УДК 517.95

В. А. Лискевич, Ю. А. Семенов

Об условиях самосопряженности операторов Дирихле

Изучаются операторы, ассоциированные с формами Дирихле квазиинвариантных мер на гильбертовом пространстве. Установлены признаки существенной самосопряженности таких операторов на гладких областях определения в терминах логарифмической производной меры.

Вивчаються оператори, асоційовані з формами Дирихле квазіінваріантних мір на гільбертовому просторі. Установлені ознаки істотної самоспряженості таких операторів на гладких областях визначення в термінах логарифмічної твірної міри.

В настоящей статье установлены признаки существенной самосопряженности операторов Дирихле — операторов, ассоциированных формами Дирихле мер на гильбертовом пространстве. Потребность в изучении таких операторов продиктована задачами квантовой физики [1]. Первоначальные результаты, касающиеся замыкаемости форм и построения диффузионных процессов, приведены в [2, 3]. Операторы с гладкими ограниченными коэффициентами изучены в [3, 4]. Вопросы существенной самосопряженности для оператора Дирихле впервые изучены в [5] (см. также [1]), а для того же оператора с переменными коэффициентами — в [6].

В конструкции операторов будем следовать работам [2, 5, 6]. Пусть $\mathcal{H}_0$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_0 \subset \subset \mathcal{H}_-$ — оснащение $\mathcal{H}_0$ гильбертовым пространством с плотным квазиядерным вложением. Обозначим $C^k(\mathcal{H}_-, X)$, $k = 1, 2$, множество отображений $\mathcal{H}_-$ в банахово пространство X, k раз непрерывно дифференцируемых по Фреше. Определим $C_b^2(\mathcal{H}_-, X)$ как банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{C_b^2} = \sup_{x \in \mathcal{H}_-} (\|f(x)\|_X + \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_-, X)} + \|f''(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_-, \mathcal{L}(\mathcal{H}_-, X))}),$$

где $\mathscr{L}(\mathscr{H}_-, X)$ — пространство линейных непрерывных операторов из $\mathscr{H}_-$ в X. В случае $X = K$ (пространство комплексных чисел) отождествим $f'(x) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, K)$ с $\tilde{f}'(x) \in \mathscr{H}_+$, а $f''(x) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, K))$ с оператором $\tilde{f}''(x) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}_+)$, положив $(\tilde{f}'(x), \varphi)_0 = f'(x)\varphi$, $(\tilde{f}''(x)\varphi, \psi)_0 = (f''(x)\varphi)\psi$, $\varphi, \psi \in \mathscr{H}_-$, $(\cdot,\cdot)_0$ — двойственность между $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$, определяемая скалярным произведением в $\mathscr{H}_0$. Пусть также $C_b^2(\mathscr{H}_-) \equiv C_b^2(\mathscr{H}_-, K)$, $C_0^2(\mathscr{H}_-) = \{f \in C_b^2(\mathscr{H}_-) \mid \operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathscr{H}_- \mid \|x\|_{\mathscr{H}_-} \leqslant c_f,\ c_f < \infty\}\}$. Будем предполагать, что на σ-алгебре $\mathscr{F}$ борелевских подмножеств $\mathscr{H}_-$ задана вероятностная мера μ, квазиинвариантная относительно сдвигов на элементы из $\mathscr{H}_+$, обладающая логарифмической производной $\beta_q \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathscr{H}_-)$ по направлениям $q \in \mathscr{H}_+$

$$\exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathscr{H}_-} f(x)\left(\frac{d\mu(t+tq)}{d\mu(x)} - 1\right) d\mu(x) = \int_{\mathscr{H}_-} f(x)\beta_q(x)\,d\mu(x),\ \forall f \in C_0(\mathscr{H}_-),$$

и существует $\mathscr{F}$-измеримое отображение $\beta: \mathscr{H}_- \to \mathscr{H}_-$ и $\forall q \in \mathscr{H}_+\ \beta_q(x) = (\beta(x), q)_0$ для μ-почти всех $x \in \mathscr{H}_-$. Будем использовать следующие обозначения: $\nabla f = f'$, $\nabla_i f = (f', e_i)_0$, $\beta_i = (\beta, e_i)_0$, $\{e_i\} \subset \mathscr{H}_+$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}_0$, $\nabla\eta^2\nabla f = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_0}(\eta^2 f')'$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(\mathscr{H}_-, d\mu)$, $|\cdot|_0$ — норма в $\mathscr{H}_0$, $|\cdot|_-$ — норма в $\mathscr{H}_-$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L^2(\mathscr{H}_-, d\mu) = L^2$.

В пространстве L^2 определим энергетическую форму

$$E(f, g) = \int_{\mathscr{H}_-} (f'(x), g'(x))_0\,d\mu(x) \equiv \langle(\nabla f, \nabla g)_0\rangle, \quad f, g \in C_b^1(\mathscr{H}_-).$$

Интегрированием по частям можно проверить [2], что $\langle\varphi, \nabla_i f\rangle = \langle\nabla_i^+\varphi, f\rangle$, $\forall \varphi, f \in C_b^1(\mathscr{H}_-)$, $\nabla_i^+ = -\nabla_i - \beta_i$. Формально ассоциированный с формой E оператор $H = -(\nabla + \beta)\nabla = -\Delta - \beta\nabla$, $\mathscr{D}(H) \supset C_b^2(\mathscr{H}_-)$, $\Delta f = \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}_0} f''$, $\beta\nabla f = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \nabla_i f$, называется оператором Дирихле.

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant V \in L^2_{\mathrm{loc}}$, $|\beta|_- \in L^2_{\mathrm{loc}}$. Пусть, кроме того, $|\beta|_- \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathscr{H}_- \setminus B_R, d\mu)$ для некоторого $R < \infty$, где $B_R = \{x \in \mathscr{H}_- \mid |x|_- \leqslant R\}$. Положим $\hat{H}_\eta = -(\nabla + \beta)\eta^2\nabla + V\eta$, $\eta \in C_0^2(\mathscr{H}_-)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$ на B_R. Предположим, что оператор $H_\eta = [\hat{H}_\eta \upharpoonright C_0^2(\mathscr{H}_-)]^*$ самосопряжен в L^2 при любом указанном η. Тогда оператор $\hat{H} = -(\nabla + \beta)\nabla + V$ в существенном самосопряжен на $C_0^2(\mathscr{H}_-)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $u \in L^2$ и $\langle(1 + \hat{H})\varphi, u\rangle = 0$ $\forall \varphi \in C_0^2(\mathscr{H}_-)$, то $u = 0$. Пусть $\xi, \eta \in C_0^2(\mathscr{H}_-)$, $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$, $\xi = 1$ на B_R, $\eta(x) = 1$ на $\operatorname{supp}\xi$. Имеем, очевидно,

$$\langle(1 + \hat{H})\varphi, u\xi\rangle = \langle(1 + \hat{H}_\eta)\varphi, u\xi\rangle = \langle(1 + \hat{H}_\eta)\varphi\xi, u\rangle + \langle[\xi, \hat{H}]_-\varphi, u\rangle,$$

где

$$[\xi, \hat{H}]_-\varphi = [\nabla, (\nabla\xi)]_+\varphi + (\beta, \nabla\xi)_0\varphi = 2(\nabla\xi, \nabla\varphi)_0 + (\nabla\xi)\varphi + (\beta, \nabla\xi)_0\varphi.$$

Здесь $[A, B]_\pm \equiv AB \pm BA$, $\mathscr{D}([A, B]_\pm) = \mathscr{D}(AB) \cap \mathscr{D}(BA)$. Учитывая, что $\varphi\xi \in C_0^2(\mathscr{H}_-)$, имеем

$$\langle(1 + H_\eta)\varphi, u\xi\rangle = \langle[\xi, \hat{H}]_-\varphi, u\rangle. \tag{1}$$

Из неравенств

$$\|(\nabla\xi, \nabla\varphi)_0\|_2 \leqslant c_\xi \|\eta|\nabla\varphi|_0\|_2 \leqslant c_\xi\|H_\eta\varphi\|_2 \leqslant c_\xi\|H_\eta^{1/2}\varphi\|_2, \ \|(\nabla\xi, \beta)_0\varphi\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|(\nabla\xi, \beta)_0\|_\infty \|\varphi\|_2, \quad \|(\Delta\xi)\varphi\|_2 \leqslant c_\xi\|\varphi\|_2$$

и условия $H_\eta = [\hat{H}_\eta \upharpoonright C_0^2(\mathcal{H}_-)]^\sim$ с помощью (1) получим для $\forall\psi \in \mathcal{D}(H_\eta^{1/2})$

$$\langle (1+H_\eta)^{1/2}\psi, u\xi\rangle = 2\langle (\nabla\xi, \nabla(1+H_\eta)^{-1/2}\psi)_0 u\rangle + \langle (\Delta\xi + (\nabla\xi, \beta)_0) \times$$
$$\times (1+H_\eta)^{-1/2}\psi, u\rangle, \ |\langle (1+H_\eta)^{1/2}\psi, u\xi\rangle| \leqslant c_{\xi,u}\|\psi\|_2.$$

Из последнего неравенства по теореме Риса о представлении линейного непрерывного функционала в L^2 заключаем, что $u\xi \in \mathcal{D}(H)^{1/2}$. Теперь (1) можно переписать в виде

$$\langle \psi, u\xi\rangle + \langle H_\eta^{1/2}\varphi, H_\eta^{1/2}u\xi\rangle = \langle [\nabla, (\nabla\xi)]_+\varphi, u\rangle + \langle (\beta, \nabla\xi)_0\varphi, u\rangle$$

для произвольного φ из $\mathcal{D}(H_\eta^{1/2})$. Полагая $\varphi = u\xi$ и замечая с помощью несложных вычислений, что

$$\langle [\nabla, (\nabla\xi)]_+ u\xi, u\rangle + \langle (\beta, \nabla\xi)_0 u\xi, u\rangle = \|(\nabla\xi)u\|_2^2,$$

получаем $\|u\xi\|_2 \leqslant \|(\nabla\xi)u\|_2$. Выбирая последовательность $\{\xi_n\}$ так, чтобы $\lim\limits_n \xi_n = 1$, $\||\nabla\xi|_0\|_\infty \leqslant 1$, получаем искомое $u = 0$.

Замечание. Теорема 1 представляет собой глобальный условный признак. Приведенное доказательство является почти дословным повторением метода Вингольца в форме Симадера [7]. Те же аргументы ведут к аналогичному результату для операторов

$$\hat{H}_\eta(a) = -(\nabla+\beta)a\eta^2\nabla + V\eta, \quad \hat{H}(a) = -(\nabla+\beta)a\nabla + V,$$

где $\forall x \in \mathcal{H}_-$ $a(x)$ — линейный неотрицательный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_0$, если дополнительно к условиям теоремы 1 потребовать, что существует функция $U \in C_{b,\mathrm{loc}}^2(\mathcal{H}_-)$, обладающая свойствами 1) $U(x) \to \infty$ ($|x|_- \to \infty$); 2) $(a\nabla U, \nabla U)_0 \leqslant c_0$ для некоторой $c_0 > 0$; 3) $\forall\varepsilon > 0$ $\hat{H}\xi_\varepsilon \in L^\infty(\mathcal{H}_-, d\mu)$, где $\xi_\varepsilon(x) = \sigma(\varepsilon U(x))$ для некоторой $\sigma \in C_0^2(\mathbb{R}^1)$ такой, что $\sigma(0) = 0$, $0 \leqslant -\sigma' \leqslant 1$.

Следующая теорема представляет простейший безусловный локальный признак.

Теорема 2. *Пусть* $|\beta|_- \in L_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathcal{H}_-, d\mu)$, $0 \leqslant V \in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathcal{H}_-, d\mu)$ *и существует последовательность* $\{\beta^n\} \subset C_{b,\mathrm{loc}}^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$ *такая, что* $\sup\limits_n \|\eta|\beta - \beta^n|_0\|_\infty < \infty$ *и* $\lim\limits_n \|\eta|\beta - \beta^n|_0\|_2 = 0$ $\forall\eta \in C_0^2(\mathcal{H}_-)$. *Тогда оператор* $\hat{H}_\eta$ *в существенном самосопряжен на* $C_0^2(\mathcal{H}_-)$.

Замечание 1. Условию теоремы 2, очевидно, удовлетворяет $\beta = \alpha + \gamma$, $|\alpha|_0 \in L_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathcal{H}_-, d\mu)$, $\gamma \in C_{b,\mathrm{loc}}^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$. При $\alpha = 0$, $V = 0$ теорема 2 доказана в [3].

2. При $\alpha = 0$, $\gamma \in C_{b,\mathrm{loc}}^1(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$ результат теоремы 2 содержится в [6].

3. Результат теоремы 2 справедлив для оператора $\hat{H}_\eta(a)$, если дополнительно к условиям, сформулированным в замечании к теореме 1, потребовать $a^{1/2} \in C_{b,\mathrm{loc}}^3(\mathcal{H}_-, \mathcal{L}(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_+))$. Для доказательства теоремы 2 используем следующие известные факты. Пусть $X = C_b(\mathcal{H}_-)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathcal{H}_-}|f(x)|$. В X определим оператор $\mathcal{A}_n = [-(\nabla+\beta^n)\eta^2\nabla \upharpoonright C_b^2(\mathcal{H}_-)]_{X\to X}^\sim$, $\beta^n \in C_b^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$, $\eta \in C_b^2(\mathcal{H}_-)$. В [3] показано, что 1) $\mathcal{A}_n$ порождает C_0-полугруппу сжатий в X, сохраняющую положительность; 2) $e^{-t\mathcal{A}_n}C_b^2(\mathcal{H}_-) \subset C_b^2(\mathcal{H}_-)$ $\forall t \geqslant 0$. На основе свойств 1, 2 сформулируем лемму.

Лемма 1. *Пусть* $|\beta|_- \in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathcal{H}_-, d\mu)$ *и существует последовательность* $\{\beta^n\} \subset C_{b,\mathrm{loc}}^2(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$ *такая, что* $\eta|\beta - \beta^n|_0 \in L^2(\mathcal{H}_-, d\mu)$. *Поло-*

жим $u_n = e^{-t\mathscr{A}_n} f$, $f \in C_b^2(\mathscr{H}_-)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^t \| \eta | \nabla u_n |_0 \|_2^2 ds \leqslant \| f \|_\infty^2 (1 + t \| \eta | \beta - \beta^n |_0 \|_2^2) \tag{2}$$

и, если $g = u_n - u_k$, то

$$\| g \|_2^2 + \int_0^t \| \eta | \nabla g |_0 \|_2^2 ds \leqslant 2 \| f \|_\infty^2 (2t \| \eta | \beta^n - \beta |_0 \|_2^2 + t^{1/2} \| \eta | \beta^n - \beta^k |_0 \|_2 \sqrt{1 + t \| \eta | \beta^n - \beta |_0 \|_2^2}). \tag{3}$$

Доказательство. Умножая обе части уравнения $(d/dt + \mathscr{A}_n) u_n = 0$ скалярно на u_n, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_n \|_2^2 + \| \eta | \nabla u_n |_0 \|_2^2 = \langle (\eta (\beta^n - \beta), \eta \nabla u_n)_0, u_n \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \| u_n \|_\infty^2 \eta | \beta^n - \beta |_0 \|_2^2 + \frac{1}{2} \| \eta | \nabla u_n |_0 \|_2^2.$$

Интегрируя по t обе части неравенства

$$\| \eta | \nabla u_n |_0 \|_2^2 \leqslant - \frac{d}{dt} \| u_n \|_2^2 + \| f \|_\infty^2 | \eta | \beta^n - \beta |_0 \|_2^2,$$

получаем (2). Далее, очевидно, g удовлетворяет равенству $(d/dt + \mathscr{A}_n) g + (\eta (\beta^k - \beta^n), \eta \nabla u_k)_0 = 0$ (равенство в L^2), умножая которое скалярно на g, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| g \|_2^2 + \| \eta | \nabla g |_0 \|_2^2 = \langle (\eta (\beta^n - \beta), \eta \nabla g)_0 g \rangle + \langle (\eta (\beta^n - \beta^k),$$

$$\eta \nabla u_k)_0, g \rangle \leqslant \| g \|_\infty \| \eta | \beta^n - \beta |_0 \|_2 \| \eta | \nabla g |_0 \|_2 + \| g \|_\infty \| \eta | \beta^n - \beta^k |_0 \|_2 \| \eta | \nabla u_k |_0 \|_2.$$

Из последнего неравенства интегрированием по t с помощью (2) и неравенства $\| g \|_\infty \leqslant 2 \| f \|_\infty$ получаем (3).

Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $V = 0$, $B \geqslant -\gamma$ — произвольное полуограниченное самосопряженное расширение оператора $\hat{H}_\eta \restriction C_b^2(\mathscr{H}_-)$. Ввиду свойств 1, 2 оператора $\mathscr{A}_n$ для $f \in C_b^2(\mathscr{H}_-)$ справедливо равенство в L^2 (формула Дюамеля)

$$e^{-tB} f - e^{-t\mathscr{A}_n} f = \int_0^t e^{-(t-s)B} (\beta^n - \beta) \eta^2 \nabla e^{-s\mathscr{A}_n} f ds,$$

используя которое, имеем

$$\| e^{-tB} f - e^{-t\mathscr{A}_n} f \|_2 \leqslant e^{\gamma t} \int_0^t \| (\beta^n - \beta) \eta^2 \nabla u_n \|_2 ds \quad \forall f \in C_b^2(\mathscr{H}_-).$$

Пусть $\{\beta^n\}$ удовлетворяет условию теоремы. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пользуясь леммой 1, выбираем k из условия

$$\int_0^t \| \eta | \nabla u_n - \nabla u_k |_0 \|_2 ds < \frac{\varepsilon}{2 e^{\gamma t} \sup_n \| \eta | \beta^n - \beta |_0 \|_\infty}$$

при $\forall n > N_1$. Выберем теперь N_2 так, чтобы $\forall n > N_2$ $e^{\gamma t} \int_0^t \| (\beta^n - \beta) \times$

$\times \eta^2 \nabla u_k \|_2 \, ds < \varepsilon/2$. Тогда при $\forall n > \max\{N_1, N_2\} \, \| e^{-tB} f - e^{-t\mathcal{A}_n} f \|_2 < \varepsilon$. Отсюда ввиду произвольности в выборе B следует, что $\hat{H}_\eta \upharpoonright C_b^2(\mathcal{H}_-)$ имеет единственное полуограниченное самосопряженное расширение, что эквивалентно существенной самосопряженности [8, с. 205].

Заметим, что $(\hat{H}_\eta \upharpoonright C_0^2(\mathcal{H}_-))^{\sim} = (\hat{H}_\eta \upharpoonright C_b^2(\mathcal{H}_-))^{\sim}$ в силу очевидно равенства $\hat{H}_\eta(\eta_1\varphi) = \hat{H}_\eta \varphi \; \forall \varphi \in C_b^2(\mathcal{H}_-)$ и $\forall \eta_1 \in C_0^2(\mathcal{H}_-)$ при $\eta_1(x) = 1$ на $\operatorname{supp} \eta$.

Чтобы завершить доказательство для $V \neq 0$, укажем, что множество $\bigcup_{n \geq 1} e^{-\mathcal{A}_\eta/n} C_b^2(\mathcal{H}_-)$ является ядром форм-суммы $A_\eta \dot{+} V_\eta$ в силу

$$\bigcup_{n \geq 1} e^{-\mathcal{A}_\eta/n} C_b^2(\mathcal{H}_-) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\eta) \cap L^\infty \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\eta) \cap \mathcal{D}(V),$$

где $\mathcal{A}_\eta = [-(\nabla + \beta) \eta^2 \nabla \upharpoonright C_b^2(\mathcal{H}_-)]^{\sim}$.

З а м е ч а н и е. Результаты теорем 1 и 2, как видно из доказательств справедливы и для случая $\mathcal{H}_+ \equiv \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H}_- \equiv \mathbb{R}^d$. В частности, безусловный признак, получающийся объединением теорем 1, 2, содержит в себе результат работы [9].

Предположения теоремы 2 можно ослабить. Справедлива, например, следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $|\beta|_- \in L^\infty(\mathcal{H}_-, d\mu)$ *и существует последовательность* $\{\beta^n\} \subset C_b^1(\mathcal{H}_-)$ *такая, что* $\sup_n \| |\beta^n - \beta|_0 \|_\infty < \infty$ *и* $\lim_n \| |\beta^n - \beta|_0 \|_2 = 0$. *Тогда оператор* $-(\nabla + \beta) \nabla \upharpoonright C_0^2(\mathcal{H}_-)$ *самосопряжен в существенном.*

Для доказательства используем лемму, доказанную в [6].

Л е м м а 2. *Пусть* $\beta^n \in C_b^3(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$, $\mathcal{A}_n = [-(\nabla + \beta^n) \nabla \upharpoonright C_b^2(\mathcal{H}_-)]^{\sim}_{X \to X}$, $u_n = e^{-t\mathcal{A}_n} f$, $f \in C_b^3(\mathcal{H}_-)$, $t \geq 0$. *Тогда* $\| |\nabla u_n|_+ \|_\infty \leq \| |\nabla f|_+ \|_\infty e^{\Lambda}$,

$$\Lambda = \sup_{x \in \mathcal{H}_-} \| (\beta^n)' \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть $\{\beta^n\}$ удовлетворяет условию теоремы. При каждом фиксированном n нетрудно указать последовательность $\{\beta^{n,m}\} \subset C_b^3(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$ такую, что $\| |\beta^n - \beta^{n,m}|_- \|_2 \to 0$, $m \to \infty$, $\| (\beta^{n,m})' \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)} \leq \varkappa$, $\varkappa \neq \varkappa(m)$. Положим $u_{n,m} = e^{-t\mathcal{A}_{n,m}} f$, $f \in C_b^{(3)}(\mathcal{H}_-)$, $\mathcal{A}_{n,m} = [-(\nabla + \beta^{n,m}) \nabla \upharpoonright C_b^2(\mathcal{H}_-)]_{X \to X}$. Умножая обе части уравнения $(d/dt + \mathcal{A}_{n,m}) u_{n,m} = 0$ скалярно на $u_{n,m}$, имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_{n,m} \|_2^2 + \| |\nabla u_{n,m}|_0 \|_2^2 = \langle ((\beta^{n,m} - \beta), \nabla u_{n,m})_0, u_{n,m} \rangle =$$

$$= \langle ((\beta^{n,m} - \beta^n), \nabla u_{n,m})_0, u_{n,m} \rangle + \langle ((\beta^n - \beta), \nabla u_{n,m})_0, u_{n,m} \rangle \leq \| |\beta^{n,m} -$$

$$- \beta^n|_- \|_2 \| |\nabla u_{n,m}|_+ \|_\infty \| u_{n,m} \|_\infty + \frac{1}{2} \| |\nabla u_{n,m}|_0 \|_2^2 + \frac{1}{2} \| |\beta^n -$$

$$- \beta|_0 \|_2^2 \| u_{n,m} \|_\infty^2.$$

Интегрируя по t и переходя к пределу по m, получаем на основании леммы 2

$$\overline{\lim_{m}} \int_0^t \| |\nabla u_{n,m}|_0 \|_2^2 ds \leq \| f \|_\infty^2 (1 + t \| |\beta^n - \beta|_0 \|_2^2). \tag{5}$$

Аналогично, для $g_m = u_{n,m} - u_{k,m}$ будем иметь

$$\overline{\lim_m}\left(\|g_m\|_2^2 + \int_0^t \||\nabla g_m|_0\|_2^2 ds\right) \leqslant 2\|f\|_\infty^2 (2t\||\beta^n - \beta|_0\|_2^2 +$$

$$+ t^{1/2}\||\beta^n - \beta^k|_0\|_2 \sqrt{1 + t\||\beta^n - \beta|_0\|_2^2}. \tag{6}$$

Пусть $B \geqslant -\gamma$ — произвольное полуограниченное самосопряженное расширение оператора $-(\nabla + \beta)\nabla \restriction C_b^2(\mathcal{H}_-)$. Тогда

$$\|e^{-tB}f - e^{-t\mathcal{A}_{n,m}}f\|_2 \leqslant e^{\gamma t}\int_0^t \|(\beta^{n,m} - \beta)\nabla e^{-s\mathcal{A}_{n,m}}f\|_2 ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{\gamma t}\int_0^t \|(\beta^{n,m} - \beta^n)\nabla u_{n,m}(s)\|_2 ds + e^{\gamma t}\int_0^t \|(\beta^n - \beta)\nabla u_{n,m}(s)\|_2 ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{\gamma t}\||\beta^{n,m} - \beta^n|_-\|_2 \int_0^t \||\nabla u_{n,m}|_+\|_\infty ds + e^{\gamma t}\int_0^t \|(\beta^n - \beta)\nabla g_m\|_2 ds +$$

$$+ e^{\gamma t}\int_0^t \|(\beta^n - \beta)\nabla u_{k,m}\|_2 ds.$$

Остается повторить рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2, использую оценки (5), (6). Теорема доказана.

Замечание. Условию теоремы 3, очевидно, удовлетворяет $\beta = \alpha + \gamma$, $|\alpha|_0 \in L^\infty(\mathcal{H}_-, d\mu)$, $\gamma \in C_b^1(\mathcal{H}_-, \mathcal{H}_-)$.

1. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев : Наук. думка, 1988.— 680 с.
2. *Albeverio S., Hoegh-Krohn R.* Dirichlet forms and diffusion processes on rigged Hielbert spaces // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1977.— 40, N 1.— P. 1—57.
3. *Далецкий Ю. Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения // Успехи мат. наук.— 1967.— 22, № 4.— С. 3—54.
4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 384 с.
5. *Кондратьев Ю. Г.* Операторы Дирихле и гладкость решений бесконечномерных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.— 1985.— 282, № 2.— С. 269—273.
6. *Кондратьев Ю. Г., Цикаленко Т. В.* Операторы Дирихле и связанные с ними дифференциальные уравнения.— Киев : 1986.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.37).
7. *Simader C.* Essential self-adjointness of Schrödinger operators bounded from below // Math. Z.— 1978.— 159, N 1.— P. 47—50.
8. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 2-х т.— М. : Мир, 1978.— Т. 2.— 400 с.
9. *Wielens N.* The essential self-adjointness of generalized Schrodinger operators // J. Funct. Anal.— 1985.— 65, N 1.— P. 98—115.

Киев, политехн. ин-т

Получено 01.04.88