УДК 519.21

Б. МЕРЕДОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Предельные теоремы для случайных процессов, построенных по суммам независимых разнораспределенных случайных величин

Доказаны предельные теоремы для случайных процессов, построенных по суммам независимых разнораспределенных случайных величин.

Доведені граничні теореми для випадкових процесів, побудованих за сумами незалежних неоднаково розподілених випадкових величин.

1. Введение. Пусть $\{\xi_k;\ k \geqslant 0\}$ — последовательность независимых случайных величин, для которых существуют $M\xi_k$ и $\sigma_k^2 = D\xi_k$. Кроме того, $\{f_n(t);\ n \geqslant 1\}$ и $\{a_n;\ n \geqslant 1\}$ — последовательности такие, что: 1) вещественные функции $f_n(t)$ определены для всех $t \in [0, T]$, непрерывны, $0 < f_n(t) < 1$ при всех фиксированных n и t, причем $f_n(t) \uparrow 1$ при $n \to \infty$; 2) положительные вещественные числа $a_n \uparrow \infty$ (здесь и в последующем, если не будет оговорено, к пределу будем переходить при $n \to \infty$); 3) существует непрерывная ограниченная функция $b(t) \geqslant d > 0$ такая, что $a_n^2(1 - f_n(t)) \to b(t)$. Конкретные примеры таких последовательностей существуют $\left(\text{например, } f_n(t) = 1 - \dfrac{1}{(n+1)(t+1)};\ a_n = \sqrt{n}\right)$.

Посредством этих последовательностей построим случайный процесс

$$X_n(t) = \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{\infty} f_n^k(t)\, \xi_k.$$

Представляет интерес изучение предельного поведения данного процесса при $n \to \infty$.

2. Сходимости конечномерных распределений. Слабая сходимость. Не ограничивая общности, можно считать, что $M\xi_k = 0$; $k = 0, 1, 2, \ldots$. Корреляционная функция процесса $X_n(t)$ такова:

$$R_n(t, s) = \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\sum_{m=0}^{k} f_n^m(t)\, f_n^{k-m}(s)\, \xi_m \xi_{k-m}\right) = \\ = \frac{1}{a_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} (f_n(t)\, f_n(s))^k \sigma_k^2.$$

Совместную характеристическую функцию $X_n(t_1), X_n(t_2), \ldots, X_n(t_m)$ (обозначим ее через $\psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_m;\ t_1, t_2, \ldots, t_m)$) можно представить в виде

$$\psi_n(z, t) = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_m;\ t_1, t_2, \ldots, t_m) = \prod_{l=0}^{\infty} \varphi_l\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{z_k}{a_n} f_n^l(t_k)\right),$$

где $\varphi_l(z)$ — характеристическая функция одномерной случайной величины ξ_l.

В дальнейшем нам понадобятся следующие условия:

1) существуют ограниченные положительные постоянные $C_j(t)$, $j = 0;\ 2$, такие, что при $t \in [0, T]$

$$(1 - f_n(t))^{3-j} \sum_{k=0}^{\infty} k^{2-j} f_n^{2k}(t)\, \sigma_k^2 \to C_j(t);$$

2) условие Линдеберга: при $t \in [0, T]$ и для всякого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=0}^{\infty} f_n^{2k}(t) \int_{|x| > \varepsilon a_n} x^2 dP\{\xi_k < x\} \to 0.$$

П р и м е ч а н и е. Если будет сказано, что выполнено условие 1_0 или 1_2 это следует понимать в том смысле, что выполнено условие 1 при $j = 0$ или $j = 2$ соответственно.

В следующей теореме $X(t)$ будет означать гауссовский процесс со средним 0 и корреляционной функцией

$$R(t, s) = \frac{C_2(t)\,b(s) + b(t)\,C_2(s)}{2b(t)\,b(s)}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия 1_2 и 2. Тогда конечномерные распределения процессов $X_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $X(t)$. Кроме того, если выполнено условие 1_0 и функция $b(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то процесс $X_n(t)$ слабо сходится к процессу $X(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что

$$\varphi_l(z) = 1 - \left[\frac{\sigma_l^2}{2} - \alpha_l(z)\right] z^2,$$

где

$$\alpha_l(z) = \frac{1}{z^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izx} - 1 - izx + \frac{z^2x^2}{2}\right) dF_l(x), \quad F_l(x) = P\{\xi_l < x\}.$$

Учитывая неравенство $\left|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$, для всякого $\varepsilon > 0$ получаем

$$|\alpha_l(z)| \leqslant \int\limits_{|x|>\varepsilon a_n} x^2 dF_l(x) + \frac{\varepsilon|z|}{6}\, a_n \sigma_l^2. \tag{1}$$

Значит,

$$\ln \psi_n(z, t) = -\frac{1}{2a_n^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k)\right)^2 \sigma_l^2 +$$

$$+ \frac{1}{a_n^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k)\right)^2 \alpha_l\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{z_k}{a_n} f_n^l(t_k)\right) + O\left[\frac{1}{a_n^4}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k)\right)^4 \sigma_l^4 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_n^4}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k)\right)^4 \left|\alpha_l\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{z_k}{a_n} f_n^l(t_k)\right)\right|^2\right]. \tag{2}$$

Учитывая, что

$$\left(\sum_{k=1}^{m} u_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{m} u_k^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=i+1}^{m} u_i u_r,$$

имеем

$$I_n = \frac{1}{a_n^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k)\right)^2 \sigma_l^2 = \frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{m} z_k^2 \sum_{l=0}^{\infty} f_n^{2l}(t_k)\,\sigma_l^2 +$$

$$+ \frac{2}{a_n^2}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=i+1}^{m}\sum_{l=0}^{\infty}(f_n(t_i)\,f_n(t_r))^l \sigma_l^2.$$

Поскольку, $(f_n(t_i)\,f_n(t_r))^l \leqslant \frac{f_n^{2l}(t_i) + f_n^{2l}(t_r)}{2}$, то с учетом условия 1_2 отсюда получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n \leqslant \sum_{k=1}^{m} z_k^2 \frac{C_2(t_k)}{b(t_k)} + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=i+1}^{m} z_i z_r \frac{(C_2(t_i)\,b(t_r) + b(t_i)\,C_2(t_r))}{2b(t_i)\,b(t_r)}. \tag{3}$$

Пусть $B(t)$ — корреляционный оператор, матрица которого имеет вид $\left\| \frac{C_2(t_i)\, b(t_r) + b(t_i)\, C_2(t_r)}{2b(t_i)\, b(t_r)} \right\|$, $i, r = \overline{1, m}$, и матрица-столбец $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$.

Тогда из (3) следует

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, I_n \leqslant (B(t)\, z, z). \tag{4}$$

Учитывая оценку (1) и условие 2, имеем

$$K_n = \frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k) \Big)^2 \Big| \alpha_l \Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{z_k}{a_n} f_n^l(t_k) \Big) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} z_k^2 \Big(\frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} f_n^{2l}(t_k) \int\limits_{|x|>\varepsilon a_n} x^2 dF_l(x) \Big) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{r=i+1}^{m} z_i z_r \times$$

$$\times \Big[\frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} f_n^{2l}(t_i) \int\limits_{|x|>\varepsilon a_n} x^2 dF_l(x) + \frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} f_n^{2l}(t_r) \int\limits_{|x|>\varepsilon a_n} x^2 dF_l(x) \Big] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{6} \Big| \sum_{k=1}^{m} z_k \Big| \frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k) \Big)^2 \sigma_l^2.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, K_n \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \Big| \sum_{k=1}^{m} z_k \Big| \, (B(t)\, z, z). \tag{5}$$

Далее

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n^4} \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k) \Big)^4 \sigma_l^4 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} [\max_{1\leqslant k\leqslant m} f_n^l(t_k)]^2 \times$$

$$\times \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k \Big)^2 \sigma_l^2 \frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k) \Big)^2 \sigma_l^2 \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k \Big)^2 \Big[\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n^2} \sum_{l=0}^{\infty} [\max_{1\leqslant k\leqslant m} f_n^l(t_k)]^2 \int\limits_{|x|>\delta a_n} x^2 dF_l(x) + \delta^2 \Big] (B(t)\, z, z) =$$

$$= \delta^2 \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k \Big)^2 (B(t)\, z, z)$$

при произвольном $\delta > 0$.

Значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n^4} \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{m} z_k f_n^l(t_k) \Big)^4 \sigma_l^4 = 0. \tag{6}$$

Таким образом, из (2), (4) — (6) следует

$$\lim_{n\to\infty} | \psi_n(z, t) - e^{-\frac{1}{2}(B(t)z,z)} | = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать выполнимость следующего условия слабой компактности процесса:

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} P\{ \sup_{|t_1-t_2|\leqslant h} | X_n(t_1) - X_n(t_2) | > \varepsilon \} = 0. \tag{7}$$

Для этого достаточно, чтобы для $t_1, t_2 \in [0, T]$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M\,(X_n(t_1) - X_n(t_2))^2 \leqslant H\,(t_1 - t_2)^2 \tag{8}$$

(о подробностях см. [1], § 2, гл. IX).

Лемма. *Если выполнено условие* 1_0 *и функция* $b(t)$ *удовлетворяет условию Липшица, то существует постоянная* $H_1 > 0$ *такая, что выполняется оценка* (8).

Доказательство. Действительно,

$$M\,(X_n(t_1) - X_n(t_2))^2 = \frac{1}{a_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}(f_n^k(t_1) - f_n^k(t_2))^2\,\sigma_k^2 =$$

$$= \frac{(f_n(t_1) - f_n(t_2))^2}{a_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(f_n^{k-1}(t_1) + \sum_{i=1}^{k-2} f_n^i(t_1)\, f_n^{k-1-i}(t_2) + f_n^{k-1}(t_2)\Bigr)^2\sigma_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(f_n(t_1) - f_n(t_2))^2}{a_n^2}\Bigl[\sum_{k=0}^{\infty} f_n^{2(k-1)}(t_1)\, k^2\sigma_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} f_n^{2(k-1)}(t_2)\, k^2\sigma_k^2\Bigr].$$

С учетом условия 1_0 отсюда получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M\,(X_n(t_1) - X_n(t_2))^2 \leqslant (b(t_1) - b(t_2))^2\left(\frac{C_0(t_1)}{b^3(t_1)} + \frac{C_0(t_2)}{b^3(t_2)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(b(t_1) - b(t_2))^2\,(C_0(t_1) + C_0(t_2))}{d^3} \leqslant H\,(b(t_1) - b(t_2))^2 \leqslant H_1(t_1 - t_2)^2.$$

3. Обобщение процесса $X_n(t)$. Рассмотрим процесс $Y_n(t) = \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{\infty}\eta_n^k(t)\,\xi_k$, где $\eta_n(t)$ — случайный процесс, определенный при $t \in [0, T]$, не зависящий от ξ_k при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ и с вероятностью 1 удовлетворяющий условиям:

а) $\eta_n(t)$ непрерывен, $0 < \eta_n(t) < 1$, причем $\eta_n(t) \uparrow 1$;

б) процесс $a_n^2(1 - \eta_n(t))$ сходится к некоторому процессу $\eta(t) \geqslant \gamma > 0$;

в) существует ограниченная положительная постоянная $C_3(t)$ такая, что при $t \in [0, T]$

$$(1 - \eta_n(t))\sum_{k=0}^{\infty}\eta_n^{2k}(t)\,\sigma_k^2 \to C_3(t);$$

г) при $t \in [0, T]$ и для всякого $\varepsilon > 0$ (условие Линдеберга)

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\eta_n^{2k}(t)\int\limits_{|x|>\varepsilon a_n} x^2 dF_k(x) \to 0.$$

Введем условие А: существует постоянная $H_2 > 0$ такая, что для $t_1, t_2 \in [0, T]$ и всех n

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=0}^{\infty} M\,(\eta_n^k(t_1) - \eta_n^k(t_2))^2\,\sigma_k^2 \leqslant H_2(t_1 - t_2)^2.$$

Пусть $B(\eta(t))$ — оператор, матрица которого имеет вид

$$\left\| \frac{C_3(t_i)\,\eta(t_r) + \eta(t_i)\,C_3(t_r)}{2\eta(t_i)\,\eta(t_r)} \right\|, \quad i, r = \overline{1, m},$$

z — как и выше, матрица-столбец. Тогда скалярное произведение $(B(\eta(t))\,z, z)$ будет равно

$$(B(\eta(t))\,z, z) = \sum_{k=1}^{m} z_k^2\,\frac{C_3(t_k)}{\eta(t_k)} + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{r=i+1}^{m} z_i z_r\,\frac{(C_3(t_i)\,\eta(t_r) + \eta(t_i)\,C_3(t_r))}{2\eta(t_i)\,\eta(t_r)}.$$

Теорема 2. *Конечномерные распределения процессов* $Y_n(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $Y(t)$, *имеющего характеристическую функцию* $v(z, t) = Me^{-\frac{1}{2}(B(\eta(t))z, z)}$. *Кроме того, если выполнено условие A, то процесс* $Y_n(t)$ *слабо сходится к процессу* $Y(t)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$M\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m} z_k Y_n(t_k)\right\}/\eta_n(\cdot)\right) = M\exp\left\{i\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{z_k}{a_n}\eta_n^l(t_k)\right)\xi_l\right\} =$$

$$= \prod_{l=0}^{\infty}\varphi_l\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{z_k}{a_n}\eta_n^l(t_k)\right).$$

Тогда, как и в теореме 1,

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m} z_k Y_n(t_k)\right\}/\eta_n(\cdot)\right) = e^{-\frac{1}{2}(B(\eta(t))z, z)}.$$

Используя формулу повторного условного математического ожидания отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} Me^{i\sum_{k=1}^{m} z_k Y_n(t_k)} = Me^{-\frac{1}{2}(B(\eta(t))z, z)}.$$

Поскольку условие A обеспечивает слабую компактность процесса $Y_n(t)$, этим и завершается доказательство теоремы 2.

Рассмотренные выше процессы можно увязать и с другим процессом. Пусть $S_k = \sum_{m=0}^{k}\xi_m$. Рассматривая процесс $Z_n(t) = \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{\infty} f_n^k(t) S_k$, легко убедиться в том, что $Z_n(t) = \frac{X_n(t)}{1 - f_n(t)}$ с вероятностью 1.

Тогда, как следует из теоремы 1, в тех же условиях конечномерные распределения процессов $(1 - f_n(t))\, Z_n(t)$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $X(t)$, а с теми же ограничениями, что и в теореме 1, этот процесс слабо сходится к процессу $X(t)$. Аналогичная конструкция распространяется и на процесс $Y_n(t)$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов.— М. : Наука, 1977.— 568 с.

Получено 03.07.90