УДК 517.944

Б. И. Мосеенков, В. Б. Мосеенков

О разрешимости и устойчивости осесимметричной задачи конвекции при наличии диссипации энергии

При хранении нефтепродуктов и сжиженных газов в естественных и искусственно созданных подземных емкостях как в жидкости, так и в твердой породе возникают сложные гидродинамические и тепловые процессы — конвективное движение жидкости, обусловленное различием температур жидкости и породы, которое сопровождается нестационарным теплообменом. Если вязкая механически несжимаемая жидкость заполняет осесимметричную полость в твердом теле, то конвективный тепломассоперенос в ней описывается системой уравнений [1—3]

$$L_1(\psi) \equiv D\psi_t - r\frac{\partial(\psi, r^{-2}D\psi)}{\partial(r,z)} - D^2\psi = r(-\tau_r + F_1), \quad (r,z,t) \in \Pi_1^T, \tag{1}$$

$$L_2(\psi,\tau) \equiv \sigma_2\left[\tau_t - \frac{1}{r}\,\frac{\partial(\psi,\tau)}{\partial(r,z)}\right] - P^2\Delta\tau = \bar{\varepsilon}F(\psi) + F_2, \quad (r,z,t) \in (\Pi_1 \cup \Pi_2)^T, \tag{2}$$

где t — время; (r, z) — координаты цилиндрической системы $Or\varphi z$; ψ — функция тока; τ — температура; $D\psi \equiv r(r^{-1}\psi_r)_r + \psi_{zz}$ — оператор Стокса; $\partial(\psi,\varphi)/\partial(r,z) = \psi_r\varphi_z - \psi_r\varphi_z$, F_1 и F_2 — заданные функции; σ, P, $\bar{\varepsilon}$ — положительные кусочно-постоянные функции, равные $\sigma^{(i)}$, $P^{(i)}$, $(2-i)\varepsilon$ в Π_i^T, $i = 1, 2$; $\Pi_1 = \{(r,z) \mid 0 < r_1 < r < r_2 < R,\ H_1 < h_1 < z < h_2 < H_2\}$ — меридиональное сечение полости, заполненной жидкостью, $\Pi = \{(r,z) \mid 0 \leqslant r < R,$ $H_1 < z < H_2\}$, $\Pi_2 \equiv \Pi \setminus \overline{\Pi}_1$ — сечение твердого тела; $\Pi_{it_1}^{t_2} = \Pi_i \times (t_1, t_2]$, $\Pi_{i0}^t \equiv \Pi_i^t$; $\varepsilon F(\psi) = \varepsilon\left\{2\left[\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_r^2 + \left(\frac{\psi_z}{r}\right)^2 + \left(\frac{\psi_r}{r}\right)_z^2\right] + \left[\left(\frac{\psi_z}{r}\right)_z - \left(\frac{\psi_r}{r}\right)_r\right]^2\right\}$ — диссипативная функция; $\varepsilon = r_2\beta g c_p^{-1}$ — малый параметр (для реальной жидкости $\varepsilon \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$); β — коэффициент теплового расширения ($\beta \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ град$^{-1}$); c_p — удельная теплоемкость жидкости в изобарном процессе ($c_p \sim 10^3$ Дж$\cdot$кг$^{-1}\cdot$град$^{-1}$); g — ускорение силы тяжести (все переменные и коэффициенты в уравнениях (1), (2) безразмерные [3]).

В качестве Π_1 и Π выбраны прямоугольники лишь для наглядности. Все результаты работы верны и в том случае, когда Π_1 — произвольная ограниченная область, отстоящая от оси Oz, с гладкой границей.

Учет диссипации энергии в жидкости значительно усложняет задачу конвекции, так как в уравнении (2) появляется дополнительная нелинейность $\varepsilon F(\psi)$, не обладающая свойством энергетической нейтральности:

$$\int\limits_{\Pi_1} \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(r, z)} \varphi dr dz = 0, \quad \varphi \in W_2^1(\Pi_1).$$

Однако наличие малого параметра в выражении $\varepsilon F(\psi)$ все же позволяет эффективно исследовать диссипативную ($\varepsilon > 0$) задачу конвекции.

Отметим, что ввиду малости параметра ε диссипативной функцией, как правило, пренебрегают (см., например, [4, 5]). Следует указать работу [6], в которой для трехмерной диссипативной задачи о конвекции нелинейно-вязкой жидкости доказана глобальная теорема существования.

Для уравнений (1), (2) будем рассматривать начально-краевую задачу

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(r, z), \quad \tau|_{t=0} = \tau_0(r, z) \quad (\tau_0^{(2)}|_{\partial\Pi} = 0), \tag{3}$$

$$\psi|_{\partial\Pi_1^T} = D\psi|_{\partial\Pi_1^T} = 0, \tag{4}$$

$$[\tau]_{\partial\Pi_1^T} = \left[P^2 \frac{\partial\tau}{\partial n}\right]_{\partial\Pi_1^T} = 0, \quad \tau^{(2)}|_{\partial\Pi^T} = 0, \tag{5}$$

где $u^{(i)}$ — сужение функции $u(r, z, t)$, заданной в Π^T, на Π_i^T, n — внешняя нормаль к $\partial\Pi_1 = \overline{\Pi}_1 \setminus \Pi_1$, $[\tau]_{\partial\Pi_1^T}$ — скачок функции $\tau(r, z, t)$, равный $(\tau^{(2)} - \tau^{(1)})|_{\partial\Pi_1^T}$, $\partial\Pi = \overline{\Pi} \setminus \Pi$, $\partial\Pi_i^T = \partial\Pi_i \times (0, T]$, $i = 1, 2$.

В настоящей работе доказывается теорема об однозначной разрешимости в целом (по времени t) задачи (1)—(5) и выводятся достаточные условия асимптотической устойчивости ее обобщенных решений. Для отыскания приближенных решений строится специальный проекционно-итеративный метод и доказывается его сходимость. Методы, развитые в работе, могут быть использованы при исследовании аналогичных уравнений, встречающихся в магнитной гидродинамике, теории фильтрации, диффузии и т. д. Кроме того, все результаты легко переносятся на двухмерные задачи.

Для того, чтобы дать определение обобщенного решения задачи (1)—(5), введем необходимые пространства распределений. Пусть $L_p(\Pi_1)$ — банахово пространство с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\Pi_1} = \Big(\int\limits_{\Pi_1} |\varphi|^p r dr dz\Big)^{1/p} \quad \|\cdot\|_{2,\Pi_1} \equiv \|\cdot\|_{\Pi_1}),$$

а $L_2(\Pi_1)$, $L_2(\Pi)$, $\mathring{W}_{2,0}^{(1)}(\Pi_1)$, $\mathring{W}_{2,0}^{(1)}(\Pi)$, $\mathring{W}_{2,0}^{(2)}(\Pi_1)$, $\mathring{W}_{2,0}^{(3)}(\Pi_1)$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$(\varphi, \psi)_{\Pi_1} = \int\limits_{\Pi_1} \varphi\psi r dr dz, \quad (\tau, \theta)_{\Pi} = \int\limits_{\Pi} \sigma^2 \tau\theta r dr dz, \quad (\varphi, \psi)_{(1),\Pi_1} \int\limits_{\Pi_1} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi r dr dz,$$

$$(\tau, \theta)_{(1),\Pi} = \int\limits_{\Pi} P^2 \nabla\tau \cdot \nabla\theta r dr dz, \quad (\varphi, \psi)_{(2),\Pi_1} = \int\limits_{\Pi_1} \frac{D\varphi}{r^2} \frac{D\psi}{r^2} r dr dz,$$

$$(\varphi, \psi)_{(3),\Pi_1} = \int\limits_{\Pi} \nabla\left(\frac{D\varphi}{r^2}\right) \cdot \nabla\left(\frac{D\psi}{r^2}\right) r dr dz$$

и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{\Pi_1}$, $\|\cdot\|_{\Pi}$, $\|\cdot\|_{(1),\Pi}$, $\|\cdot\|_{(i),\Pi_1}$, $i = 1, 2, 3$. Пространство $\mathring{W}_{2,0}^{(i)}(\Pi_1)$, $i = 1, 2$, $(\mathring{W}_{2,0}^{(1)}(\Pi))$ состоит из всех элементов пространства Соболева $W_2^i(\Pi_1)$ $(W_2^1(\Pi))$, обладающих нулевым следом на $\partial\Pi_1$ $(\partial\Pi)$, а $\mathring{W}_{2,0}^{(3)}(\Pi_1)$ — из всех функций φ пространства $W_2^3(\Pi_1)$, для которых след $D\varphi$ равен нулю на $\partial\Pi_1$ вместе со следом φ (нормы $\|\cdot\|_{(i),\Pi_1}$, $i = 1, 2, 3$, и $\|\cdot\|_{(1),\Pi}$ эквивалентны нормам соответствующих пространств

Соболева, поскольку $r_1 > 0$ и для всякого τ из $\overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{2,0}(\Pi)$ выполняется неравенство Пуанкаре).

Обозначим через $L_{p,q}(\Omega^{t_2}_{t_1})$ $(L_{p,p}(\Omega^{t_2}_{t_1}) \equiv L_p(\Omega^{t_2}_{t_1}))$ банахово пространство с нормой $\| u \|_{p,q,\Omega^{t_2}_{t_1}} = \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \| u \|^q_{p,\Omega} dt \right)^{1/q}$ $(\| \cdot \|_{p,p,\Omega^{t_2}_{t_1}} \equiv \| \cdot \|_{p,\Omega^{t_2}_{t_1}}, \ \| \cdot \|_{2,\Omega^{t_2}_{t_1}} \equiv \| \cdot \|_{\Omega^{t_2}_{t_1}})$, а через $V^{1,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})$, $V^{1,1}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})$, $V^{3,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})$ — банаховы пространства распределений $C^0(t_1, t_2; L_2(\Omega)) \cap L_2(t_1, t_2; \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_{2,0}(\Omega))$, $V^{1,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1}) \cap W^1_2(t_1, t_2; L_2(\Omega))$, $C^0(t_1, t_2; \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,0}(\Omega)) \cap L_2(t_1, t_2; \overset{\circ}{W}{}^{(3)}_{2,0}(\Omega))$ с нормами

$$| u |_{V^{1,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})} = (\max_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \| u \|^2_{\Omega} + \| u \|^2_{(1),\Omega^{t_2}_{t_1}})^{1/2} \ (\Omega = \Pi_1 \vee \Pi), \quad | u |_{V^{1,1}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})} =$$

$$= (| u |^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})} + \| u_t \|^2_{\Omega^{t_2}_{t_1}})^{1/2} \ (\Omega = \Pi_1 \vee \Pi), \quad | u |_{V^{3,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})} =$$

$$= (\max_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \| u \|^2_{(2),\Omega} + \| u \|^2_{(3),\Omega^{t_2}_{t_1}}) \quad (\Omega = \Pi_1),$$

где $\| \cdot \|_{(i),\Omega^{t_2}_{t_1}}$ — норма в $L_2(t_1, t_2; \overset{\circ}{W}{}^{(i)}_{2,0}(\Omega))$, $i = 1, 2, 3$. Здесь $H_1(t_1, t_2; H_2(\Omega))$ означает обычное [7] пространство распределений из $[t_1, t_2]$ в $H_2(\Omega)$ со свойствами пространства $H_1([t_1, t_2])$ по t.

Обобщенным решением задачи (1) — (5) будем называть пару функций $\psi \in V^{3,0}_{2,0}(\Pi^T_1)$, $\tau \in V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)$, удовлетворяющих интегральным тождествам

$$\int\limits_{\Pi_1} r^{-1} D\psi\varphi drdz \Big|^{t=t_1}_{t=0} + \int\limits_{\Pi^{t_1}_1} \left[-r^{-1} D\psi\varphi_t - \frac{\partial(\psi, r^{-2}D\psi)}{\partial(r, z)} \varphi + r^{-1} \nabla(D\psi) \cdot \nabla\varphi \right] \times$$
$$\times drdzdt = \int\limits_{\Pi^{t_1}_1} (-\tau_r + F_1) \varphi drdzdt, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Pi} \sigma^2 \tau\theta r drdz \Big|^{t=t_1}_{t=0} + \int\limits_{\Pi^{t_1}} \left\{ -\sigma^2 \left[\tau\theta_t + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \tau)}{\partial(r, z)} \right] + P^2 \nabla\tau \cdot \nabla\theta \right\} r drdzdt =$$
$$= \int\limits_{\Pi^{t_1}} \left[\varepsilon F(\psi) + F_2 \right] \theta r drdzdt \tag{7}$$

при всяких $\varphi \in V^{1,1}_{2,0}(\Pi^T_1)$, $\tau \in V^{1,1}_{2,0}(\Pi^T)$ и всех t_1 из $[0, T]$.

Если

$$\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{2,0}(\Pi_1), \quad \tau_0 \in L_2(\Pi), \quad F_1 \in L_{p, \frac{2p}{3p-2}}(\Pi^T_1), \quad F_2 \in L_{p, \frac{2p}{3p-2}}(\Pi^T), \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{8}$$

то это определение корректно. Существование интегралов в (6), (7) доказано в [1—3] на основании теорем вложения, априорных оценок для эллиптических операторов и неравенств

$$\| u \|_{\frac{p}{p-1}, \frac{2p}{2-p}, \Omega^{t_2}_{t_1}} \leqslant c_1 | u |_{V^{1,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})}, \quad 1 < p \leqslant 2, \tag{9}$$

$$\left| \left(\frac{\partial(w, v)}{\partial(r, z)}, \ \frac{u}{r} \right)_{\Omega^{t_2}_{t_1}} \right| \leqslant c_2 \max_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \| w \|_{(2),\Omega} \| v \|_{(1),\Omega^{t_2}_{t_1}} \| u \|_{(1),\Omega^{t_2}_{t_1}}, \tag{10}$$

$$|(F(w), u)_{\Omega^{t_2}_{t_1}}| \leqslant \bar{c}_3 \| F(w) \|_{\frac{4}{3},2,\Omega^{t_2}_{t_1}} \| u \|_{(1),\Omega^{t_2}_{t_1}} \leqslant$$
$$\leqslant c_3 \max_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} \| w \|_{(2),\Omega} \| w \|_{(3),\Omega^{t_2}_{t_1}} \| u \|_{(1),\Omega^{t_2}_{t_1}}, \tag{11}$$

справедливых для всяких u, v из $V^{1,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})$, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре $(\| u \|_{\Omega} \leqslant c \| u \|_{(1),\Omega})$, и w из $V^{3,0}_{2,0}(\Omega^{t_2}_{t_1})$ (здесь c_1 зависит от p, $\Omega = \Pi_1 \vee \Pi$).

Однозначная разрешимость в целом (по времени t) недиссипативной ($\varepsilon = 0$) задачи о конвекции доказана в [1, 3]: если $\varepsilon = 0$ и справедливы включения (8), то существует единственное обобщенное решение задачи (1)—(5), удовлетворяющее энергетическим равенствам

$$\frac{1}{2}\left\|\left|\frac{\nabla\psi}{r}\right|\right\|^2_{\Pi_1}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \left\|\frac{D\psi}{r}\right\|^2_{\Pi_{1t_1}^{t_2}} = \left(\tau_r - F_1,\ \frac{\psi}{r}\right)_{\Pi_{1t_1}^{t_2}}; \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\|\psi\|^2_{(2),\Pi_1}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \|\psi\|^2_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}} = \left(-\tau_r + F_1,\ \frac{D\psi}{r^3}\right)_{\Pi_{1t_1}^{t_2}}, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\|\tau\|^2_{\Pi}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \|\tau\|^2_{(1),\Pi_{t_1}^{t_2}} = (\sigma^{-2}F_2,\ \tau)_{\Pi_{t_1}^{t_2}} \tag{14}$$

при всех $t_1 < t_2$ из $[0, T]$ и неравенствам

$$|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^t)} \leqslant 2\|\tau_0\|^2_{\Pi} + c_4 |||F_2|||^2_{p,\Pi^t}, \tag{15}$$

$$|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^t)} \leqslant 2\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} + c_5\|\tau_0\|^2_{\Pi} + c_6|||F_1|||^2_{p,\Pi_1^t} + c_7|||F_2|||^2_{p,\Pi^t}, \tag{16}$$

где $t \in [0, T]$, $|||\cdot|||_{p,\Omega^t} \equiv \|\cdot\|_{p,2p/3p-2,\Omega^t}$, а константы c_i зависят лишь от p, r_1, Π_1, Π P, σ.

В [1, 3], кроме того, доказана сходимость метода типа Галеркина, асимптотическая устойчивость обобщенных решений (ψ, τ) и сильная сходимость (ψ, τ) к (ψ_0, τ_0) в $W_{2,0}^{(2)}(\Pi_1) \times L_2(\Pi)$ при $t \to +0$, получены экспоненциальные оценки соответствующих норм решений недиссипативной задачи.

Приближенные решения (ψ^n, τ^n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, диссипативной ($\varepsilon > 0$) задачи (1) — (5) будем искать следующим образом: (ψ^0, τ^0) есть обобщенное решение недиссипативной задачи (1) — (5), а (ψ^{n+1}, τ^{n+1}) — обобщенное решение системы

$$L_1(\psi) = r(-\tau_r + F_1), \quad L_2(\psi, \tau) = \bar{\varepsilon}F(\psi^n) + F_2, \tag{17}$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям (3) — (5).

Недиссипативная задача (1) — (5) однозначно разрешима в целом и (ψ^0, τ^0) в силу (15), (16) удовлетворяет неравенству

$$\max\{|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)},\ |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)}\} \leqslant 2M, \tag{18}$$

где

$$M = 2\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} + \bar{c}_5\|\tau_0\|^2_{\Pi} + c_6|||F_1|||^2_{p,\Pi_1^T} + \bar{c}_7|||F_2|||^2_{p,\Pi^T},$$

$$\bar{c}_5 = \max\{2, c_5\}, \quad \bar{c}_7 = \max\{c_4, c_7\}.$$

Предположим, что (ψ^n, τ^n) принадлежит $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T) \times V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)$ и удовлетворяет неравенству (18). Тогда, согласно (11), $F(\psi^n) \in L_{4/3,2}(\Pi_1^T) \subset L_{4/3}(\Pi_1^T)$ и, следовательно, в силу неравенств (11), (15), (16)

$$|\tau^{n+1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)} \leqslant 2\|\tau_0\|^2_{\Pi} + c_4|||F_2|||^2_{p,\Pi^T} + \varepsilon^2 c_8\|F(\psi^n)\|^2_{4/3,2,\Pi_1^T} \leqslant$$

$$\leqslant M + \varepsilon^2 c_9 |\psi^n|^4_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} \leqslant M + 4\varepsilon^2 c_9 M^2,$$

$$|\psi^{n+1}|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T)} \leqslant 2\|\psi_0\|^2_{(2),\Pi_1} + c_5\|\tau_0\|^2_{\Pi} + c_6|||F_1|||^2_{p,\Pi_1^T} +$$

$$+ c_7|||F_2|||^2_{p,\Pi^T} + \varepsilon^2 c_{10}\|F(\psi^n)\|^2_{4/3,2,\Pi_1^T} \leqslant M + 4\varepsilon^2 c_{11} M^2.$$

Таким образом, если

$$\varepsilon^2 CM \leqslant 1, \quad C = 4\max\{c_9, c_{11}\}, \tag{19}$$

то неравенство (18) справедливо для всех (ψ^n, τ^n), $n = 0, 1, 2, \ldots$

Докажем теперь сильную сходимость построенной последовательности (ψ^n, τ^n). Пара функций $\psi = \psi^{n+1} - \psi^n$, $\tau = \tau^{n+1} + \tau^n$ принадлежит $V_{2,0}^{3,0}(\Pi_1^T) \times \times V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)$ и, являясь обобщенным решением системы уравнений

$$L_1(\psi) = r\left[-\tau_r + \partial(\psi, r^{-2}D\psi^n)/\partial(r, z) + \partial(\psi^{n+1}, r^{-2}D\psi)/\partial(r, z)\right],$$

$$L_2(\psi, \tau) = \bar{\varepsilon}\left[F(\psi^n) - F(\psi^{n-1})\right] + \frac{1}{r}\,\partial(\psi^{n+1}, \tau)/\partial(r, z) + \partial(\psi, \tau^n)/\partial(r, z)]$$

с начальными условиями $\psi|_{t=0} = \tau|_{t=0} = 0$ и граничными условиями (4), (5), удовлетворяет в силу (13), (14) соотношениям

$$\frac{1}{2}\|\psi\|^2_{(2),\Pi_1}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \|\psi\|^2_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}} = \int\limits_{\Pi_{1t_1}^{t_2}} \left[-\tau_r + \frac{\partial(\psi, r^{-2}D\psi^n)}{\partial(r, z)}\right]\frac{D\psi}{r^2}\,drdzdt,$$

$$\frac{1}{2}\|\tau\|^2_{\Pi}\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \|\tau\|^2_{(1),\Pi_{t_1}^{t_2}} = \int\limits_{\Pi_{1t_1}^{t_2}} \left\{\frac{1}{r}\,\frac{\partial(\psi, \tau^n)}{\partial(r, z)} + \varepsilon\left[F(\psi^n) - F(\psi^{n-1})\right]\right\}\tau r\,drdzdt.$$

Оценивая правые части полученных соотношений, в силу неравенств (9) — (11), (19) получаем

$$|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{t_1}^{t_2})} \leqslant \frac{1}{2}c_{12}\left(\|\psi\|^2_{(2),\Pi_1} + \|\tau\|^2_{\Pi}\right)|_{t=t_1} +$$

$$+ \mu(t_1, t_2)\left[|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_{1t_1}^{t_2})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi^T)}\right] + \frac{1}{2}\varepsilon \max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\|\psi^n - \psi^{n-1}\|^2_{(1),\Pi_1},$$

где t_1, t_2 — любые точки из $[0, T]$,

$$\mu(t_1, t_2) = \left(\frac{c_{13}}{24}\right)^{1/2}\left[\|\psi^n\|^2_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}} + \|\psi^{n-1}\|^2_{(3),\Pi_{1t_1}^{t_2}} + \|\tau^n\|^2_{(1),\Pi_{t_1}^{t_2}}\right].$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[t_0, t_1], \ldots, [t_{k-1}, t_k]$ $(t_0 = 0,\ t_k = T)$ таких, что $\mu(t_i, t_{i+1}) \leqslant 1/2$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Это можно сделать, так как (при $\mu(0, T) > 1/2$ разбиение выполняем так, чтобы все $\mu(t_i, t_{i+1})$, кроме быть может последнего, были равны 1/2) в силу (18) справедлива оценка

$$\frac{1}{4}(k-1) \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\mu^2(t_i, t_{i+1}) \leqslant \frac{c_{13}}{24}\left[\|\psi^n\|^2_{(3),\Pi_1^T} + \|\psi^{n-1}\|^2_{(3),\Pi_1^T} + \|\tau^n\|^2_{(1),\Pi^T}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{13}M}{4},$$

т. е. $k \leqslant c_{13}M + 1$. Таким образом,

$$|\psi|^2_{V_{2,0}^{3,0}(\Pi_{1t_i}^{t_{i+1}})} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Pi_{t_i}^{t_{i+1}})} \leqslant c_{12}\left(\|\psi\|^2_{(2),\Pi_1} + \|\tau\|^2_{\Pi}\right)|_{t=t_i} +$$

$$+ \varepsilon\max_{t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}}\|\psi^n - \psi^{n-1}\|^2_{(2),\Pi_1}, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1 \leqslant c_{13}M. \tag{20}$$

Из оценок (20) индукцией по i легко показать, что

$$\max_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i}\max\left\{\|\psi^{n+1} - \psi^n\|^2_{(2),\Pi_1},\ \|\tau^{n+1} - \tau^n\|^2_{\Pi}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{n+1}\left[\max_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i}\|\psi^0\|^2_{(2),\Pi_1}+\sum_{p=1}^{i-1}\frac{(2c_{12})^p}{p!}(n+1)(n+2)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots(n+p)\max_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i}\|\psi^0\|^2_{(2),\Pi_1}\right],$$

и получить в результате оценку

$$|\psi^{n+1}-\psi^n|^2_{V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)}+|\tau^{n+1}-\tau^n|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)}\leqslant c_{14}\varepsilon^{n+1}M^3(n+c_{13}M)^{c_{13}M},$$

обеспечивающую сильную сходимость (ψ^n,τ^n) к (ψ,τ) в $V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)\times V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)$. Очевидно, предельная пара функций (ψ,τ) является обобщенным решением задачи (1) — (5).

Аналогично выводятся оценки

$$|\psi'-\psi''|^2_{V^{3,0}_{2,0}(\Pi^{t_{i+1}}_{1t_i})}+|\tau'-\tau''|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^{t_{i+1}}_{t_i})}\leqslant c_{12}(\|\psi'-\psi''\|^2_{(2),\Pi_1}+$$

$$+\|\tau'-\tau''\|^2_{\Pi})|_{t=t_i}+\varepsilon^2\max_{t_i^-\leqslant t\leqslant t_{i+1}}\|\psi'-\psi''\|^2_{(2),\Pi_1},\quad i=0,1,2,\ldots$$

$$\ldots,k_1-1\leqslant c_{15}M_1^4,$$

для двух обобщенных решений (ψ',τ') и (ψ'',τ'') из шара радиуса M_1 (с центром в нуле) пространства $V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)\times V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)$, обеспечивающие единственность найденного решения (ψ,τ), и неравенство

$$|\psi-\psi^{n+1}|^2_{V^{3,0}_{2,0}(\Pi_1^T)}+|\tau-\tau^{n+1}|^2_{V^{1,0}_{2,0}(\Pi^T)}\leqslant c_{16}\varepsilon^{2(n+1)}M^5(n+c_{17}M^2)^{c_{17}M^2},$$

характеризующее скорость сходимости (ψ^n,τ^n) к (ψ,τ).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если для* ψ_0, τ_0, F_1, F_2 *и* ε *справедливы включения* (8) *и неравенство* (19), *то существует единственное обобщенное решение* (ψ,τ) *задачи* (1)—(5), *удовлетворяющее неравенству* (18) *и энергетическим равенствам типа* (12)—(14).

Замечание 1. Энергетические соотношения для решения (ψ,τ) диссипативной задачи (1)—(5) отличаются от (12)—(14) лишь тем, что в (14) вместо F_2 следует писать $\varepsilon F(\psi)+F_2$. Они доказаны в [3].

Замечание 2. В теореме 1, по сути дела, реализован алгоритм, представляющий собой синтез метода последовательных приближений и метода типа Галеркина. В качестве приближенных решений диссипативной задачи (1)—(5) выбираются точные решения соответствующих недиссипативных задач, каждая из которых решается методом типа Галеркина (сходимость его доказана в [1, 3]). При этом, как исходная так и вспомогательные (недиссипативные) задачи являются квазилинейными. Этот факт объясняется тем, что любая линеаризация конвективных слагаемых позволяет доказать лишь локальную однозначную разрешимость.

Теорема 2. *Если*

$$\int_0^\infty\|F_1\|^{\frac{2p}{3p-2}}_{p,\Pi_1}dt<\infty,\quad\int_0^\infty\|F_2\|^{\frac{2p}{3p-2}}_{p,\Pi}dt<\infty,\quad 1<p\leqslant 2,\tag{21}$$

то обобщенное решение (ψ,τ) *задачи* (1) — (5) *асимптотически устойчиво, т. е.*

$$\lim_{t\to\infty}\|\psi\|_{(2),\Pi_1}=\lim_{t\to\infty}\|\tau\|_{\Pi}=0\tag{22}$$

для всяких (ψ_0,τ_0) *из некоторого шара (радиуса* $O(\varepsilon^{-1})$*) пространства* $W^{(2)}_{2,0}(\Pi_1)\times L_2(\Pi)$.

Действительно, в силу (21) существует предел $M=M(T)$ при $T\to\infty$. Следовательно, если (ψ_0,τ_0) таковы, что $\varepsilon^2C\lim\limits_{T\to\infty}M(T)\leqslant 1$, то в силу (19) решение (ψ, τ) задачи (1) — (5) существует, единственно для всякого $T > 0$ и удовлетворяет, согласно (18), неравенствам

$$\int_0^\infty \|\psi\|^2_{(2),\Pi_1} dt \leqslant c_{18} \int_0^\infty \|\psi\|^2_{(3),\Pi_1} dt < \infty, \quad \int_0^\infty \|\tau\|^2_{\Pi} dt \leqslant c_{19} \int_0^\infty \|\tau\|^2_{(1),\Pi} dt < \infty,$$

откуда и следуют соотношения (22).

1. *Галицын А. С., Легейда Г. А., Мосеенков В. Б.* Аксиально-симметрические квазилинейные сопряженные задачи нестационарной конвекции и проекционно-сеточный метод их решения.— Киев, 1984.— 46 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.22).
2. *Ладыженская О. А.* Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье—Стокса при наличии осевой симметрии // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1968.— 7.— С. 155—177.
3. *Мосеенков В. Б.* Глобальные теоремы об однозначной разрешимости и устойчивость осесимметричных начально-краевых задач термоконвекции.— Киев, 1986.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.42).
4. *Коренев Н. К.* О некоторых задачах конвекции в вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1971.— № 7.— С. 29—39.
5. *Shinbrot M., Kotorynski W. P.* The initial value problem for a Viscous heat-conducting fluid // J. Math. Anal. and Appl.— 1974.— 45, N 1.— P. 1—22.
6. *Литвинов В. Г., Шишкова Н. Е.* Разрешимость нестационарной задачи о неизотермическом движении нелинейно-вязкой жидкости в условиях проскальзывания вдоль стенки канала // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1984.— № 2 (36).— С. 76—81.
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1977.— 336 с.

Киев. ун-т,
Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.06.86