УДК 517.938

В. А. Плисс

О некоторых свойствах гладких коциклов над потоками с инвариантной эргодической мерой

В. М. Миллионщиков [1] и В. И. Оселедец [2] исследовали поведение коциклов над потоками с инвариантной мерой. Они показали, что такие коциклы правильны почти везде, а в эргодическом случае характеристические показатели сохраняют также почти везде постоянное значение. Впоследствии в работах [3, 4, 5] были даны другие доказательства теорем Миллионщикова и Оселедеца. Р. А. Джонсон, К. Дж. Палмер и Д. Р. Селл [6] опубликовали обзор результатов по указанной тематике, при этом им удалось упростить, а в некоторых местах и уточнить отдельные результаты предыдущих авторов.

В настоящей статье показано, что существует замкнутое множество с мерой, близкой к единице, на котором характеристические показатели коцикла «достигаются» равномерно, что влечет за собой свойство гиперболичности коцикла на конечных интервалах. При доказательстве этого факта существенно используются идеи и методы работ [1, 2, 6].

1. Пусть $\varphi(p, t)$ — поток, определенный на компактном метрическом пространстве M, т. е. $\varphi(p, t)$ есть отображение $M \times R$, где R — действительная ось, на M, непрерывное и удовлетворяющее условиям $\varphi(p, 0) = p \in M$ и

$$\varphi(p, t+s) = \varphi(\varphi(p, s), t). \tag{1}$$

Будем предполагать, что на M задана нормированная, инвариантная эргодическая мера μ, т. е. мера μ такова, что $\mu M = 1$; если M_1 — измеримое подмножество M, то $\mu\varphi(M_1, t) = \mu M_1$ при всех t, и если M_2 — измеримое инвариантное подмножество M такое, что $\mu M_2 > 0$, то $\mu(M \setminus M_2) = 0$.

Квадратная матрица $\Phi(p, t)$ порядка n называется гладким коциклом над φ, если она непрерывна, непрерывно дифференцируема по t при $p \in M$, $t \in R$, и удовлетворяет условию

$$\Phi(p, t+s) = \Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s). \tag{2}$$

Известно (и легко проверяется), что $\Phi(p, t)$ есть гладкий коцикл над φ тогда и только тогда, когда существует непрерывная на M квадратная матрица решений системы дифференциальных уравнений

$$dz/dt = P(\varphi(p, t))\,z, \tag{3}$$

нормированная в нуле: $\Phi(p, 0) = E$.

В работах [1, 2] доказано, что характеристические показатели коцикла $\Phi(p, t)$ почти везде на M сохраняют постоянные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Теорема 1. *Предположим, что среди чисел λ_i имеется k отрицательных, а остальные $(n-k)$ положительны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать замкнутое множество $\overline{M}_\varepsilon \subset M$ и число $a > 0$ такие, что $\mu\overline{M}_\varepsilon > 1-\varepsilon$ и для любого $p \in \overline{M}_\varepsilon$ существует k-мерное линейное пространство $L^+(p)$ такое, что для любого вектора $Z_0 \in L^+(p)$ выполняются неравенства*

$$|\Phi(p, t)\,z_0| \leqslant a\,|z_0| \exp(-\lambda t) \tag{5}$$

при $t \geqslant 0$ и

$$|\Phi(p, t)\,z_0| \geqslant \frac{1}{a}\,|z_0| \exp(-\lambda t) \tag{6}$$

при $t \leqslant 0$, где $\lambda = \dfrac{1}{2}\min\limits_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i|$, и $(n-k)$-мерное линейное пространство $L^-(p)$ такое, что для любого вектора $z_0 \in L^-(p)$ выполняются неравенства

$$|\Phi(p, t)\,z_0| \geqslant \frac{1}{a}\,|z_0| \exp(\lambda t) \tag{7}$$

при $t \geqslant 0$ и

$$|\Phi(p, t)\,z_0| \leqslant a\,|z_0| \exp(\lambda t) \tag{8}$$

при $t \leqslant 0$.

Пространства $L^-(p)$ и $L^+(p)$ непрерывно зависят от p при $p \in \overline{M}_\varepsilon$.

2. Рассмотрим сначала частный случай треугольного коцикла.

Пусть $\Psi(p, t)$ есть верхний треугольный коцикл с положительными диагональными элементами, тогда $\Psi(p, t)$ — фундаментальная матрица системы уравнений

$$dz/dt = Q(\varphi(p, t))\,z, \tag{9}$$

нормированная в нуле. Таким образом, $\dfrac{d}{dt}\Psi(p, t) = Q(\varphi(p, t))\,\Psi(p, t)$; отсюда следует, что Q — верхняя треугольная матрица:

$$Q(p) = \begin{pmatrix} q_{11}(p) & q_{12}(p) & \ldots & q_{1n}(p) \\ 0 & q_{22}(p) & \ldots & q_{2n}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & q_{nn}(p) \end{pmatrix} \tag{10}$$

с непрерывными на M элементами $q_{ii}(p)$.

По теореме Биркгофа существует такое множество $\widehat{M} \subset M$, $\mu M = 1$, что для всех $p \in \widehat{M}$ существуют пределы

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\,d\tau = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Эти пределы не зависят от $p \in \hat{M}$ и по теореме Ляпунова представляют собой характеристические показатели коцикла $\Psi(p, t)$.

По теореме Лебега пределы (11) достигаются равномерно на множестве, мера которого сколь угодно близка к единице. Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать множество $M_\varepsilon \subset \hat{M}$ и число T такие, что $\mu M_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, и если $p \in M_\varepsilon$, то при всех $|t| > T$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau - \lambda_i \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Запишем систему (9) в скалярной форме:

$$\dot{z}_i = q_{ii} z_i + q_{ii+1} z_{i+1} + \ldots + q_{in} z_n, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Пусть $y_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ есть вектор, определяемый следующими формулами:

$$y_{jj} = \exp\left(\int_0^t q_{jj}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right), \tag{14}$$

$$y_{ij} = \exp\left(\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) \sum_{l=i+1}^{j} \int_{\theta_{ij}}^{t} \exp\left(-\int_0^\tau q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) q_{il}(\varphi(p, \tau)) y_{lj}(p, \tau)\, d\tau, \tag{15}$$

где

$$\theta_{ij} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \lambda_i > \lambda_j; \\ 0, & \text{если } \lambda_i = \lambda_j; \\ -\infty, & \text{если } \lambda_i < \lambda_j. \end{cases}$$

Ясно, что если интегралы, стоящие справа в (15), сходятся, то y_j есть решение системы (9).

Оценим компоненты y_{ij} вектора y_j. По условию $q_{ij}(p)$ непрерывны на M, следовательно, существует $h > 0$ такое, что $|q_{ij}(p)| < h$ при $p \in M$, $i, j = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что при $|t| \leqslant T$ выполняются неравенства

$$\exp\left(\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) \leqslant \exp Th, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Положим $a_0 = \exp 3Th$, тогда из неравенств (12) и (16) следуют неравенства

$$\begin{gathered} \exp\left(\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) \leqslant a_0 \exp((\lambda_i + \varepsilon) t), \\ \exp\left(-\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) \leqslant a_0 \exp(-(\lambda_i - \varepsilon) t) \end{gathered} \tag{17}$$

при $t \geqslant 0$ и

$$\begin{gathered} \exp\left(\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) \leqslant a_0 \exp((\lambda_i - \varepsilon) t), \\ \exp\left(-\int_0^t q_{ii}(\varphi(p, \tau))\, d\tau\right) \leqslant a_0 \exp(-(\lambda_i + \varepsilon) t) \end{gathered} \tag{18}$$

при $t \leqslant 0$.

Известно, что если A — неособая квадратная матрица порядка n, то существует единственное представление A в виде

$$A = G(A)\,T(A), \tag{22}$$

где $G(A)$ — ортогональная матрица, а $T(A)$ — верхнетреугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали. Матрицы G и T вычисляются с помощью алгебраических операций через элементы A и потому гладко зависят от A.

Пусть A и B — любые матрицы, тогда

$$G(AB) = G(AG(B)). \tag{23}$$

Действительно, по определению G и T имеем $AG(B) = G(AG(B))\,T \times (AG(B))$, откуда следует $AB = G(AG(B))\,T(AG(B))\,T(B)$. С другой стороны, $AB = G(AB)\,T(AB)$, следовательно, $G(AB)\,T(AB) = G(AG\,B))\,T(AG(B))\,T(B)$, или $G^{-1}(AG(B))\,G(AB) = T(AG(B))T(B)\,T^{-1}(AB)$. Здесь слева стоит ортогональная матрица, значит, и матрица, стоящая справа, ортогональна, но в то же время эта матрица — треугольная с положительными диагональными элементами. Отсюда вытекает, что $G^{-1}(AG(B))\,G(AB)$ есть единичная матрица, что и влечет за собой (23).

Введем на компактном метрическом пространстве H поток $\psi(q, t)$ по следующему правилу. Пусть $q = (p, U)$. Тогда

$$\psi(q, t) = (\varphi(p, t), G(\Phi(p, t)\,U)). \tag{24}$$

Покажем, что $\psi(q, t)$ действительно является потоком на H, т. е. проверим справедливость равенства

$$\psi(q, s + t) = \psi(\psi(q, s), t). \tag{25}$$

По определению потока и коцикла (равенства (1) и (2)) из равенства (24) получаем

$$\psi(q, s + t) = (\varphi(p, s + t),\ G(\Phi(p, s + t)\,U)) =$$
$$= (\varphi(\varphi(p, s), t), G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U)). \tag{26}$$

С другой стороны из равенства (24) следует

$$\psi(\psi(q, s), t) = (\varphi(\varphi(p, \mathrm{s}), t),\ G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, s)\,U)). \tag{27}$$

В силу (23) $G(\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, \mathrm{s})\,U) = G(\Phi(\varphi(p, s)\,t)\,\Phi(p, s)\,U)$. Отсюда и из (26) и (27) следует (25).

Положим $\Psi(q, t) — G^{-1}(\Phi(p, t)\,U)\,\Phi(p, t)\,U$. По определению G матрица $\Psi(q, t)$ есть верхнетреугольная матрица с положительными диагональными элементами. Покажем, что она представляет собой гладкий коцикл над $\psi(q, t)$. Гладкость Ψ вытекает из гладкости G. Проверим равенство

$$\Psi(q, s + t) = \Psi(\psi(q, \mathrm{s}), t)\,\Psi(q, s). \tag{28}$$

По определению Ψ имеем

$$\Psi(q, s + t) = G^{-1}(\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U)\,\Phi(\varphi(p, s), t)\,\Phi(p, s)\,U$$

и в то же время

$$\Psi(\psi(q, s), t)\,\Psi(q, s) = G^{-1}(\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, s)\,U)\times$$
$$\times\,\Phi(\varphi(p, s), t)\,G(\Phi(p, s)\,U)\,G^{-1}(\Phi(p, s)\,U)\,\Phi(p, s)\,U.$$

Отсюда с учетом (23) и вытекает (28).

Пусть l — произвольная нормированная мера на O. Определим на H меру $\mu \times l$, т. е. такую меру, что если $M_0 \subset M$, $O_0 \subset O$ и $H_0 = M_0 \times O_0$, то $(\mu \times l)\,H_0 = \mu M_0 \cdot l O_0$.

По теореме Рисса между линейными ограниченными положительными функционалами F на $C(H)$, удовлетворяющими равенству $F(1) = 1$, и нормированными мерами на H существует изоморфизм. В связи с этим вместо $F(f(q))$, где $f \in C(H)$, будем писать νf, где ν — мера, соответствующая функционалу F.

Введем, следуя Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову, инвариантную меру на H. Положим

$$(\mu \times l)_\tau g(q) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\mu \times l)\, g(\psi(q, t))\, dt. \tag{29}$$

Множество мер $(\mu \times l)_\tau$ компактно, поэтому существует последовательность $\tau_i \underset{i \to \infty}{\to} \infty$ такая, что последовательность мер $(\mu \times l)_{\tau_i}$ сходится при $i \to \infty$ к мере ν на пространстве H. Любая мера, построенная таким способом, инвариантна относительно потока $\psi(q, t)$.

Покажем, что любая мера ν накрывает μ, т. е. если $g(q) = f(p)$, то $\nu g = \mu f$, или, что то же самое, если $H_0 = M_0 \times O$, где $M_0 \subset M$, то $\nu H_0 = \mu M_0$. Для этого достаточно показать, что при любом τ мера $(\mu \times l)_\tau$ накрывает меру μ. Пусть $g(q) = f(p)$. Тогда

$$(\mu \times l)_\tau g = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\mu \times l)\, g(\psi(q, t))\, dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mu f(\varphi(p, t))\, dt.$$

По инвариантности меры μ имеем $\mu f(\varphi(p, t)) = \mu f(p)$ при любом t, поэтому из последнего равенства следует, что $(\mu \times l)_\tau g = \mu f$ при любом τ.

Таким образом, инвариантная мера ν накрывает μ.

Пусть $\mathcal{J}(\mu)$ — множество инвариантных нормированных мер на H, накрывающих μ. Как было показано, множество $\mathcal{J}(\mu)$ не пусто, кроме того, оно выпукло и компактно. Отсюда следует, что оно имеет экстремальные точки. Эти точки являются эргодическими мерами на H ввиду эргодичности μ.

Пусть ν — эргодическая инвариантная нормированная мера на H, накрывающая μ.

Коцикл $\Psi(q, t)$ треугольный, поэтому, как показано в п. 2, для любого $\varepsilon > 0$ существуют множество $H_\varepsilon \subset H$, $\nu H_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, и число $a > 0$ такие, что при $q \in H_\varepsilon$ для коцикла $\Psi(q, t)$ выполняются неравенства (5) — (8) при соответствующем подборе $L^+(q)$ и $L^-(q)$.

Пусть $q_1 = (p_1, U_1) \in H_\varepsilon$. Тогда по определению $\Psi(q_1, t) = G^{-1}(\Phi(p_1, t) U_1) \Phi(p_1, t) U_1$. Из этого равенства ввиду ортогональности матриц G^{-1} и U_1 следует, что и для матрицы $\Phi(p_1, t)$ выполняются неравенства (5)—(8) с тем же a. Тогда и при любой $U \in O$ для матрицы $\Psi(\tilde{q}, t)$, где $\tilde{q} = (p_1, U)$, выполняются неравенства (5) — (8). Таким образом, можно считать, что $H_\varepsilon = M_\varepsilon \times O$. Так как мера ν накрывает меру μ, то $\mu M_\varepsilon = \nu H_\varepsilon > 1 - \varepsilon$, и при любом $p \in M_\varepsilon$ для коцикла $\Phi(p, t)$ выполняются неравенства (5)—(8)

Покажем, что на замыкании $\overline{M}_\varepsilon$ множества M_ε также выполняются неравенства (5) — (8). Пусть p_0 — предельная точка M_ε, не принадлежащая этому множеству, а p_i, $i = 1, 2, \ldots$, — последовательность точек множества M_ε, сходящаяся к p_0. Переходя, если надо, к соответствующей подпоследовательности, можно считать, что последовательности линейных пространств $L^+(p_i)$, $L^-(p_i)$ сходятся. Положим

$$\lim_{i \to \infty} L^+(p_i) = L^+(p_0), \quad \lim_{i \to \infty} L^-(p_i) = L^-(p_0). \tag{30}$$

Пусть ζ — произвольный единичный вектор линейного пространства $L^+(p_0)$. Тогда из (30) следует, что существуют единичные векторы $z_i \in L^+(p_i)$ такие, что $z_i \to \zeta$ при $i \to \infty$. Для этих векторов неравенства (5) и (6) имеют вид

$$|\Phi(p_i, t) z_i| \leqslant a \exp(-\lambda t) \tag{31}$$

при $t \geqslant 0$ и

$$|\Phi(p_i, t) z_i| \geqslant \frac{1}{a} \exp(-\lambda t) \tag{32}$$

при $t \leqslant 0$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $i \to \infty$, получаем

$$|\Phi(p_0, t)\zeta| \leqslant a \exp(-\lambda t) \tag{33}$$

при $t \geqslant 0$ и

$$|\Phi(p_0, t)\zeta| \geqslant \frac{1}{a} \exp(-\lambda t) \tag{34}$$

при $t \leqslant 0$.

Последние неравенства означают, что для любого вектора $z_0 \in L^+(p_0)$ выполняются неравенства (5) и (6). Аналогично показывается, что неравенства (7) и (8) выполнены для любого вектора $z_0 \in L^-(p_0)$.

Покажем, наконец, что линейные пространства $L^+(p)$ и $L^-(p)$ непрерывно зависят от p при $p \in \overline{M}_\varepsilon$. Предположим вопреки этому утверждению, что существует последовательность $p_i \in \overline{M}_\varepsilon$, сходящаяся к точке $p_0 \in \overline{M}_\varepsilon$ и такая, что последовательность $L^+(p_i)$ не сходится к $L^+(p_0)$. Это означает существование единичных векторов $z_i \in L^+(p_i)$ таких, что

$$\lim_{i\to\infty} z_i = \zeta \notin L^+(p_0). \tag{35}$$

Неравенства (5) для векторов z_i имеют вид (31). Переходя в этих неравенствах к пределу при $t \to \infty$, получаем неравенство (33). С другой стороны, поскольку $\zeta \notin L^+(p_0)$, существуют векторы $\zeta^+ \in L^+(p_0)$ и $\zeta^- \in L^-(p_0)$ такие, что $\zeta^- \neq 0$ и $\zeta = \zeta^+ + \zeta^-$. Отсюда следует

$$|\Phi(p_0, t)\zeta| \geqslant |\Phi(p_0, t)\zeta^-| - |\Phi(p_0, t)\zeta^+|. \tag{36}$$

Для вектороз ζ^+ и ζ^- справедливы неравенства (5) и (7) соответственно; из этих неравенств и неравенства (36) вытекает неравенство

$$|\Phi(p_0, t)\zeta| \geqslant \frac{1}{a} |\zeta^-| \exp(\lambda t) - a|\zeta^+| \exp(-\lambda t)$$

при $t \geqslant 0$. Последнее неравенство ввиду $|\zeta^-| > 0$ противоречит неравенству (33). Полученное противоречие и доказывает непрерывность линейных пространств $L^+(p)$ и $L^-(p)$ при $p \in \overline{M}_\varepsilon$. Теорема доказана.

4. Воспользуемся следующим определением гиперболичности коцикла на интервале [7].

Определение. *Будем говорить, что коцикл $\Phi(p, t)$ гиперболичен на интервале I_p с константами $a > 0$ и $\lambda > 0$, если существуют линейные пространства $L^+(t)$ и $L^-(t)$ размерностей k и $(n-k)$ соответственно, определенные при $t \in I_p$ и такие, что если $z_0 \in L^+(t_0)$, то*

$$|\Phi(p, t)\Phi^{-1}(p, t_0) z_0| \leqslant a |z_0| \exp(-\lambda(t - t_0)) \tag{37}$$

при $t, t_0 \in I_p$, $t \geqslant t_0$, и если $z_0 \in L^-(t_0)$, то

$$|\Phi(p, t)\Phi^{-1}(p, t_0) z_0| \leqslant a |z_0| \exp(\lambda(t - t_0)) \tag{38}$$

при $t, t_0 \in I_p$, $t \leqslant t_0$.

Теорема 1 позволяет сформулировать следующее утверждение о гиперболичности коцикла на интервалах.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда если $\varphi(p, t) \in \overline{M}_\varepsilon$ при $t \in I_p$, то коцикл $\Phi(p, t)$ гиперболичен на I_p с константами a и λ, фигурирующими в теореме 1.*

Доказательство. Положим $L^+(t) = L^+(\varphi(p, t))$ и $L^-(t) = L^-(\varphi(p, t))$, где $L^+(p)$ и $L^-(p)$ — линейные пространства из теоремы 1, и покажем, что для этих линейных пространств выполняются неравенства (37) и (38). Действительно, если точка $t_0 \in I_p$, то $\varphi(p, t_0) \in \overline{M}_\varepsilon$ и по теореме 1 для вектора $z_0 \in L^+(p, t_0)$ выполняется неравенство

$$|\Phi(\varphi(p, t_0), t - t_0) z_0| \leqslant a |z_0| \exp(-\lambda(t - t_0)). \tag{39}$$

С другой стороны, по определению коцикла (равенство (2)) имеем $\Phi(\varphi(p, t_0), t - t_0) = \Phi(p, t)\,\Phi^{-1}(p, t_0)$, откуда с учетсм неравенства (39) и вытекает (37). Аналогично для (38).

1. *Миллионщиков В. М.* Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений // Мат. сб.— 1968.— **6**.— С. 149—158.
2. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1968.— **19**.— С. 179—210.
3. *Raghunatan M.* A proof of Oseledecb's multiplicative ergobic theorem // Isr. J. Math.— 1979.— **32**.— P. 356—362.
4. *Ruelle D.* Ergodic theory of differentiable dynamical systems // Publ. J. H. E. S.— 1979.— **50**.— P. 275—320.
5. *Cruel H.* Ergodentheorie linearer stochastisher systems.— Universitat Brennen, 1981, Report N 59.
6. *Johnson R. A.*, *Palmer K. J.*, *Sell G. R.* Ergobic properties of linear dynamical systems // JMA Preprint Series.— 1984.— N 65.
7. *Плисс В. А.* Равномерно ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1977.— **13**, № 5.— С. 883—891.

Ленингр. ун-т

Получено 03.06.86