int_0^\infty a(\lambda, s, z)\,\Pi(dz) = \int_0^\infty e^{-su}\mu_\lambda(du).$$

Из (3) имеем

$$M_x(e^{-\frac{\lambda}{t}\zeta_{t(1-u)}}, \tau > t(1-u)) \sim t^{-\alpha}(1-u)^{-\alpha} L(1/t)\, b(\lambda(1-u), x), \quad t\to\infty,$$

как только $(1-u) > 0$. Обозначим через

$$\mu_m(x, du, dy) = t_m^{-\alpha} L(1/t_m) R_{\lambda/t_m}(x, t_m du, dy), \quad \mu_\lambda(du, dy) = \mu_\lambda(du)\,\Pi(dy),$$

$$f(u, y) = b(\lambda(1-u), y)(1-u)^{-\alpha}, \quad f_m(u, y) = \frac{M_y(e^{-\frac{\lambda}{t_m}\zeta_{t_m(1-u)}}, \tau > t_m(1-u))}{t_m^{-\alpha} L(1/t_m)}.$$

Покажем, что

$$\int_B\int_0^{1-v} \mu_m(x, du, dy) f_m(u, y) \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_B\int_0^{1-v} \mu_\lambda(x, du, dy) f(u, y) \text{ П-почти всюду},$$

$$0 < v \leqslant 1.$$

Действительно,

$$\int_B\int_0^{1-v} \mu_m(x, du, dy) f(u, y) \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_B\int_0^{1-v} \mu_\lambda(x, du, dy) f(u, y),$$

так как $f(u, y)$ аппроксимируется последовательностью ступенчатых функций по y, причем при $y \in D_j \supset B$, $\bigcup_j D_j = X$, $\sup_{u, y\in D_j}|f(u, y)| < K$. По u аппроксимирующая последовательность будет непрерывной. Далее необходимо воспользоваться слабой сходимостью $\mu_m(x, du, dy)$ к $\mu_\lambda(x, du, dy)$ по du и перейти к пределу по ступенчатым функциям. Так как $f_m(u, y) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(u, y)$ Пx-почти всюду и при фиксированном y $f_m(u, y)$ будет последовательностью монотонных непрерывных функций, то, согласно теореме Дини, сходимость будет равномерной.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует D_j: $\Pi(D_j) > 1-\varepsilon$, на котором $f_m(u, y) \rightrightarrows f(u, y)$, $y \in D_j$, $u \in [0, 1-v)$. Следовательно,

$$\left|\int_{D_j}\int_0^{1-v} f_m(u, y)\,\mu_m(x, du, dy) - \int_{D_j}\int_0^{1-v} f(u, y)\,\mu_m(x, du, dy\right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

так как при достаточно большом m меры $\mu_m(x, [0, \infty), X) < \infty$ равномерно по $x \in X$. Отсюда следует

$$\left| \int_{D_j} \int_0^{1-v} f_m(u, y)\, \mu_m(x, du, dy) - \int_{D_j} \int_0^{1-v} f_0(u, y) \mu_\lambda(x, du, dy) \right| \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

В силу того, что $P_x(\bar{x}_t \in D) = 0$, если $\Pi(D) = 0$ и η_t/t — собственная случайная величина, имеем

$$\lim_{t\to\infty} M_x(e^{-\frac{\lambda}{t}\zeta_t}) = \lim_{t\to\infty} \lim_{v\to+0} \lim_{n\to\infty} M_x(e^{-\frac{\lambda}{t}\zeta_t}, \eta_t/t > v, \bar{x}_t \in D_n) =$$
$$= \int_X \int_0^1 \Pi(dy)\, \mu_\lambda(du)\, b(\lambda(1-u), y)(1-u)^\alpha,$$

где $\bigcup_n D_n = X$. Теорема доказана.

1. *Шуренков В. М.* Марковское вмешательство случая и предельные теоремы // Мат. сб.— 1985.— **130**, № 2.— С. 172—193.
2. *Шуренков В. М.* Асимптотика потенциала обрывающейся эргодической цепи Маркова // Некоторые вопросы теории случай. процессов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 122—133.

Львов. ун-т

Получено 22.04.88