УДК 519.21

О. Л. КОТЛЯРОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т пробл. энергосбережения АН УССР, Киев)

Сокращенное описание многочастичных систем с непрерывным случайным взаимодействием

Для системы одинаковых частиц, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями непрерывного типа, получены кинетическое уравнение и уравнения для статистически независимых марковских предельных траекторий частиц.

Для системи однакових частинок, що описується стохастичними диференціальними рівняннями неперервного типу, одержано кінетичне рівняння та рівняння для статистично незалежних марківських граничних траєкторій частинок.

1. В монографии А. В. Скорохода [1] содержится сокращенное описание системы одинаковых частиц со стохастической динамикой разрывного типа, соответствующее кинетическому описанию в статистической механике, при-

чем в отличие от статистической механики были явно описаны предельные траектории отдельных частиц. Рассматривался предельный переход, когда число частиц $N \to \infty$ за счет их дробления при неизменной полной массе системы.

В настоящей работе на основе результатов А. В. Скорохода в том же пределе аналогичные результаты получены для системы с непрерывной стохастической динамикой с помощью аппроксимации разрывного движения частиц диффузионным.

2. Исходные уравнения движения системы из N одинаковых частиц имеют вид

$$dz_i^{(N)}(t) = \Big[F_1(z_i^{(N)}) + N^{-1}\sum_{j=1}^{N} F_2(z_i^{(N)}, z_j^{(N)})\Big]dt +$$

$$+ N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N} \Phi(z_i^{(N)}, z_j^{(N)})\,dw_{ij}(t),\ i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $z_i^{(N)} = (q_i^{(N)}, v_i^{(N)})$ — фаза i-й частицы, $z_i^{(N)} \in R^d \equiv M$, $d < \infty$, причем в правых и левых частях уравнений фазы частиц берутся в один и тот же момент времени; $w_{ij}(t)$ — независимые при различных (i, j) винеровские процессы. Относительно коэффициентов F_1, F_2, Φ будем считать выполненными обычные условия существования и единственности. Начальные данные считаем неслучайными:

$$z_i^{(N)}(0) = z_{0i},\ i = \overline{1, N}.$$

Эволюция системы $\{z_i^{(N)}(t)\}_{i=\overline{1,N}}$ является марковской, однако фазовые траектории $z_i^{(N)}(t)$ отдельных частиц марковским свойством, вообще говоря, не обладают. Далее нас будет интересовать предельное поведение траекторий $z_i^{(N)}(t)$, а также нормированной случайной меры на M

$$\mu_t^{(N)}(A) = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \chi_A(z_i^{(N)}(t)), \tag{2}$$

характеризующей состояние системы и равной доле частиц, находящихся в борелевском множестве $A \subset M$ в момент времени t (χ_A — индикатор A).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *существуют определенные и дифференцируемые на R_+ функции $\rho(t)$ и $\lambda(t)$ такие, что*

а) $\rho'(t) > 0$, $\rho(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$, $\rho(0) = 0$;

б) $\lambda'(t) > 0$, $\forall t > 0$, $\lambda'(0) = \lambda(0) = 0$;

в) *при некотором* c

$$\rho(|z+h|) \leqslant c[\rho(|z|) + \rho(|h|)],$$

$$\lambda(|z+h|) \leqslant c[\lambda(|z|) + \lambda(|h|)],$$

$$\lambda(|z+h|) - \lambda(|z|) - \lambda'(|z|)\frac{(z, h)}{|z|} \leqslant c\lambda(|h|),\quad z, h \in M;$$

2) *функции* $\rho(t)$, $\lambda(t)$ *связаны с коэффициентами уравнений* (1) *и начальной мерой* $\mu_0^{(N)}(dz) = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \chi_{dz}(z_{0i})$ *следующим образом:*

а) *при некотором* c_1:

$$\frac{\rho'(|z|)}{|z|}(F_1(z) + F_2(z, z'), z) \leqslant c_1[\rho(|z|) + \rho(|z'|)],$$

$$\frac{\lambda'(|z-\bar z|)}{|z-\bar z|}(b(z, z') - b(\bar z, \bar z'),\ z - \bar z) \leqslant c_1[\lambda(|z-\bar z|) + \lambda(|z'-\bar z'|)],$$

$$b(z, z') \equiv F_1(z) + F_2(z, z');$$

б) $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \int \rho(|z|)\,\mu_0^{(N)}(dz) < \infty$;

3) $\alpha^{-1}\lambda(\alpha\,|F_1(z)+F_2(z,z')|) \leqslant \delta_\alpha[1+\rho(|z|)+\rho(|z'|)], \quad \lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\delta_\alpha = 0$;

4) $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}} \sup\limits_{|z|+|z'|>\gamma} \dfrac{|F_1(z)|^2+|F_2(z,z')|^2+|\Phi(z,z')|^2}{\rho(|z|)+\rho(|z'|)} = 0$;

5) *существует предел*

$$\lim_{N\to\infty}\int \varphi(z)\,\mu_0^{(N)}(dz) = \int \varphi(z)\,\mu_0(dz) \quad \forall\varphi\in C_M,$$

где $\mu_0(dz)$ — *вероятностная мера на* M.

Тогда для всех $t>0$ *последовательность случайных мер* $\mu_t^{(N)}$, *соответствующих решению уравнений* (1), *слабо по распределениям сходится к неслучайной вероятностной мере* μ_t, *удовлетворяющей* $\forall\varphi\in C_M^2$ *уравнению*

$$\frac{d}{dt}\int\varphi(z)\,\mu_t(dz) = \iint (F_1(z)+F_2(z,z'),\nabla)\,\varphi(z)\,\mu_t(dz)\,\mu_t(dz') +$$

$$+\frac{1}{2}\iint(\Phi(z,z'),\nabla)^2\,\varphi(z)\,\mu_t(dz)\,\mu_t(dz').$$

Доказательство. Рассмотрим две вспомогательные системы стохастических дифференциальных уравнений

$$dz_i^{(N,\varepsilon)}(t) = \Big[F_1(z_i^{(N,\varepsilon)}) + N^{-1}\sum_{j=1}^N F_2(z_i^{(N,\varepsilon)}, z_j^{(N,\varepsilon)})\Big]dt +$$

$$+\sum_{j=1}^N\int_\Theta f_\varepsilon(\theta, z_i^{(N,\varepsilon)}, z_j^{(N,\varepsilon)})\,P_{ij}^{(N,\varepsilon)}(d\theta,dt), \tag{3}$$

$$d\bar z_i^{(N,\varepsilon)}(t) = \sum_{j=1}^N\int_\Theta \bar f_\varepsilon(\theta, \bar z_i^{(N,\varepsilon)}, \bar z_j^{(N,\varepsilon)})\,P_{ij}^{(N,\varepsilon)}(d\theta,dt),\ i=\overline{1,N}. \tag{4}$$

Здесь $(\Theta,\mathfrak{B})$ — некоторое измеримое пространство; $P_{ij}^{(N,\varepsilon)}(\cdot,dt)$ — независимые при различных (i,j) пуассоновские случайные меры, сосредоточенные в точках $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in\Theta$ и равные в них

$$P_{ij}^{(N,\varepsilon)}(\{\theta_1\},dt) = \nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(dt),\quad P_{ij}^{(N,\varepsilon)}(\{\theta_2\},dt) = \hat\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(dt),$$

$$P_{ij}^{(N,\varepsilon)}(\{\theta_3\},dt) = \bar\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(dt),$$

где $\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t), \hat\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t), \bar\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t)$ — независимые однородные пуассоновские процессы, $E\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t) = E\hat\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t) = \dfrac{1}{2}E\bar\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t) = t/(2\varepsilon^2N)$; $f_\varepsilon(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\bar f_\varepsilon(\cdot,\cdot,\cdot)$ — измеримые функции со значениями в M, связанные между собой и с коэффициентами F_1, F_2, Φ уравнений (1), (3) следующим образом:

$$f_\varepsilon(\theta_1,z,z') = \bar f_\varepsilon(\theta_1,z,z') = -f_\varepsilon(\theta_2,z,z') = -\bar f_\varepsilon(\theta_2,z,z') = \varepsilon\Phi(z,z'),$$

$$f_\varepsilon(\theta_3,z,z') = 0,\ \ \bar f_\varepsilon(\theta_3,z,z') = \varepsilon^2[F_1(z)+F_2(z,z')].$$

Уравнения (1), (3), (4) рассматриваются при одинаковых начальных данных.

Далее используется схема доказательства теоремы о предельном поведении при $N\to\infty$, $\varepsilon=\mathrm{const}$ меры (2), соответствующей уравнениям движения вида (3) ([1, с. 124], теорема 1; мы полагаем ε равным малому параметру m^{-1} из доказательства этой теоремы). После аналогичных рассуждений получаем сначала равномерные по N оценки для решений уравнений

(3), (4):

$$EN^{-1}\sum_{i=1}^{N}[\rho(|z_i^{(N,\varepsilon)}(t)|)+\rho(|\bar z_i^{(N,\varepsilon)}(t)|)]\leqslant c(t),$$

$$E\lambda(|\bar z_i^{(N,\varepsilon)}(t)-z_i^{(N,\varepsilon)}(t)|)\leqslant\delta_\varepsilon c_1(t), \quad (5)$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\delta_\varepsilon=0$, а возрастающие функции $c(t)$, $c_1(t)$ не зависят от ε, N. Далее, из равномерной по N аппроксимации $\mathrm{l.i.m.}\sqrt{N}\varepsilon[\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t)-\hat\nu_{ij}^{(N,\varepsilon)}(t)]=w_{ij}(t)$ и равномерной по N ограниченности траектории $z_i^{(N)}(t)$ следует

$$E|z_i^{(N)}(t)-z_i^{(N,\varepsilon)}(t)|^2\to 0 \quad (6)$$

при $\varepsilon\downarrow 0$ равномерно по N. Утверждение теоремы вытекает из (5), (6) и результатов [1, с. 96] (теорема 1). Теорема доказана.

Теорема 2. *Для фиксированного $s<N$ конечномерные распределения процессов $\{z_i^{(N)}(t)\}_{i=\overline{1,s}}$ в условиях теоремы 1 сходятся при $N\to\infty$ к конечномерным распределениям процесса $\{z_i(t)\}_{i=\overline{1,s}}$ с независимыми марковскими компонентами $z_1(t),\ldots,z_s(t)$, удовлетворяющими стохастическим дифференциальным уравнениям*

$$dz_i(t)=[F_1(z_i(t))+\int F_2(z_i(t),z)\mu_t(dz)]\,dt+$$
$$+\int\Phi(z_i(t),z)\mu_t(dz)\,dw_i(t),\quad z_i(0)=z_{0i},\quad i=\overline{1,s}, \quad (7)$$

с независимыми винеровскими процессами $w_i(t)$.

Доказательство проводится по схеме [1, с. 130] (теорема 2). С учетом свойств пуассоновских мер $P_{ij}^{(N,\varepsilon)}$ и функций $\bar f_\varepsilon$ в (4) траектория $\bar z_i^{(N,\varepsilon)}(t)$ одной частицы сходится при $N\to\infty$, $\forall\varepsilon>0$ в смысле сходимости конечномерных распределений к марковскому процессу, описываемому стохастическим уравнением

$$d\bar z_i^{(\varepsilon)}(t)=\int\varepsilon^2[F_1(\bar z_i^{(\varepsilon)}(t))+F_2(\bar z_i^{(\varepsilon)}(t),z)]P_\varepsilon(d\theta\times dz\times dt)+$$
$$+\iint_\Theta f_\varepsilon(\theta,\bar z_i^{(\varepsilon)}(t),z)P_\varepsilon(d\theta\times dz\times dt),\quad \bar z_i^{(\varepsilon)}(0)=z_{0i}.$$

Здесь P_ε — пуассоновская случайная мера на $\Theta\times M\times R_+$ такая, что $EP_\varepsilon(d\theta\times dz\times dt)=m_\varepsilon(d\theta)\bar\mu_i^{(\varepsilon)}(dz)\,dt$, где $m_\varepsilon(d\theta)\equiv NEP_{ij}^{(N,\varepsilon)}(d\theta\times dt)/dt$ — конечная мера на $(\Theta,\mathscr{B})$, не зависящая от N; $\bar\mu_i^{(\varepsilon)}$—предельная при $N\to\infty$, $\forall\varepsilon>0$ мера, соответствующая уравнениям (4).

Учитывая это, а также асимптотическую при $\varepsilon\downarrow 0$ равномерную по N близость траекторий $z_i^{(N)}(t)$, $z_i^{(N,\varepsilon)}(t)$, $\bar z_i^{(N,\varepsilon)}(t)$, вытекающую из (5), (6), и рассуждая по аналогии с [1], можно убедиться, что при $N\to\infty$ процесс $z_i^{(N)}(t)$ сходится в смысле сходимости конечномерных распределений к марковскому процессу $\tilde z_i(t)$, $\tilde z_i(0)=z_{0i}$, обладающему следующим свойством: процесс

$$\varphi(\tilde z_i(t))-\int_0^t\Big[\Big(F_1(\tilde z_i(s))+\int F_2(\tilde z_i(s),z)\mu_s(dz),\nabla\Big)\varphi(\tilde z_i(s))+$$
$$+\frac{1}{2}\int(\Phi(\tilde z_i(s),z),\nabla)^2\varphi(\tilde z_i(s))\mu_s(dz)\Big]ds\qquad\forall\varphi\in C_M^2,$$

является мартингалом. Тем самым предельный для $z_i^{(N)}(t)$ процесс совпадает в смысле равенства конечномерных распределений с решением соответствующего стохастического уравнения (7).

Отсюда с учетом независимости начальных данных для $s<N$ одночастичных траекторий вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

1. *Скороход А. В.* Стохастические уравнения для сложных систем.— М. : Наука, 1983.— 190 с.

Получено 01.02.90