УДК 62-505.13

В. Б. Ларин

Слабое управление слабодемпфированными системами

В настоящей статье приводится алгоритм построения нулевого и первого приближений решения матричного алгебраического уравнения Риккати, когда действительные части собственных значений соответствующей гамильтоновой матрицы значительно меньше их мнимых частей. В отличие от [1, 2] основу указанного алгоритма составляет построение преобразования гамильтоновой матрицы, сохраняющего собственные векторы матрицы и изменяющего в нужном направлении ее спектр (аналогичные преобразования использовались в [3] для ускорения сходимости процедуры построения матричной сигнум функции).

1. Постановка задачи. Движение управляемого объекта описывается системой $2n$ линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Fx + Gu, \quad x(0) \neq 0. \tag{1}$$

Требуется определить вектор управляющих воздействий u как функцию фазового вектора x, минимизирующий квадратичный критерий качества

$$I = \int_0^\infty (x'Qx + u'B_\varepsilon u)\, dt. \tag{2}$$

Штрих означает операцию транспонирования; F, G, $Q = Q'$, $B_\varepsilon = B'_\varepsilon$ — постоянные матрицы, причем пара F, G стабилизируема [4]. Предполагается, что матрица B_ε велика. Это понятие формализуется введением малого параметра ε: $B_\varepsilon = \varepsilon^{-2}B$. Использование термина «слабое управление» обусловлено тем, что после формальной замены $u = \varepsilon v$ системы (1) становится слабоуправляемой [5]. Термин «слабодемпфированная система» означает, что матрица F близка к кососимметрической, т. е. $F = F_0 + \varepsilon\Phi$, $F_0 = \frac{1}{2}(F - F') \gg \frac{1}{2}(F + F') = \varepsilon\Phi$.

Использование этого термина объясняется тем, что уравнения, описывающие движение недемпфированной механической системы с n степенями свободы, можно привести к системе $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка с кососимметрической матрицей (см., например, [1]).

Известно (см., например, [4], п. 3.4), что решение задачи синтеза оптимального регулятора для системы (1) по критерию (2) сводится к отысканию решения матричного алгебраического уравнения Риккати

$$XF + F'X - \varepsilon^2 XGB^{-1}G'X + Q = 0,$$

или

$$PF + F'P - \varepsilon PGB^{-1}G'P + \varepsilon Q = 0, \tag{3}$$

где $P = \varepsilon X$.

Искомое решение таково, что корни характеристического полинома матрицы $F - \varepsilon GB^{-1}G'P$ лежат в левой полуплоскости.

2. Построение нулевого приближения. Уравнению (3) соответствует система уравнений Эйлера, матрица которой (гамильтонова матрица) имеет вид

$$Z_0 = \begin{bmatrix} F_0 + \varepsilon\Phi & -\varepsilon GB^{-1}G' \\ -\varepsilon Q & F_0 - \varepsilon\Phi' \end{bmatrix} = \Omega_0 + \varepsilon\Psi_0, \tag{4}$$

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_0 = \begin{bmatrix} \Phi & -GB^{-1}G' \\ -Q & -\Phi' \end{bmatrix}.$$

Трудности решения уравнения (3) обусловлены близостью спектра матрицы Z_0 к мнимой оси [1, 2]. В этой связи построим последовательность преобразований (аналог (6) [3]) этой матрицы, сохраняющих ее собственные и обобщенные собственные векторы (которые фактически и определяют искомое решение (3), см. 3.11.8 [4]) и изменяющих ее спектр

$$Z(k+1) = \frac{1}{2}(Z(k) + \lambda_k Z^{-1}(k)), \tag{5}$$

$Z(0) = Z_0$, константы $\lambda_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Пренебрегая в (5) членами порядка ε^2, получаем

$$Z(k+1) = \Omega(k+1) + \varepsilon\Psi(k+1),$$

где

$$\Omega(k+1)=\frac{1}{2}(\Omega(k)+\lambda_k\Omega^{-1}(k)),\quad \Omega(0)=\Omega_0, \tag{6}$$

$$\Psi(k+1)=\Psi(k)-\lambda_k\Omega^{-1}(k)\,\Psi(k)\,\Omega^{-1}(k),\quad \Psi(0)=\Psi_0. \tag{7}$$

Здесь Ψ_0 и Ω_0 определяются (4).

Задача состоит в таком выборе в (6), (7) констант λ_k, что после некоторого количества шагов $\Omega(l)=0$. В этом случае построение P_0-приближенного решения (3) сводится к нахождению следующего (уже не содержащего ε) уравнения Риккати:

$$P_0\Psi_{11}(l)+\Psi_{11}'(l)P_0+P_0\Psi_{12}(l)P_0-\Psi_{21}(l)=0,$$
$$\Psi(l)=\begin{bmatrix}\Psi_{11}(l) & \Psi_{12}(l)\\ \Psi_{21}(l) & \Psi_{22}(l)\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Для упрощения выкладок далее предполагается, что матрица F_0, имеющая $m\leqslant n$ различных по модулю собственных значений, приведена к блочно-диагональной форме

$$F_0=\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & \omega_1\\ -\omega_1 & 0\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}0 & \omega_m\\ -\omega_m & 0\end{bmatrix}\right\}. \tag{9}$$

Рассматриваемая задача сводится к такому выбору констант λ_k, что матрица $\Omega(l-1)$ имеет все равные по модулю собственные значения. Действительно, если, например, в (9) $\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_m=\omega$, то, выбрав $\lambda_0=\omega^2$, получим $\Omega(1)=0$. Руководствуясь этим замечанием, искомую последовательность λ_k можно строить так. Пусть $\omega_1(0)<\omega_2(0)<\ldots<\omega_m(0)$ — упорядоченные по возрастанию модули собственных чисел матрицы $\Omega(0)$. Выбрав $\lambda_0=\omega_1(0)\,\omega_2(0)$, получим, что $\Omega(1)$ имеет уже $m-1$ различных по модулю собственных чисел $\omega_1(1)<\omega_2(1)<\ldots<\omega_\mu(1)$, $\mu=m-1$. Выбираем $\lambda_1=\omega_1(1)\,\omega_2(1)$ и т. д., пока $\Omega(l-1)$ не будет иметь все равные по модулю собственные значения, что позволит на следующем шаге получить $\Omega(l)=0$.

3. Уточнение полученного приближенного решения. Пусть фигурирующая в (9) матрица $\Psi(l)$ не имеет собственных чисел, лежащих на мнимой оси (это эквивалентно сделанному выше предположению, что при аппроксимации $Z(k+1)$ в (5) можно отбросить члены порядка ε^2). Тогда спектр матрицы $F-\varepsilon GB^{-1}G'P_0$ расположен в левой полуплоскости и это обстоятельство позволяет использовать метод Ньютона—Рифсона для уточнения полученного нулевого приближения решения (3). А именно, последующие приближения P_j, $j=1,2,\ldots$, находятся в результате последовательного решения матричных уравнений Ляпунова (выражение (1.1) [7])

$$P_j(F-\varepsilon GB^{-1}G'P_{j-1})+(F'-\varepsilon P_{j-1}GB^{-1}G')P_j=-\varepsilon P_{j-1}GB^{-1}G'P_{j-1}-\varepsilon Q.$$

Рассмотрим процедуру построения первого приближения (матрицы P_1). Так как в результате подстановки P_0 в (3) получается невязка, имеющая порядок ε, можно предположить, что поправка к P_0 имеет порядок ε, т. е. $P_1-P_0=\varepsilon\Pi$. Приняв во внимание, что $P_0F_0+F_0'P_0=0$ и пренебрегая членами порядка ε^2, имеем

$$\Pi\tilde F+\tilde F'\Pi=-\tilde Q, \tag{10}$$

где $\tilde F=F_0+\varepsilon R$, $R=\Phi-GB^{-1}G'P_0$, $\tilde Q=Q+P_0GB^{-1}G'P_0+P_0R+R'P_0=Q+P_0\Phi+\Phi'P_0-P_0GB^{-1}G'P_0$.

Преобразуем (10) так, чтобы исчезла кососимметрическая матрица F_0. В этой связи заметим, что кроме (10) матрица Π удовлетворяет и уравнению $\Pi\tilde F^{-1}+(\tilde F')^{-1}\Pi=-\tilde F^{-1}\tilde Q(\tilde F')^{-1}$, а следовательно, и всем уравнениям следующей последовательности:

$$\Pi F(k) + F'(k)\Pi = -Q(k), \quad F(k+1) = \frac{1}{2}(F(k) + \lambda_k F^{-1}(k)),$$

$$Q(k+1) = \frac{1}{2}(Q(k) + \lambda_k F^{-1}(k) Q (F'(k))^{-1}), \quad F(0) = \tilde{F}, \quad Q(0) = \tilde{Q}.$$

Пренебрегая в этой последовательности членами порядка ε^2, получаем

$$F(k) = U(k) + \varepsilon V(k), \quad Q(k) = S(k) + \varepsilon T(k), \quad U(k+1) = \frac{1}{2}(U(k) +$$

$$+ \lambda_k U^{-1}(k)), \quad V(k+1) = \frac{1}{2}(V(k) - \lambda_k U^{-1}(k) V(k) U^{-1}(k)),$$

$$S(k+1) = \frac{1}{2}(S(k) - \lambda_k U^{-1}(k) S(k) U^{-1}(k)), \quad T(k+1) = \frac{1}{2}[T(k) -$$

$$- \lambda_k U^{-1}(k)(T(k) - V(k) U^{-1}(k) S(k) + S(k) U^{-1}(k) V'(k)) U^{-1}(k)],$$

$$U(0) = F_0, \quad V(0) = R, \quad T(0) = 0, \quad S(0) = \tilde{Q}.$$

Далее, если использовать найденную при определении P_0 последовательность констант λ_k, то получим, что $U(l) = 0$, а следовательно, и $S(l) = 0$. Таким образом, фигурирующая в выражении первого приближения $P_1 = P_0 + \varepsilon\Pi$ матрица Π может быть найдена из следующего уравнения Ляпунова:

$$\Pi V(l) + V'(l)\Pi = -T(l). \tag{11}$$

Покажем, что соотношение $S(l) = 0$ (условие того, что поправка к P_0 имеет порядок ε) эквивалентно уравнению (8) и может быть использовано для определения P_0. Действительно, приняв во внимание, что

$$S(0) = [P_0 - E]\,\Psi(0)\begin{bmatrix} E \\ P_0 \end{bmatrix}, \quad \Omega(k) = \operatorname{diag}\{U(k), U(k)\},$$

$$U^{-1}(k)[P_0 \pm E] = [P_0 \pm E]\,\Omega^{-1}(k),$$

получим

$$S(k) = [P_0 - E]\,\Psi(k)\begin{bmatrix} E \\ P_0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее E — единичная матрица.

Следовательно, условие $S(l) = 0$ эквивалентно уравнению (8).

4. Пример. Движение системы описывается уравнением второго порядка. Структура матриц, входящих в (1), (2), такова:

$$F = \begin{bmatrix} -\varepsilon\nu & \omega \\ -\omega & -\varepsilon\beta \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix};$$

т. е.

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} -\nu & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}, \quad GB^{-1}G' = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_3 \\ \rho_3 & \rho_2 \end{bmatrix}.$$

Выбрав в (6), (7) $\lambda_0 = \omega^2$, получим $\Omega(1) = 0$,

$$\Psi(1) = \begin{bmatrix} -(\nu+\beta)E & -(\rho_1+\rho_2)E \\ -(q_1+q_2)E & (\nu+\beta)E \end{bmatrix}.$$

Матрицу $\Psi(1)$ можно рассматривать как результат кронекеровского произведения

$$\Psi(1) = E \times \begin{bmatrix} -(\nu+\beta) & -(\rho_1+\rho_2) \\ -(q_1+q_2) & (\nu+\beta) \end{bmatrix}$$

и, следовательно, матрица Ψ (1) не будет иметь собственных чисел на мнимой оси, если $(\nu+\beta)^2+(q_1+q_2)(\rho_1+\rho_2)>0$.

Подставив полученные выражения блоков матрицы Ψ (1) в (8), найдем

$$P_0=\alpha E,\ \alpha=-\frac{\nu+\beta}{\rho_1+\rho_2}+\sqrt{\left(\frac{\nu+\beta}{\rho_1+\rho_2}\right)^2+\frac{q_1+q_2}{\rho_1+\rho_2}}.$$

Действительная часть собственных чисел матрицы $F-\varepsilon GB^{-1}G'P_0$ равна $-\sqrt{(\nu+\beta)^2+(q_1+q_2)(\rho_1+\rho_2)}$. В частном случае, при $\nu=g_{11}=g_{12}=g_{21}=0$, $b_2=g_{22}=1$ приведенное выражение для P_0 совпадает с полученным в [1].

Уточним полученное приближение. Найдем, воспользовавшись (11), матрицу Π. Здесь, как и при нахождении матрицы P_0, последовательность скаляров λ_k состоит из одного элемента $\lambda_0=\omega^2$. Матрица V (1), фигурирующая в (11), равна $V(1)=\gamma E$, $\gamma=-\frac{1}{2}\sqrt{(\nu+\beta)^2+(q_1+q_2)(\rho_1+\rho_2)}$ и, следовательно, искомая матрица имеет вид $\Pi=-\frac{1}{2\gamma}T(1)$, где $T(1)=\frac{\omega^2}{2}F_0^{-1}(RF_0^{-1}\tilde{Q}-\tilde{Q}F_0^{-1}R)F_0^{-1}$.

1. *Ларин В. Б.* О слабом управлении слабодемпфированными системами // Прикл. математика и механика.— 1978.— **42**, № 6.— С. 1000—1005.
2. *Гайцгори В. Г.*, *Первозванский А. А.* Управление линейной колебательной системой, близкой к консервативной // Автоматика и телемеханика.— 1980.— № 10.— С. 12—18.
3. *Balzer L. A.* Accelerated convergence of the matrix Sing function method of solving Lyapunov, Riccati and other matrix eguation // Int. J. Contr.— 1980.— **32**, N 6.— P. 1057.
4. *Квакернаак X.*, *Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления.— М.: Мир, 1977.— 650 с.
5. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром // Прикл. математика и механика.— 1968.— **32**, № 1.— С. 15—26.
6. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах // Вторая летняя математическая школа. — 1965.— Вып. 1.— С. 15—92.
7. *Ларин В. Б.* Методы решения алгебраических уравнений Риккати // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1983.— № 2.— С. 186—199.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.06.86