УДК 517.9

Е. П. Трофимчук, С. И. Трофимчук

Импульсные системы с фиксированными моментами толчков общего расположения: существование, единственность решения и корректность задачи Коши

Изучаются системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, когда последовательность моментов «толчков» может иметь конечные предельные точки. Для таких систем получены теоремы существования и единственности решения, а также корректности задачи Коши.

Вивчаються системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією в фіксовані моменти часу, коли послідовність моментів «поштовхів» може мати скінченні граничні точки. Для цих систем доведені теореми існування точності розв'язку, а також коректності задачі Коші.

1. В настоящей статье изучаются импульсные системы [1]

$$dx/dt = f(t, x), \quad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t_i} = h_i(x), \quad i \in N, \quad \Delta x|_{t_i} \overset{\text{def}}{=} x(t_i + 0) - x(t_i), \tag{2}$$

когда на последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *a priori* не наложено никаких ограничений (обычно полагалось $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$). Такие общие системы вполне «физичны» (см., например, [2]), но мало исследованы (см. [3, 4], где рассмотрены вопросы существования и единственности решения для уравнений, аналогичных системе (1), (2)). Отметим, что условия теорем и методика их доказательств прямо связаны с теорией, изложенной в [1].

2. Всюду ниже, если не оговорено, полагаем выполнение следующих условий: $x \in \Omega$ (Ω область в R^n), $t \in [a, b]$ и (для упрощения) $a \notin \{t_i\}$, $i \in N$; функции $h_i(x)$ непрерывны и ограничены в Ω и для некоторого σ: $a < \sigma \leqslant b$ ряд $\sum\limits_{a<t_i\leqslant\sigma} \sup\|h_i(x)\|$ сходится; если $t \neq t_i\ \forall i$, то а) функция $f(t, x)$ непрерывна в точке (t, x); б) ряд $\sum\limits_{t_i:|t_i-t|<\varepsilon} \sup_\Omega \|h_i(x)\| = o(\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ лежит в малой окрестности 0; $\|f(t, x)\| \leqslant m(t)$, где функция $m(t)$ суммируема.

Определение. *Непрерывная слева функция* $x(t): [a, \sigma) \to \Omega$ *называется решением задачи Коши*

$$x(a) = x_0 \tag{3}$$

для (1), (2), *если* $x(t)$ *удовлетворяет соотношениям* (1) — (3).

3. Лемма 1. *Если* $s(t) \in C[0, 1]$, $s'(t) = 0\quad \forall t \in [0, 1] \setminus \{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *то* $s(t) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $s(t)$ для каждой точки t_k можно найти такую окрестность $U_k = (t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$, что длина интервала $s(U_k)$ будет меньше $\varepsilon/2^{k+1}$. Открытое множество $U = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} U_k$ содержит в себе множество $\{t_k,\ k \in N\}$. Множество $s(U) = s\left(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} U_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} s(U_k)$ измеримо и $\mathrm{mes}\,(s(U)) \leqslant \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{mes}\, s(U_k) \leqslant \varepsilon/2$. Множество $K = [0, 1] \setminus U$ содержит лишь те точки [0, 1], в которых производная $s'(t)$ существует и равна 0. Поэтому для любой из точек $t^* \in K$ можно найти такой открытый интервал $\mathcal{V}(t^*) \ni t^*$, что

$$|s(t^*) - s(t)| < (\varepsilon/8)\,|t - t^*|, \tag{4}$$

если $t \in \mathcal{V}(t^*)$. Система окрестностей $\{\mathcal{V}(t^*),\ t^* \in K\}$ покрывает K и в силу компактности K из нее можно выделить конечную покрывающую подсистему $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_p, \mathcal{V}_i \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{V}(t^{(i)})$. Будем считать, что выделенная подсистема минимальна, т. е. после удаления из нее хотя бы одного интервала она уже не будет покрывать K; нетрудно показать, что для минимальной подсистемы $\mathrm{mes}\,\mathcal{V}_1 + \ldots + \mathrm{mes}\,\mathcal{V}_p < 2$. В силу (4) $\mathrm{mes}\, s(\mathcal{V}(t^*)) \leqslant \leqslant (\varepsilon/4)\,\mathrm{mes}\,\mathcal{V}(t^*)$, поэтому $\mathrm{mes}\, s(K) \leqslant \mathrm{mes}\, s\left(\bigcup\limits_{i=1}^{p} \mathcal{V}_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{mes}\, s(\mathcal{V}_i) \leqslant \leqslant (\varepsilon/4) \sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{mes}\,\mathcal{V}_i \leqslant \varepsilon/2$. Итак, $\mathrm{mes}\, s([0, 1]) = \mathrm{mes}\,(s(U) \cup s(K)) \leqslant \mathrm{mes}\, s(U) + + \mathrm{mes}\, s(K) \leqslant \varepsilon$. Благодаря произвольности выбора ε $\mathrm{mes}\, s[0, 1] = 0$, и поэтому, так как $s(t) \in C[0, 1]$, $s(t) = \mathrm{const}$.

4. Пусть $x(t)$ — решение задачи (1) — (3). Функция $x(t)$ дифференцируема в точках $t \neq t_i$, $i \in N$, а в точке t_i, где она непрерывна слева, имеет конечный скачок ξ_i, причем ряд $\sum\limits_{a<t_i\leqslant\sigma} \xi_i$ абсолютно сходится. Рас-

смотрим функцию скачков $s(t):[a,\sigma)\to\Omega$, $s(t)=\sum\limits_{a<t_i<t}\xi_i$. Так как $\|s(t)-$ $-s(t-\Delta t)\|\leqslant\sum\limits_{t-\Delta t\leqslant t_i<t}\|\xi_i\|\to 0$ при $\Delta t\to 0$, $\Delta t\geqslant 0$, то функция $s(t)$ непрерывна слева. Если к тому же $t\neq t_i$ $\forall i\in N$, то в силу условия 2б) $\|s(t)-s(t\pm\varepsilon)\|\leqslant\sum\limits_{t_i:|t_i-t|\leqslant\varepsilon}\|\xi_i\|=o(\varepsilon)$ и поэтому существует производная $s'(t)$, равная 0. Так как $s(t_i+0)-s(t_i)=\sum\limits_{a<t_j\leqslant t_i}\xi_j-\sum\limits_{a<t_j<t_i}\xi_j=\xi_i$, то функция $l(t)=x(t)-s(t)$ непрерывна (действительно $l(t_i+0)-l(t_i)=$ $=x(t_i+0)-s(t_i+0)-(x(t_i)-s(t_i))=0$). Кроме того, если $t\neq t_i$ $\forall i$, то существует производная $l'(t)$, равная $f(t,x(t))\overset{\text{def}}{=}q(t)$. Функция $q(t)$ непрерывна в любой точке $t\neq t_i$, ограничена по норме суммируемой функцией $m(t)$, а поэтому суммируема на $[a,\sigma)$. Следовательно, можно определить новую функцию $r(t)=l(t)-\int\limits_a^t q(u)\,du$; $r(t)$ непрерывна на $[a,\sigma)$ и $r'(t)=0$, если $t\neq t_i$, $i\in N$. Согласно лемме 1 $l(t)-\int\limits_a^t q(u)\,du=$ $=r(t)\equiv r(a)=l(a)$ $\forall t$. Так как $l(t)=x(t)-s(t)$, $\xi_i=h_i(x(t_i))$, то для функции $x(t)$ получено интегральное уравнение

$$x(t)=x_0+\int\limits_a^t f(u,x(u))\,du+\sum_{a<t_i<t}h_i(x(t_i)). \tag{5}$$

Используя условия п. 2, несложно доказать, что любое решение интегрального уравнения (5) будет решением задачи (1)—(3). Итак, для системы (1)—(3) при условиях п. 2 получили эквивалентное ей интегральное уравнение (5).

5. Если точка a не является предельной для последовательности $\{t_i\}$, то локальное существование и единственность решения задачи (1)—(3) эквивалентно локальному существованию и единственности решения задачи (1), (3). Предположим теперь, что a — предельная точка множества $\{t_i\}$.

Теорема. *При выполнении условий п. 2 решение задачи Коши существует.*

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x_m(t)=x_0+\int\limits_a^t f(u,x_m(u))\,du+\sum_{\substack{a<t_i<t\\ i\leqslant m}}h_i(x_m(t_i)). \tag{6}$$

В силу изложенного выше оно эквивалентно импульсной системе

$$dx/dt=f(t,x),\ t\neq t_i,\ i=\overline{1,m};\ \ \Delta x|_{t_i}=h_i(x),\ i=\overline{1,m}, \tag{7}$$

с конечным числом моментов импульсного воздействия и начальным условием (3). Известно [1], что при сделанных в п. 2 допущениях задача Коши (3) для системы (7) имеет, по крайней мере, одно кусочнонепрерывное решение $x_m(t)$. При достаточно малом значении числа $t-a>0$ $\forall m$ значение $x_m(t)$ лежит в области $\Omega:\|x_m(t)-x_0\|\leqslant M$, $t\in[a,a+\mu)$. Кроме того, функция $x_m(t)$ имеет вариацию на $[a,a+\mu)$, ограниченную величиной $\int\limits_a^{a+\mu}m(u)\,du+\sum\limits_{a<t_i<a+\mu}\sup\|h_i(x)\|$, не зависящей от номера m.

Итак, для последовательности функций $x_m(t)$ выполнены все условия теоремы Хелли [5, с. 290], следовательно, можно выбрать подпоследовательность функций $x_{m_k}(t)$, сходящуюся в каждой точке промежутка $[a,$ $a+\mu)$ к некоторой функции $x^*(t)$, $x^*(t)$ суммируема в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Так как при условиях п. 2 легко показывается, что

$$\sum_{a<t_i<t,\, i\leqslant m_k} h_i(x_{m_k}(t_i)) \to \sum_{a<t_i<t} h_i(x^*(t_i)),$$

то в (6), используя теорему Лебега, можно перейти к пределу при $m_k \to +\infty$. В итоге получаем, что функция $x^*(t)$ является решением уравнения (5), а значит, и системы (1)—(3).

6. Можно предположить, что для единственности решения задачи (1)—(3) достаточна липшицевость функции $f(t, x)$ и липшицевость функций $h_i(x)$ с некоторой константой, не зависящей от i. Однако следующий пример показывает, что это предположение не верно.

Пример 3. Пусть монотонно убывающие последовательности положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ и $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ таковы, что $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (c_n \diagdown t_n) = 0$ и $(c_{n-1} \diagdown c_n) \mid \leqslant P$. Рассмотрим импульсную систему

$$\begin{cases} dx/dt = 0, \\ \Delta x|_{t_i} = h_i(x), \end{cases} \quad h_n(x) = \begin{cases} ((c_{n-1} - c_n)\diagdown c_n)\, x, & x \leqslant c_n, \\ c_{n-1} - c_n, & x \geqslant c_n, \end{cases} \tag{8}$$

заданную в области $R_0^+ \times R_0^+$. Так как в этой области $\| h_n(x) \| \leqslant c_{n-1} - c_n$, то $\sum\limits_n \sup_\Omega \| h_n(x) \| \leqslant c_0$ и $\sum\limits_{0<t_i\leqslant t_{j-1}<\varepsilon<t_j} \sup_\Omega \| h_i(x) \| = c_{j-1} = o(\varepsilon)$, т. е. условия п. 2 выполнены. Кроме того, $h_n(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $l_n = c_{n-1} \diagdown c_n - 1 \leqslant P + 1$. В то же время задача Коши $x(0) = 0$ для системы (8) имеет по крайней мере, два различных решения $x(t) \equiv 0$ и $x(t) = c_{n-1}$, $t_n < t \leqslant t_{n-1}$. Докажем, что при указанных предположениях ряд $\sum\limits_i l_i$ расходится. Допустим от противного, что $\sum\limits_i l_i < +\infty$. Тогда, так как $c_n = c_{n+1}(l_{n+1} + 1)$, то $c_n = c_0 \diagdown \prod\limits_{i=1}^{n} (l_i + 1)$. Сходимость произведения $\prod\limits_{i=1}^{+\infty} (l_i + 1)$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} l_i$, поэтому $\prod\limits_{i=1}^{n} (l_i + 1) \to d \in R \diagdown \{0\}$ и $c_n \to c_0 \diagdown d \neq 0$, что противоречит условию $c_n \to 0$, $n \to +\infty$.

Оказывается, что сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} l_i$ будет для приведенного примера необходимым и достаточным условием существования единственного решения задачи Коши $x(0) = 0$. Это утверждение следует из доказанной ниже теоремы 5.

7. Докажем утверждение, обобщающее лемму Гроноулла—Беллмана [1, с. 16].

Лемма 4. *Если неотрицательная суммируемая функция $u(t)$: $[0, T] \to R$ удовлетворяет неравенству*

$$u(t) \leqslant \alpha + \beta \int_0^t u(s)\, ds + \sum_{0\leqslant t_i<t} \gamma_i u(t_i), \tag{9}$$

где константы α, β, γ_i, $i \in N$, неотрицательны, $\sum\limits_{0\leqslant t_i\leqslant T} \gamma_i < +\infty$, $t \in [0, T]$, *то*

$$u(t) \leqslant \alpha \prod_{0\leqslant t_i<t} (1 + \gamma_i) \exp(\beta t), \quad t \in [0, T].$$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \gamma_i u(t_i)$ сходится и $\sigma_N = \sum\limits_{i\geqslant N} \gamma_i u(t_i) \to 0$

при $N \to +\infty$. Из (9) следует оценка

$$u(t) \leqslant (\alpha + c_N) + \beta \int_0^t u(s)\,ds + \sum_{0 \leqslant t_i < t,\, i < N} \gamma_i u(t_i) \overset{\text{def}}{=} v(t). \qquad (10)$$

С другой стороны, в силу (10) функция $v(t)$ удовлетворяет аналогичному неравенству $v(t) \leqslant (\alpha + c_N) + \beta \int_0^t v(s)\,ds + \sum_{0 \leqslant t_i < t,\, i < N} \gamma_i v(t_i)$. Так как функция $v(t)$ неотрицательна, кусочно-непрерывна, то, согласно лемме 2.1 из [1], следует справедливость оценки

$$v(t) \leqslant (\alpha + c_N) \prod_{0 \leqslant t_i < t,\, i < N} (1 + \gamma_i) \exp(\beta t). \qquad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) получаем оценку

$$u(t) \leqslant (\alpha + c_N) \prod_{0 \leqslant t_i < t,\, i < N} (1 + \gamma_i) \exp(\beta t). \qquad (12)$$

Переходя в (12) к пределу при $N \to +\infty$, завершаем доказательство леммы 4.

Теорема 5. *Если дополнительно к условиям п. 2 предположить, что а) функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $x: |f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L|x - y|$, $x, y \in \Omega$, $t \in [a, \sigma)$; б) функции $h_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица $|h_i(x) - h_i(y)| \leqslant l_i |x - y|$ и ряд $\sum_{a < t_i \leqslant \sigma} l_i$ сходится, то решение задачи* (1) — (4) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют два различающихся в некоторой малой окрестности точки $a: [a, a + \mu)$ решения $x(t)$ и $y(t)$. Поскольку оба они удовлетворяют интегральному уравнению (5), то условия теоремы 5 гарантируют выполнение неравенства

$$\| x(t) - y(t) \| \leqslant L \int_a^t \| x(s) - y(s) \|\,ds + \sum_{a < t_i < t} l_i \| x(t_i) - y(t_i) \|. \qquad (13)$$

Применяя к (13) лемму 4, получаем $x(t) \equiv y(t)$.

8. На практике элементы $f(t, x)$, $h_i(x)$, t_i, определяющие импульсную систему (1)—(3), можно указать только с некоторой степенью точности. Кроме того, индекс i пробегает лишь конечное подмножество N. Поэтому часто вместо интегрирования точной системы (1)—(3) необходимо найти решение $x^{(n)}(t)$ приближенной системы

$$dx/dt = f^{(n)}(t, x), \quad t \neq t_i^{(n)}, \qquad (14)$$

$$\Delta x |_{t_i^{(n)}} = h_i^{(n)}(x), \quad i \in \mathcal{A}(n) \subset N, \qquad (15)$$

$$x(a) = x_0^{(n)}, \quad t \in [a, \sigma]. \qquad (16)$$

Корректность задачи (1)—(3) означает, во-первых, что эта задача имеет решение и оно единственно, и, во-вторых, что отображение, сопоставляющее системе (1)—(3) ее единственное решение $x(t)$, непрерывно при выборе подходящих топологий в пространстве правых частей системы (1)—(3) и в пространстве решений этих систем. Оказывается, что при определенных условиях задача (1)—(3) корректна. Так, зададим сходимость (топологию) в пространстве правых частей (1)—(3) таким образом: последовательность систем (14)—(16) сходится к системе (1)—(3), если выполнены следующие условия:

а$_1$) $x_0^{(n)} \to x_0$, $n \to +\infty$;

а$_2$) $\sum_{a < t_i \leqslant \sigma} \sup_\Omega \| h_i^{(n)}(x) - h_i(x) \| \to 0$, $n \to \infty$; $h_i^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} 0$, если $i \in N \setminus \mathcal{A}(n)$;

a$_3$) $\int\limits_a^t f^{(n)}(t, x)\,dt \to \int\limits_a^t f(t, x)\,dt \quad \forall x, n \to \infty$, равномерно по $t \in [a, \sigma]$;

a$_4$) $t_i^{(n)} \to t_i$ равномерно по $i \in \mathcal{A}(n)$ (т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N : \forall n \geqslant n_0$ $|t_i^{(n)} - t_i| < \varepsilon$ при $i \in \mathcal{A}(n)$).

Расстояние $\rho(x(t), y(t))$ между двумя решениями $x(t)$ и $y(t)$ на сегменте $[a, \sigma]$ импульсных систем вида (14)—(16) определим как расстояние Хаусдорфа между замыканиями их графиков, лежащих в множестве $[a, \sigma] \times \Omega$.

Теорема 6. *Пусть для каждой из систем* (14)—(16) *равномерно по* $n \in N$ *выполнены условия теоремы* 5 *и условия* a_1—a_4. *Если на промежутке* $[a, \sigma]$ *существует решение* $x(t)$ *задачи* (1)—(3), *то при достаточно больших значениях* n *решение* $x^{(n)}(t)$ *задачи* (14)—(16) *существует на* $[a, \sigma]$ *и* $x^{(n)}(t) \to x(t)$ *в указанной выше метрике* ρ.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ настолько малое, что решение $x(t)$ вместе со своей 4ε-окрестностью лежит в Ω. Условие a_2 теоремы гарантирует существование $n_0 \in N$ и $m_0 \in N$ таких, что при $m \geqslant m_0$ $\sum\limits_{i \geqslant m} \sup_\Omega \| h_i^{(n)}(x) \| < \varepsilon/r$ равномерно по $n \geqslant n_0$, где $r = \exp(L(\sigma - a)) \times \prod\limits_{i \geqslant 1}(1 + l_i)$. Рассмотрим решение $x_m(t)$ интегрального уравнения ($m \geqslant m_0$)

$$x_m(t) = x_0 + \int\limits_a^t f(t, x_m(t))\,dt + \sum_{a < t_i < t,\, i \leqslant m} h_i(x_m(t_i)). \tag{17}$$

Как известно (теорема 2), оно существует при достаточно малых $t - a > 0$ и при этих значениях t в силу леммы 4 справедливо соотношение

$$\| x_m(t) - x(t) \| \leqslant \sum_{i \geqslant m} \sup_\Omega \| h_i(x) \| \prod_{a < t_i < t} (1 + l_i) \exp(L(t - a)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \geqslant m} \sup_\Omega \| h_i(x) \| \prod_{i \geqslant 1} (1 + l_i) \exp(L(\sigma - a)) \leqslant \varepsilon. \tag{18}$$

Неравенства (18) гарантируют возможность продолжения решения $x_m(t)$ на $[a, \sigma]$. Действительно, пусть максимальный интервал I существования решения $x_m(t)$, на котором еще $\| x_m(t) - x(t) \| \leqslant \varepsilon$ будет $[a, \mu)$, $\mu \leqslant \sigma$. Ввиду непрерывности $x(t)$ и $x_m(t)$ слева можно полагать, что $I = [a, \mu]$. При этом в силу (18)

$$\| x_m(\mu) - x(\mu) \| \leqslant \sum_{i \geqslant m} \sup_\Omega \| h_i(x) \| \prod_{\substack{a < t_i < \mu \\ i \leqslant m}} (1 + l_i) \exp(L(\mu - a)) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \Big[\exp(L(\sigma - a)) \prod_{i \geqslant 1} (1 + l_i)\Big]^{-1} \exp(L(\mu - a)) \prod_{\substack{a < t_i < m \\ i \leqslant m}} (1 + l_i) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \Big[\prod_{t_i \geqslant \mu} (1 + l_i)\Big]^{-1}.$$

Поэтому, если $\mu \in \{t_i,\ i \leqslant m\}$, то $x_m(\mu)$ вместе со своей ε-окрестностью лежит в Ω и интегральное уравнение

$$x_m(t) = x_m(\mu) + \int\limits_\mu^t f(t, x_m(t))\,dt + \sum_{\mu < t_i < t,\, i \leqslant m} h_i(x_m(t_i)) \tag{19}$$

согласно теореме 2 имеет решение, определенное при достаточно малых $t - \mu > 0$. Если же $\mu = t_k$ при некотором $k \leqslant m$, то $\| x_m(\mu) + h_k(x_m(\mu)) -$

$-(x(\mu)+h_k(x(\mu)))\| \leqslant (1+l_k)\| x_m(\mu)-x(\mu)\| \leqslant \varepsilon$. Точка $x_m(\mu)+h_k(x_m(\mu))$ вместе со своей ε-окрестностью также лежит в Ω и поэтому уравнение

$$x_m(t) = x_m(\mu) + h_k(x_m(\mu)) + \int_{\mu}^{t} f(t, x_m(t))\,dt + \sum_{\mu<t_i<t,\, i\leqslant m} h_i(x_m(t_i)) \qquad (20)$$

в силу теоремы 2 имеет решение, определенное при малых $t-\mu>0$. Учитывая, что уравнения (19) или (20) в развернутой записи (если вместо $x_m(\mu)$ подставить равную ему правую часть уравнения (17) при $t=\mu$) совпадают с (17), получаем, что при $t\in[a,\lambda)$, $\lambda>\mu$, уравнение (17) имеет решение $x_m(t)$, причем в силу (18) $\| x_m(t)-x(t)\| < \varepsilon$. Это показывает, что $\mu=\sigma$.

Итак, при $m \geqslant m_0$ решение $x_m(t)$ импульсной системы

$$\begin{gathered} dx/dt = f(t, x),\ t\neq t_i, \qquad i=\overline{1,m}, \\ \Delta x|_{t_i} = h_i(x), \qquad i=\overline{1,m}, \\ x(a)=x_0, \qquad t\in[a,\sigma], \end{gathered} \qquad (21)$$

существует и $\| x_m(t)-x(t)\| \leqslant \varepsilon$. Таким образом,

$$\rho(x_m(t),\ x(t)) \leqslant \varepsilon. \qquad (22)$$

Рассмотрим теперь импульсную систему

$$\begin{gathered} dx/dt = f^{(n)}(t,x),\ t\neq t_i^{(n)},\ i\in\{1,2,\ldots,m\}\cap\mathcal{A}(n) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}(n); \\ \Delta x|_{t_i^{(n)}} = h_i^{(n)}(x), \qquad i\in\mathcal{B}(n); \\ x(a) = x_0^{(n)}. \end{gathered} \qquad (23)$$

Очевидно, при n настолько больших, что $\sum_{i=1}^{+\infty} \sup_\Omega \| h_i^{(n)}(x) - h_i(x)\| < \min_{i\leqslant m} \sup_\Omega \| h_i(x)\|$, $\mathcal{A}(n)\supset\{1,2,3,\ldots,m\}$ и $\mathcal{B}(n)=\{1,2,\ldots,m\}$. Докажем, что $\rho(x_m^{(n)}(t),\ x_m(t))\to 0$. В силу конечности числа моментов импульсного воздействия m и условия a_4, не умаляя общности, можно положить $m=1$ и для определенности считать $t_1^{(n)}<t_1\ \forall n$. Так как $x_m^{(p)}(t_1^{(n)})\to x_m(t_1^{(n)})$ при $p\to+\infty$ равномерно по n в силу условий a_1, a_3 (см. [6], теорему 7, § 1, из которой взято условие a_3), а $x_m(t_1^{(n)})\to x_m(t_1)$, то $h_1^{(n)}(x_m^{(n)}(t_1^{(n)}))\to h_1(x_m(t_1))$, $n\to\infty$. Это означает, что на множестве $T=[a,t_1^{(n)}]\cup[t_1,\sigma]$ решения $x_m^{(n)}(t)$ и $x_m(t)$ близки в метрике равномерной сходимости при достаточно больших n. Пусть, например, $\| x_m^{(n)}(t)-x_m(t)\| < \varepsilon/4$, $t\in T$, при $n\geqslant n_1$. Если к тому же выбрать величину $|t_1^{(n)}-t_1|<\varepsilon/4$ настолько малой, что $\int_{t_1^{(n)}}^{t_1} m(u)\,du \leqslant \varepsilon/4$, $n\geqslant n_1$ то нетрудно показать

$$\rho(x_m^{(n)}(t),\ x_m(t)) \leqslant \varepsilon. \qquad (24)$$

В силу (24) при $n\geqslant n_1$ решение $x_m^{(n)}(t)$ системы (23) существует на $[a,\sigma]$ и лежит в Ω вместе со своей 2ε-окрестностью. Поскольку

$$\| x_m^{(n)}(t) - x^{(n)}(t)\| \leqslant \sum_{i\geqslant m} \sup_\Omega \| h_i^{(n)}(x)\| \prod_{i\geqslant 1}(1+l_i)\exp(L(\sigma-a)) < \varepsilon, \qquad (25)$$

то рассуждения, полностью повторяющие начало доказательства теоремы, показывают, что решение $x^{(n)}(t)$ системы (14) — (16) существуют на $[a,\sigma]$ и $x^{(n)}(t)\in\Omega$, $t\in[a,\sigma]$. Учитывая неравенства (22), (24), (25) получаем окончательную оценку $\rho(x(t),\ x^{(n)}(t)) \leqslant 3\varepsilon\ \forall n\geqslant n_1$, которая завершает доказательство теоремы.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
2. *Нагаев Р. Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями.— М. : Наука, 1985.— 200 с.
3. *Das P. C., Sharma R. R.* Existence and stability of medsure differential equations // Czech. Math. J.— 1972.— **22**, N 97.— P. 145—158.
4. *Курцвейль Я.* Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями // Прикл. математика и механика.— 1958.— **22**, № 1.— С. 27—45.
5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс.— М. : Физматгиз, 1960.— 388 с.
6. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М. : Наука, 1985.— 224 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.03.88