УДК 517.929

Р. Г. КОПЛАТАДЗЕ, вед. науч. сотр. (НИИ прикл. математики Тбил. ун-та)

Специфические свойства решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Устанавливаются новые специфические признаки колеблемости правильных решений уравнений

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, u(\tau_i(t)),$$

где $n \geqslant 1, \tau_i: R_+ \to R_+$, $i = 1, \ldots, m$, — непрерывные неубывающие функции, $\tau_i(t) \geqslant t$ при $t \in R_+$, $i = 1, \ldots, m$, а функции $p_i: R_+ \to R_+$, $i=1, \ldots, m$, суммируемы на каждом конечном отрезке.

Встановлюються нові специфічні ознаки коливальності правильних розв'язків рівняння

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, u(\tau_i(t)),$$

де $n \geqslant 1, \tau_i: R_+ \to R_+$, $i = 1, \ldots, m$, — неперервні неспадні функції, $\tau_i(t) \geqslant t$ при $t \in R_+$, $i = 1, \ldots, m$, а функції $p_i: R_+ \to R_+$, $i=1, \ldots, m$, сумовні на кожному скінченному відрізку.

Рассмотрим уравнение

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, u(\tau_i(t)), \tag{1}$$

где $n \geqslant 1, \tau_i: R_+ \to R_+$, $i = 1, \ldots, m$, — непрерывные неубывающие функции, $\tau_i(t) \geqslant t$ при $t \in R_+$, $i = 1, \ldots, m$, а функции $p_i: P_+ \to R_+$, $i = 1, \ldots, m$, суммируемы на каждом конечном отрезке.

Пусть $t_0 \in R_+$. Функцию $u: [t_0, +\infty[\to R$ назовем правильным решением уравнения (1), если она абсолютно непрерывна вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно на $[t_0, +\infty[$, почти всюду в этом промежутке удовлетворяет уравнению (1) и $\sup\{|u(t)| : s \leqslant t < +\infty\} > 0$ при $s \geqslant t_0$.

Правильное решение уравнения (1) называется колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, сходящуюся к $+\infty$, и неколеблющимся — в противном случае.

Определение 1. *Будем говорить, что уравнение* (1) *обладает свойством* $\tilde{B}$, *если каждое правильное решение этого уравнения при нечетном n является колеблющимся, а при четном n — либо колеблющимся, либо удовлетворяющим условию*

$$|u^{(i)}(t)| \downarrow 0 \quad \textit{при} \quad t \uparrow +\infty. \tag{2}$$

В данной работе приводятся новые специфические признаки колеблемости правильных решений уравнения (1). Результаты аналогичного характера для нелинейных дифференциальных уравнений содержатся в [1].

Признаки колеблемости, улавливающие специфические особенности дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, рассмотрены в [1—6].

1. Некоторые вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть u — неколеблющееся правильное решение уравнения* (1). *Тогда существуют* $t_0 \in R_+$ *и* $l \in \{0, \ldots, n\}$, *где* $l + n$ *четно, такие, что*

$$u^{(i)}(t)\, u(t) > 0,\ i = 0, \ldots, l-1,\ (-1)^{i+l} u^{(i)}(t)\, u(t) \geqslant 0, \quad i = l, \ldots, n,$$

$$\text{при } t \geqslant t_0.$$

Доказательство этой леммы см. в [7].

Лемма 2. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\varliminf_{t\to+\infty} \int_t^{\tau_i(t)} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds > 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

и либо

$$\operatorname{vrai\,sup}\{p_i(t) : t \geqslant 0\} < +\infty, \ i = 1, \dots, m, \ \textit{при} \ k = n-1, \tag{4}$$

либо

$$\operatorname{vrai\,sup}\{t^{n-k} p_i(t) : t \geqslant 0\} < +\infty \ \textit{при} \ k \in \{0, \dots, n-2\}. \tag{5}$$

Тогда если $u : [t_0, +\infty[\to R$ — *правильное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u^{(i)}(t)\, u(t) > 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad \textit{при} \ t \geqslant t_0, \tag{6}$$

то существует $\lambda \in (0, +\infty)$ *такое, что*

$$|u^{(n-1)}(t)| \exp\Big\{-\lambda \int_{t_0}^{t} s^{n-k-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, ds\Big\} \to 0 \ \textit{при} \ t \uparrow +\infty. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $u : (t_0, +\infty) \to R$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (6). Тогда из (1), учитывая (6), получаем

$$t^{n-k-1} |u^{(n-1)}(t)| \geqslant \int_{t_0}^{t} s^{n-k-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) |u(\tau_i(s))|\, ds \ \text{при} \ t \geqslant t_0. \tag{8}$$

Согласно (3) существуют такие числа $c \in]0, +\infty[$ и $t_1 \in [t_0, +\infty[$, что

$$\int_t^{\tau_i(t)} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds \geqslant c \ \text{при} \ t \geqslant t_1, \ i = 1, \dots, m. \tag{9}$$

Пусть $t \in [\tau(t_1), +\infty[$ — некоторое число, где $\tau(t) = \max\{\tau_i(t) : i = 1, \dots, m\}$. Тогда согласно (9) существуют числа $t_2 \in]t_1, t[$, $t_3 \in]t, \tau_i(t_2)[$ такие, что

$$\int_{t_2}^{t} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds \geqslant \frac{c}{4}, \quad \int_{t}^{t_3} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds \geqslant \frac{c}{4}, \quad \int_{t_3}^{\tau_i(t_2)} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds \geqslant \frac{c}{4},$$

$$i = 1, \dots, m. \tag{10}$$

Поэтому в силу (8) имеем

$$t^{n-k-1} |u^{(n-1)}(t)| \geqslant \int_{t_2}^{t} s^{n-k-1} p_i(s) |u(\tau_i(s))|\, ds \geqslant \frac{c}{4} |u(\tau_i(t_2))|, \tag{11}$$

$$t_3^{n-k-1} |u^{(n-1)}(t_3)| \geqslant \int_{t}^{t_3} s^{n-k-1} p_i(s) |u(\tau_i(s))|\, ds \geqslant \frac{c}{4} |u(\tau_i(t))|, \quad i = 1, \dots, m. \tag{12}$$

С другой стороны, ввиду (6) из равенства

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u^{(i)}(s)}{i!} (t-s)^i + \frac{1}{(n-1)!} \int_s^t (t-\xi)^{n-1} u^{(n)}(\xi)\, d\xi$$

легко следует

$$|u(\tau_i(t_2))| \geqslant \frac{|u^{(n-1)}(t_3)|}{(n-1)!} (\tau_i(t_2) - t_3)^{n-1}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{13}$$

Пусть $k = n-1$. Тогда согласно (4) и (10) имеем

$$\tau_i(t_2) - t_3 \geqslant \frac{c}{4M_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $M_i > \operatorname{vrai\,sup}\{p_i(t) : t \in [0, +\infty[\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — некоторое число. Поэтому согласно (11) — (13) получаем

$$|u^{(n-1)}(t)| \geqslant \left(\frac{c}{4M_i}\right)^{n-1} \frac{c^2}{16(n-1)!} |u(\tau_i(t))|, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, ввиду произвольности t

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|u(\tau_i(t))|}{|u^{(n-1)}(t)|} < +\infty, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Поэтому из уравнения (1) находим

$$|u^{(n-1)}(t)| \leqslant \exp\left\{\lambda_0 \int_{t^*}^{t} \sum_{i=1}^{m} p_i(\xi)\, d\xi\right\}, \quad i = 1, \ldots, m, \text{ при } t \geqslant t^*,$$

где λ_0 и t^* — достаточно большие числа. Следовательно, при $k = n-1$ существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что соблюдается условие (7).

Рассмотрим случай, когда $k \in \{0, \ldots, n-2\}$. Тогда согласно (10)

$$\tau_i(t_2) \geqslant e^{\frac{c}{4M_i}} t_3, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $M_i > \operatorname{vrai\,sup}\{t^{n-k} p_i(t) : t \in [0, +\infty[\}$, $i = 1, \ldots, m$, — некоторое число.

Поэтому ввиду (11) — (13) будем иметь

$$t^{n-k-1} |u^{(n-1)}(t)| \geqslant \frac{c^2 \left(e^{\frac{c}{4M_i}} - 1\right)^{n-1}}{4(n-1)!} |u(\tau_i(t))|, \quad i = 1, \ldots, m,$$

т. е.

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|u(\tau_i(t))|}{t^{n-k-1} |u^{(n-1)}(t)|} < +\infty, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда из (1) находим

$$|u^{(n-1)}(t)| \leqslant \exp\left\{\lambda_0 \int_{t^*}^{t} s^{n-k-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, ds\right\},$$

где t^* и λ_0 — достаточно большие числа. Следовательно, для любого $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что соблюдается условие (7). Лемма доказана.

Из доказанной леммы легко следует справедливость следующих лемм.

Лемма 3. *Пусть*

$$\underline{\lim_{t \to +\infty}} \int_{t}^{\tau_i(t)} p_i(s)\, ds > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

и

$$\operatorname{vrai\,sup}\{p_i(t) : t \in [0, +\infty[\} < +\infty, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Тогда если $u : [t_0, +\infty[\to R$ *— правильное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (6), *то существует* $\lambda \in [0, +\infty[$ *такое, что*

$$|u(t)| e^{-\lambda t} \to 0 \text{ при } t \uparrow +\infty.$$

Лемма 4. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\underline{\lim_{t \to +\infty}} \int_{t}^{\tau_i(t)} s^{n-k-1} p_i(s)\, ds > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{16}$$

и

$$\operatorname{vrai\,sup}\{t^{n-k} p_i(t) : t \in [0, +\infty[\} < +\infty, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{17}$$

Тогда если $u: [t_0, +\infty[\to R$ — правильное решение уравнения (1), *удовлетворяющее условию* (6), *то существует $\lambda \in]0, +\infty[$ такое, что*

$$|u(t)|\, t^{-\lambda} \to 0 \text{ при } t \uparrow +\infty.$$

Предложение 1. *Пусть выполняются условия* (14), (15),

$$\varliminf_{t\to+\infty} (t - \tau_i(t)) > -\infty, \quad i = 1, \dots, m, \tag{18}$$

и

$$\inf\left\{\varliminf_{t\to+\infty} e^{-\lambda t}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, e^{\lambda\tau_i(s)}ds : \lambda \in]0, +\infty[\right\} > (n-1)!. \tag{19}$$

Тогда уравнение (1) *не имеет правильного решения, удовлетворяющего условию* (6).

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть уравнение (1) имеет решение $u: [t_0, +\infty[\to R$, удовлетворяющее условию (6).

Пусть Λ — множество тех $\lambda \in R_+$, для которых $|u(t)|\, e^{-\lambda t} \to +\infty$ при $t \uparrow +\infty$ и $\lambda_0 = \sup \Lambda$. Тогда согласно лемме 3 $\lambda_0 < +\infty$. Поэтому в силу (19) существуют $\varepsilon > 0$ и $t_1 \in [t_0, +\infty[$ такие, что

$$e^{-\lambda t}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}\sum_{i=1}^{m} p_i(s)\, e^{\lambda\tau_i(s)}ds > (n-1)! + \varepsilon \text{ при } t \geqslant t_1,\ \lambda \in [\lambda^*(\varepsilon), \lambda_0 + \varepsilon[, \tag{20}$$

где

$$\lambda^*(\varepsilon) = \begin{cases} \lambda_0, & \text{если } \lambda_0 \in \Lambda, \\ \lambda_0 - \varepsilon, & \text{если } \lambda_0 \notin \Lambda. \end{cases} \tag{21}$$

(Если $\lambda_0 \notin \Lambda$, то ε подберем таким образом, чтобы $\lambda_0 - \varepsilon > 0$ (очевидно, что если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_0 \in \Lambda$).)

Подберем $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ и $\lambda_1 \in [\lambda^*(\varepsilon), \lambda_0]$ таким образом, чтобы

$$(n-1)! + \frac{\varepsilon}{2} > (n-1)!\, e^{-2c\varepsilon_0},\ \lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda_1 t}\,|u(t)| = +\infty,$$

$$\varliminf_{t\to+\infty} e^{-(\lambda_1+\varepsilon_0)t}\,|u(t)| = 0, \tag{22}$$

где $c = \varliminf_{t\to+\infty}(t - \tau(t))$, $\tau(t) = \max\{\tau_i(t) : i = 1, \dots, m\}$.

Положим $\varphi(t) = \inf\{e^{-\lambda_1 s}\,|u(s)| : s \geqslant t \geqslant t_1\}$. Ввиду (22)

$$\varliminf_{t\to+\infty} e^{-\varepsilon_0 t}\varphi(t) = 0, \quad \varphi(t) \uparrow +\infty \text{ при } t \uparrow +\infty \tag{23}$$

и

$$e^{-\lambda\tau_i(t)}\,|u(\tau_i(t))| \geqslant \varphi(t) \text{ при } t \geqslant t_1, \quad i = 1, \dots, m. \tag{24}$$

Введем множества E_1 и E_2 следующим образом:

$$t \in E_1 \Rightarrow e^{-\varepsilon_0 t}\varphi(t) \leqslant e^{-\varepsilon_0 s}\varphi(s) \text{ при } t_1 \leqslant s \leqslant t,$$

$$t \in E_2 \Rightarrow \varphi(t) = e^{-\lambda t}\,|u(t)|.$$

Ввиду (23) легко показать, что $\sup E_1 \cap E_2 = +\infty$. Поэтому существует возрастающая последовательность $\{t_k\}$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty,\ e^{-\varepsilon_0 t_k}\varphi(t_k) \leqslant e^{-\varepsilon_0 t}\varphi(t) \text{ при } t_1 \leqslant t \leqslant t_k,$$

$$\varphi(t_k) = e^{-\lambda t_k}\,|u(t_k)|, \quad k = 2, 3, \dots. \tag{25}$$

Согласно (6), (24) и (25) из (1) находим

$$|u(t_k)| \geqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_1}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) |u(\tau_i(s))| ds | \geqslant$$

$$\geqslant \frac{e^{-(\lambda_1+\varepsilon_0) t_k} |u(t_k)|}{(n-1)!} \int_{\bar{t}_1}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} e^{\varepsilon_0 s} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) e^{\lambda_1 \tau_i(s)} ds, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Следовательно, ввиду (20) и (22) имеем

$$1 \geqslant \frac{e^{2\varepsilon_0 c} e^{-(\lambda_1+\varepsilon_0) t_k}}{(n-1)!} \int_{\bar{t}}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) e^{(\lambda_1+\varepsilon_0)\tau_i(s)} ds >$$

$$> \frac{e^{2c\varepsilon_0}\left((n-1)! + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{(n-1)!} > 1 \text{ при } k \geqslant k_0,$$

где $\bar{t}$ и k_0 — достаточно большие числа. Полученное противоречие доказывает предложение.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия* (14), (15), (18) *и*

$$\inf\left(\lambda^{-n} \operatorname{vrai} \inf_{t \geqslant t_0}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i(t) e^{\lambda(\tau_i(t)-t)}\right) : \lambda \in]0, +\infty[\right) > 1, \tag{26}$$

где $t_0 \in R_+$ *— некоторое число. Тогда уравнение* (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* (6).

Следствие 2. *Если выполняются условия* (14), (15), (18) *и*

$$\operatorname{vrai} \inf \left\{\sum_{i=1}^{m} p_i(t) (\tau_i(t) - t)^n : t \geqslant t_0\right\} > \left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{27}$$

где $t_0 \in R_+$ *— некоторое число, то уравнение* (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* (6).

Предложение 2. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *выполняются неравенства* (16), (17) *и*

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{t}{\tau_i(t)} > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{28}$$

$$\inf\left\{\varliminf_{t \to +\infty} t^{-\lambda} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \tau_i^{\lambda}(s) ds : \lambda \in]n-1, +\infty]\right\} > (n-1)!. \tag{29}$$

Тогда уравнение (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* (6).

Доказательство. Предположим, что $u : [t_0, +\infty[\to R$ — правильное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (6).

Пусть Λ — множество тех λ, для которых $|u(t)| t^{-\lambda} \to +\infty$ при $t \uparrow +\infty$ и $\lambda_0 = \sup \Lambda$. Тогда согласно (6) и лемме 4 $\lambda_0 \in [n-1, +\infty[$. Поэтому в силу (29) существуют $\varepsilon > 0$ и $t_1 \in [t_0, +\infty[$ такие, что

$$t^{-\lambda} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \tau_i^{\lambda}(s) ds > (n-1)! + \varepsilon \text{ при } t \geqslant t_1, \lambda \in]\lambda^*(\varepsilon), \lambda_0 + \varepsilon[, \tag{30}$$

где $\lambda^*(\varepsilon)$ определено равенством (21). (Очевидно, что если $\lambda_0 = n-1$, то $\lambda_0 \in \Lambda$.) Подберем $\varepsilon_0 \in]0, \varepsilon[$ и $\lambda_1 \in [\lambda^*(\varepsilon), \lambda_0 + \varepsilon]$ таким образом, чтобы

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\lambda_1} |u(t)| = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} t^{-(\varepsilon_0+\lambda_1)} |u(t)| = 0,$$

$$\left(\frac{c}{2}\right)^{\varepsilon_0}\left((n-1)! + \frac{\varepsilon}{2}\right) > (n-1)!, \tag{31}$$

где $c = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{\tau(t)}$, $\tau(t) = \max\{\tau_i(t) : i = 1, \ldots, m\}$.

Положим $\varphi(t) = \inf\{s^{-\lambda_1} |u(s)| : s \geqslant t \geqslant t_1\}$. Ввиду (31)

$$\varphi(t) \uparrow +\infty \text{ при } t \uparrow +\infty \tag{32}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\varepsilon_0} \varphi(t) = 0. \tag{33}$$

Введем множества E_1 и E_2 следующим образом:

$$t \in E_1 \Rightarrow t^{-\varepsilon_0}\varphi(t) \leqslant s^{-\varepsilon_0}\varphi(s) \text{ при } t_1 \leqslant s \leqslant t,$$

$$t \in E_2 \Rightarrow \varphi(t) = t^{-\lambda_1} |u(t)|.$$

Из (32) и (33) следует, что $\sup E_1 \cap E_2 = +\infty$. Поэтому существует возрастающая последовательность $\{t_k\}$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty, \; t_k^{-\varepsilon_0}\varphi(t_k) \leqslant s^{-\varepsilon_0}\varphi(s) \text{ при } t_1 \leqslant s \leqslant t_k,$$

$$\varphi(t_k) = t_k^{-\lambda_1} |u(t_k)|, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{34}$$

Так как $|u(\tau_i(t))| \tau_i^{-\lambda_1}(t) \geqslant \varphi(t)$, $i = 1, \ldots, m$, то из (1) находим

$$|u(t_k)| \geqslant \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_1}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} \varphi(s) \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \tau_i^{\lambda_1}(s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varphi(t_k)}{t_k^{\varepsilon_0}(n-1)!} \int_{t_1}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} s^{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \tau_i^{\lambda_1}(s)\, ds =$$

$$= \frac{t_k^{-(\varepsilon_0+\lambda_1)} |u(t_k)|}{(n-1)!} \int_{t_1}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} s^{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \tau_i^{\lambda_1}(s)\, ds, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Следовательно, согласно (29) и (30) имеем

$$1 \geqslant \frac{t_k^{-(\varepsilon_0+\lambda_1)}}{(n-1)!} \int_{\bar t}^{t_k} (t_k - s)^{n-1} \left(\frac{s}{\tau(s)}\right)^{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \tau_i^{\lambda_1+\varepsilon_0}(s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{\varepsilon_0}\left((n-1)! + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{(n-1)!} > 1 \text{ при } k \geqslant k_0,$$

где $\bar t$ и k_0 — достаточно большие числа. Полученное противоречие доказывает предположение.

Следствие 3. *Пусть для некоторого* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *выполняются неравенства* (16), (17) *и*

$$\inf\left(\frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(\lambda - i)} \operatorname{vrai\,inf}_{t\geqslant t_0}\left(t^{n-\lambda} \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \tau_i^{\lambda}(t)\right) : \lambda \in]n-1, +\infty[\right) > 1, \tag{35}$$

где $t_0 \in R_+$ — *некоторое число. Тогда уравнение* (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию* (6).

З а м е ч а н и е. Неравенства (19), (27), (28), (30) и (35) нельзя заменить нестрогими.

2. Д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е у р а в н е н и я с о с в о й с т в а м и $\tilde{B}$. Т е о р е м а 1. *Пусть выполняются условия* (14), (15), (18) *и* (19). *Тогда уравнение* (1) *обладает свойством* $\tilde{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что уравнение (1) имеет неколеблющееся решение u. Тогда согласно лемме 1 существуют числа $l \in \{0, \dots, n\}$ и $t_0 \in R_+$ такие, что $l + n$ четно и

$$u^{(i)}(t)\,u(t) > 0,\ i = 0, \dots, l-1,\ (-1)^{i+l}u^{(i)}(t)\,u(t) \geqslant 0, \quad i = l, \dots, n, \quad \text{при } t \geqslant t_0. \tag{36}$$

Согласно (14)

$$\int^{+\infty} p_i(t)\,dt = +\infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Поэтому из следствия теоремы 3.2' [1] вытекает, что $l \notin \{1, \dots, n-2\}$.

Предположим теперь, что $l = n$. Следовательно, уравнение (1) имеет правильное решение, удовлетворяющее условию (6). С другой стороны, ввиду (14), (15), (18), (19) и предложения 1 уравнение (1) не имеет решения, удовлетворяющего условию (6). Полученное противоречие доказывает, что $l \neq n$. Следовательно, n — четно и $l = 0$. Тогда легко показать, что выполняется условие (2), т. е. уравнение (1) обладает свойством $\tilde{B}$. Теорема доказана.

Ввиду следствий 1 и 2 из доказанной теоремы следуют следующие утверждения.

С л е д с т в и е 4. *Если выполняются неравенства* (14), (15), (18) *и* (26), *то уравнение* (1) *обладает свойством* $\tilde{B}$.

С л е д с т в и е 5. *Если выполняются неравенства* (14), (15), (18) *и* (27), *то уравнение* (1) *обладает свойством* $\tilde{B}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются неравенства* (28), (29) *и для некоторого* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *выполняются* (16) *и* (17). *Пусть, кроме того, для* $k = 0$ *при нечетном (четном)* n *для любого* $l \in \{1, 3, \dots, n-2\}$ *и* $\lambda \in [\,l-1, l\,[$ *(для любого* $l \in \{2, 4, \dots, n-2\}$ *и* $\lambda \in [l-1, l\,[$*) существует* $\varepsilon \in\,]0, 1[$ *такое, что*

$$\varliminf_{t \to +\infty} t^{l-\lambda} \int_t^{+\infty} \xi^{n-l-1} \sum_{i=1}^{m} \tau_i^{\lambda}(\xi)\,p_i(\xi)\,d\xi > \prod_{i=0;\, i\neq l}^{n-1} |\lambda - i| + \varepsilon. \tag{37}$$

Тогда уравнение (1) *обладает свойством* $\tilde{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что уравнение (1) имеет правильное неколеблющееся решение u. Тогда согласно лемме 1 существуют $l \in \{0, \dots, n\}$ и $t_0 \in R_+$, где $l + n$ — четное число, такие, что выполняется неравенство (36).

Пусть $k \neq 0$. Тогда согласно (29), (16) и теореме 8.6 из [1] $l \notin \{1, \dots, n-2\}$. Если же $k = 0$, то согласно (37) и теореме 2.3 из [7] $l \notin \{1, \dots, n-2\}$. С другой стороны, согласно (16), (17), (29), (30) и предложению 2 $l \neq n$. Следовательно, n четно и $l = 0$. Тогда ввиду (16) легко показать, что выполняется условие (2), т. е. уравнение (1) обладает свойством $\tilde{B}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 6. *Пусть при больших* t *выполняются неравенства*

$$p_i(t) \geqslant \frac{c_i}{t^n}, \quad \tau_i(t) \geqslant \alpha_i t, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $c_i > 0$, $\alpha_i > 1$, $i = 1, \dots, m$. *Тогда если для любого* $\lambda \in\,]0, +\infty[$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i^{\lambda} > \prod_{i=0}^{n-1} |\lambda - i|,$$

то уравнение (1) *обладает свойством* $\tilde{B}$.

1. *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* Об осцилляционных свойствах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1977.— 115 с.
2. *Шевело В. Н.* Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Киев : Наук. думка, 1978.— 152 с.
3. *Трамов М. И.* Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 3.— С. 92—96.
4. *Чантурия Т. А.* О специфических признаках колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 5.— С. 662—665.
5. *Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А.* О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, № 8.— С. 1463—1465.
6. *Коплатадзе Р. Г.* О нулях решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Тр. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.— 1983.— **14**.— С. 128—134.
7. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1975.— 352 с.

Получено 15.12.89