УДК 62-50

А. М. Красносельский, А. А. Владимиров,
А. В. Покровский

Усреднение и предельные гистерезисные нелинейности

В различных задачах динамики нелинейных систем важную роль играет принцип усреднения Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова — Ю. А. Митропольского [1]. Установленные вначале для более частных объектов, теоремы Н. Н. Боголюбова о близости решений первоначальных уравнений к решениям усредненных уравнений в настоящее время распространены на общие классы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных уравнений и т. д.

Для математического описания многих задач естествознания и техники используются дифференциальные уравнения с гистерезисом. В работе [2] подробно изучены свойства основных гистерезисных нелинейностей, построены описания их значений при непериодических законах изменения во времени их аргументов. Ниже обсуждаются возможности применения для изучения систем с гистерезисом принципа усреднения. Ситуация, когда в процессе усреднения гистерезис исчезает, обсуждалась ранее (см., например, [3]). Здесь рассматривается ситуация, в которой процедура усреднения уравнений с гистерезисом приводит либо снова к уравнениям с гистерезисными нелинейностями, либо к уравнениям с нелинейностями нового типа.

1. В соответствии с [2] для описания гистерезисных нелинейностей W будем использовать язык теории систем. Обозначим через W физически реализуемый детерминированный преобразователь с непрерывными векторными входами $v(t) \in R^N$ и векторными выходами $\xi(t) \in R^M$, через $\omega(t)$ — состояния преобразователя; расширенным состоянием в момент времени t называется пара $\{v(t), \omega(t)\}$. Множество возможных расширенных состояний обозначим через $\Omega(W)$. Для рассматриваемых здесь автономных статических гистерезисных нелинейностей законы функционирования не зависят от начала отсчета и масштаба времени.

Преобразователь W детерминирован, т. е. при каждом непрерывном входе $v(t)$ $(t \geqslant t_0)$ и каждом начальном расширенном состоянии $\{v(t_0), \omega(t_0)\} \in \Omega(W)$ определен однозначный закон $\{v(t), \omega(t)\} \in \Omega(W)$, $t \geqslant t_0$, изменения расширенного состояния, т. е. определен оператор, преобразующий вход в состояние:

$$\omega(t) = W[t_0, \omega(t_0)]\, v(t), \ t \geqslant t_0. \tag{1}$$

При $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$ для этого оператора справедливо полугрупповое тождество

$$W[t_0, \omega(t_0)]\, v(t) = W[t_1, W[t_0, \omega(t_0)]\, v(t_1)]\, v(t). \tag{2}$$

Значение $\xi(t)$ выхода преобразователя определяется только состоянием (1) в тот же момент времени t, т. е. при входе $v(t)$, $t \geqslant t_0$, и начальном состоянии $\omega(t_0) = \omega_0$ выход однозначно определяется оператором

$$\xi(t) = \Xi[t_0, \omega_0]\, v(t), \ t \geqslant t_0. \tag{3}$$

Будем говорить, что гистерезисная нелинейность W равномерно виброкорректна, если оператор (3) преобразует любой допустимый непрерывный вход $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, в непрерывный выход и если этот оператор равномерно непрерывен в метрике пространства C непрерывных на $[t_0, t_1]$ вектор-функций на каждом ограниченном множестве допустимых входов.

Из гистерезисных нелинейностей будем рассматривать лишь одномерные преобразователи Ишлинского и многомерные люфты и упоры [2].

Чтобы определить преобразователь Ишлинского, нужно рассмотреть семейство упоров U_h, $h \geqslant 0$, как одну гистерезисную нелинейность — букет упоров. Его состояние — функция $\omega = \omega(h)$, $h \geqslant 0$, значениями которой являются состояния отдельных упоров. При входе $v(t)$, $t \geqslant t_0$, состояние букета меняется по правилу

$$\omega(h, t) = U_h[t_0, \omega(h, t_0)]\, v(t), \ t \geqslant t_0, \tag{4}$$

в соответствии с законом изменения состояния каждого упора.

Пусть на $[0, h_0]$ задана некоторая конечная мера μ. Букет упоров становится преобразователем Ишлинского, если по состоянию (4) определяется переменный скалярный выход равенством

$$\xi(t) = \int_0^{h_0} U_h[t_0, \omega(h, t_0)]\, v(t)\, d\mu(h), \quad t \geqslant t_0. \tag{5}$$

Преобразователь Ишлинского является равномерно виброкорректной гистерезисной нелинейностью. Континуальные семейства упоров использованы для описания гистерезиса А. Ю. Ишлинским [4].

Операторы многомерного люфта и упора L и U с выпуклой компактной характеристикой $Z \subset R^N$ описаны в [2]. При заданном начальном состоянии $\omega_0 \in R^N$ оператор люфта сопоставляет каждому непрерывному входу $v(t)$, $v(0) \in \omega_0 + Z$, однозначно определенный непрерывный выход (совпадающий с состоянием

$$\xi(t) = \omega(t) = L[t_0, \xi_0;\ Z]\, v(t), \ \xi_0 = \omega_0. \tag{6}$$

Оператор упора U определяется равенством

$$U[t_0, \xi_0;\ Z]\, v(t) = v(t) - L[t_0, v(0) - \xi_0;\ Z]\, v(t) \tag{7}$$

(при этом $\xi_0 \in Z$).

Операторы люфта и упора не всегда обладают свойством равномерной виброкорректности. Характеристики Z, при которых эти операторы равномерно виброкорректны, будем называть правильными. Правильными являются все характеристики при $N \leqslant 2$, все строго выпуклые характеристики, все характеристики-многогранники и др. (примеры неправильных характеристик в случае $N = 3$ построены А. Ф. Клепцыным).

Назовем вектор-функцию $v(t)$, $t \geqslant t_0$, предельно почти периодической, если существует такая почти периодическая вектор-функция $z(t)$, что

$$\lim_{t\to\infty} |v(t) - z(t)| = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) определяет линейный оператор

$$Pv(t) = z(t), \tag{9}$$

значениями которого являются почти периодические функции. Для каждой предельно почти периодической функции $v(t)$ определено ее векторное среднее значение

$$M\{v(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T v(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

причем $M\{Pv(t)\} = M\{v(t)\}$.

В работе рассматриваются только такие гистерезисные нелинейности, для которых выход (3) при каждом предельно почти периодическом входе также предельно почти периодичен. Этим свойством обладают преобразователи Ишлинского, а также многомерные люфты и упоры с правильными характеристиками.

2. При изучении дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями их удобно записывать в виде специальных систем, чтобы отразить роль не только начальных значений фазовых переменных, но и начальных состояний гистерезисных нелинейностей. Будем рассматривать дифференциальное векторное уравнение

$$dx/dt = \varepsilon f(t, x, \xi),\ x \in R^n,\ \xi \in R^M, \tag{11}$$

в котором ξ — выход

$$\xi(t) = \Xi[0, \omega_0]\,v(t),\ v \in R^N, \tag{12}$$

гистерезисной нелинейности W, на которую поступает вход

$$v(t) = g[t, x(t)]. \tag{13}$$

Ищутся решения уравнения (11), удовлетворяющие начальному условию

$$x(0) = x_0, \tag{14}$$

причем

$$\{g(0, x_0),\ \omega_0\} \in \Omega(W). \tag{15}$$

Малый параметр в уравнении (11) положителен. Решения ищутся на конечном промежутке изменения «медленного» времени $\tau = \varepsilon t$ или, что то же, на промежутке длины порядка ε^{-1} времени t.

Вектор-функции $f(t, x, \xi)$ и $g[t, x]$ всюду ниже предполагаются почти периодическими по переменной t и равномерно непрерывными по совокупности переменных в соответствующих областях. Из обычных конструкций и установленных в [2] функциональных свойств операторов (12) вытекает, что задача (11)—(15) имеет по крайней мере одно решение на некотором промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Рассмотрим сначала случай, когда при усреднении гистерезисная нелинейность сохраняется. Пусть в задаче (11)—(15) правило (13) определения входа на гистерезисную нелинейность W имеет вид

$$v(t) = g[x(t)], \tag{16}$$

а вектор-функция $f(t, x, \xi)$ при фиксированных x и ξ почти периодична по t (и равномерно непрерывна по совокупности переменных в соответствующей области). Положим

$$F_1(x, \xi) = M\{f(t, x, \xi)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x, \xi)\, ds$$

и заменим задачу (11)—(15) с правилом (16) определения входа на гистерезисную нелинейность отысканием решения уравнения

$$dx/dt = \varepsilon F_1(x, \xi), \tag{17}$$

где

$$\xi(t) = \Xi[0, \omega_0]\, g[x(t)], \tag{18}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0. \tag{19}$$

В силу статичности гистерезисной нелинейности W уравнения (17) и (18) можно представить в виде

$$dy/d\tau = F_1(y, \xi) \tag{20}$$

и

$$\xi(\tau) = \Xi[0, \omega_0]\, g[y(\tau)],$$

где $\tau = \varepsilon t$. Пусть, как это имеет место в естественных ситуациях, начальное условие $y(0) = x_0$ определяет единственное решение $y = y(\tau, x_0, \omega_0)$ уравнения (20), определенное на конечном промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant a$ изменения медленного времени τ.

Теорема 1. *Пусть гистерезисная нелинейность W равномерно виброкорректна. Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (11)—(15) с правилом (16) определения входа на гистерезисную нелинейность имеет решения; каждое решение допускает продолжение $x(t, \varepsilon)$ на промежуток $0 \leqslant t \leqslant a\varepsilon^{-1}$ и для всех продолжений справедлива оценка*

$$|x(t, \varepsilon) - y(\varepsilon t, x_0, \omega_0)| < \eta, \quad 0 \leqslant t \leqslant a\varepsilon^{-1}. \tag{21}$$

Если начальному условию (19) соответствует некоторое множество решений уравнения (20), определенных на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant a$, то теорема 1 модифицируется — оценка (21) заменяется аналогичной оценкой хаусдорфова уклонения множества решений задачи (11)—(15) от воронки решений задачи (17)—(19).

3. Изучаемая и используемая ниже общая конструкция применялась в [5] для специальных ситуаций. В неявной форме эта конструкция играла существенную роль в работе [6].

Пусть вектор-функция $v(t, \sigma)$ почти периодична по t и равномерно непрерывна по скалярной переменной $\sigma \geqslant 0$, рассматриваемой как параметр. Если параметр σ меняется монотонно и непрерывно по времени t по закону $\sigma = \varphi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, причем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \to s$ при $t \to \infty$, то функция $v(t, \varphi(t))$ предельно почти периодична и справедливо равенство $Pv(t, \varphi(t)) = v(t, s)$, где P — оператор (9) выделения основной почти периодической части. Перейдем к гистерезисной нелинейности W с оператором (3) соответствия «вход — выход». Положим $\varphi_\delta(t, \sigma) = \delta t$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta^{-1}\sigma$ и $\varphi_\delta(t, \sigma) = \sigma$ при $t \geqslant \delta^{-1}\sigma$; затем определим функции $\xi_\delta(t, s, \omega_0) = P\Xi[0, \omega_0]\, v(t, \varphi_\delta(t, s))$. При этом, конечно, предполагается выполненным условие $\{v(0, 0), \omega_0\} \in \Omega(W)$. Пусть при каждом s существует равномерный по t предел $\lim\limits_{\delta\to 0} \xi_\delta(t, s, \omega_0) = u(t, s, \omega_0)$. Этот предел определяет на соответствующем множестве функций $v(t, s)$ двух переменных оператор

$$W_*[0, \omega_0]\, v(t, s) = u(t, s, \omega_0), \tag{22}$$

значения которого — снова функции двух переменных (почти периодические по t). Последнее равенство является определением предельной гистерезисной нелинейности W_*.

Опишем теперь общую процедуру усреднения для уравнений (11)—(15). По каждой гладкой вектор-функции $x(s)$, $s \geqslant 0$, со значениями в R^n определим почти периодическую по t вектор-функцию $v(t, s) = g[t, x(s)]$ двух переменных. Затем используем оператор (22) и положим

$$\Phi(\omega_0)\, x(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x(s), W_*[0, \omega_0]\, g[t, x(s)])\, dt. \tag{23}$$

Определенный формулой (23) оператор $\Phi(\omega_0)$ обладает (при минимальных предположениях о свойствах функций $f(t, x, \xi)$ и $g[t, x]$ и о свойствах гистерезисной нелинейности W) «хорошими» свойствами: его значения — непрерывные функции, он вольтерров и т. д.

Общая процедура усреднения для задачи (11)—(15) заключается в замене уравнения (11) с начальным значением (17) задачей

$$dx/dt = \varepsilon\Phi(\omega_0)\, x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{24}$$

Процедура усреднения с переходом к задаче (24) обосновывается обычным аналогом первой теоремы Н. Н. Боголюбова.

Теорема 2. *Пусть гистерезисная нелинейность W равномерно виброкорректна и определяет оператор W_* — оператор (22). Пусть все решения задачи (24) определены на промежутке $0 \leqslant t \leqslant a\varepsilon^{-1}$. Тогда каждому $\eta > 0$ соответствует $\varepsilon_0 > 0$, что задача (11)—(15) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет решения; каждое ее решение продолжимо на промежуток $0 \leqslant t \leqslant a\varepsilon^{-1}$; хаусдорфово уклонение (в равномерной норме) множества рассматриваемых на промежутке $[0, a\varepsilon^{-1}]$ решений $x(t, \varepsilon)$ задачи (11)—(15) от множества рассматриваемых на том же промежутке решений задачи (24) не превышает η.*

4. Для построения оператора W_* по преобразователю Ишлинского можно указать эффективный алгоритм, который сводится к простым операциям. Более сложен случай многомерного люфта и упора. Опишем сначала одну общую конструкцию (назовем ее оператором люфта с многозначным входом).

Нашей целью является обобщение оператора $L[Z]$ на входы вида $V(t)$— непрерывные по Хаусдорфу выпукло- и компактнозначные отображения отрезка $[t_0, t_1]$ в 2^{R^N} (множество подмножеств пространства R^N). Пусть $V(t)$ — такой вход (трубка). Назовем однозначное непрерывное отображение $v(t)\colon [t_0, t_1] \to R^N$ ε-заполнением трубки $V(t)$, если для любого $t \in [t_0, t_1]$ выполнены неравенства $d[u(t), U(t)] \leqslant \varepsilon$, $d[U(t), \overline{\mathrm{co}}\{u(s);\ t-\varepsilon \leqslant s \leqslant t+\varepsilon\}] \leqslant \varepsilon$ (через $\overline{\mathrm{co}}\, A$ обозначена замкнутая выпуклая оболочка множества A, через $d(A, B)$ — хаусдорфово уклонение множества A от B). Если, например, хаусдорфово расстояние от графика отображения $v(t)$ в $[t, t_1] \times R^N$ до графика отображения $V(t)$ не превышает ε, то $v(t)$ будет ε-заполнением трубки $V(t)$.

Рассмотрим трубку $V(t)$, $t \in [t_0, t_1]$; скажем, что она δ-помещается в Z, если найдется такое отображение $x(t)\colon [t_0, t_1] \to R^N$ (не обязательно непрерывное), что $V(t) + B_\delta \subset Z + x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ (здесь $B_\delta = \{x \in R^N : |x| \leqslant \delta\}$). Трубку $V(t)$ назовем строго помещающейся в Z, если она δ-помещается в Z при некотором $\delta > 0$.

Определим теперь выход люфта с характеристикой Z, начальным состоянием ξ_0 и выпукло- и компактнозначным непрерывным строго помещающимся в Z входом $V(t)$, для которого выполнено включение $V(t_0) \subset Z + \xi_0$.

Теорема 3. *Пусть $v_k(t)$ — последовательность ε_k-заполнений трубки $V(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ и $\varepsilon_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +0$, причем $v_k(t_0) \in Z + \xi_0$. Тогда существует такая непрерывная на $[t_0, t_1]$ вектор-функция $\xi(t)$, $\xi(t_0) = \xi_0$, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| \xi_k(s) - \xi(s) \|_{t_0, t_1} = 0,$$

где $\xi_k(t) = L[t_0, \xi_0; Z]\, v_k(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Функцию $\xi(t)$ назовем выходом люфта с многозначным входом. Будем использовать обозначение $\xi(t) = \mathscr{L}[t_0, \xi_0; Z]\, V(t)$. В силу непрерывности оператора L в равномерной метрике при $V(t) = v(t)$ выходы операторов L и $\mathscr{L}$ совпадают.

Свойства оператора $\mathscr{L}$ во многом аналогичны свойствам оператора L. Например, если оператор $L[Z]$ равномерно непрерывен с модулем равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$, то и оператор $\mathscr{L}[Z]$ равномерно непрерывен с тем же модулем (на множестве строго помещающихся в Z входов). В этом случае оператор $\mathscr{L}$ по непрерывности в C можно продолжить на множество всех помещающихся в Z входов $V(t)$, т. е. таких $V(t)$, что $V(t) \subset Z + x(t)$ для любого $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть теперь характеристика Z строго выпукла. В этом случае люфт с многозначным входом можно определить и для не помещающихся в Z входов. При этом будет важен «характер заполнения» однозначным входом многозначной трубки.

Пусть B — пространство N-мерных почти периодических вектор-функций с равномерной метрикой на R, а $\mathscr{V}$ — непрерывное отображение отрезка $[t_0, t_1]$ в B. Каждому элементу $v \in B$ поставим в соответствие множество $V \subset R^N$ по следующему правилу: $V = \mathscr{F}v = \overline{\mathrm{co}}\{v(\tau) : \tau \in R\}$. Очевидно, отображение $\mathscr{F}$, действующее из B в пространство 2^{R^N}, снабженное метрикой Хаусдорфа, непрерывно. Следовательно, отображение $\mathscr{F}\mathscr{V}(t) = V(t) : [t_0, t_1] \to \to 2^{R^N}$ непрерывно по Хаусдорфу.

Л е м м а. *Пусть Z — строго выпуклая компактная характеристика в R. Пусть также $v \in B$ и множество $\mathscr{F}v$ не содержится в $Z + x$ ни при одном $x \in R^N$. Тогда, если $\xi_1(s)$ и $\xi_2(s)$ — два различных выхода люфта $L[Z]$ со входом $v(s)$, то $P\xi_1(s) = P\xi_2(s) = \xi(s)$.*

Таким образом, любому почти периодическому не помещающемуся в Z входу $v(s)$ соответствует единственный почти периодический выход $\xi(s)$. Соответствующий оператор, действующий в пространстве B, обозначим через $\mathscr{H}_Z$.

Пусть $V(t_0) \subset Z + \xi_0$ (или не существует такого $x \in R^N$, что $V(t_0) \subset \subset Z + x$). Определим выход люфта $\tilde{\mathscr{L}}[Z]$ с начальным состоянием ξ_0 (или без начального состояния) и входом $\mathscr{V}(t)$. Выход этого оператора, как и вход, будет непрерывным отображением из $[t_0, t_1]$ в B.

1. Пусть $V(t)$ не принадлежит множеству $Z + x$ ни при одном $x \in R^N$. Положим $\tilde{\mathscr{L}}[t_0, \xi_0; Z]\mathscr{V}(t) = \mathscr{H}_Z\mathscr{V}(t)$.

2. Пусть $[t', t]$ — максимальный отрезок из $[t_0, t]$, на котором трубка $V(\tau)$ помещается в Z. Пусть сначала $t' > t_0$. В силу строгой выпуклости Z и непрерывности по Хаусдорфу отображения $V(\tau)$ существует единственное $\xi' \in R^N$, для которого $V(t') \subset Z + \xi'$. Положим $\tilde{\mathscr{L}}[t_0, \xi_0; Z]\mathscr{V}(t) = \mathscr{L}[t', \xi'; Z]V(t)$ (постоянная функция). Оператор $\mathscr{L}$ определен, так как любая строго выпуклая характеристика правильна. Если же $t' = t_0$, то положим $\tilde{\mathscr{L}}[t_0, \xi_0; Z]\ \mathscr{V}(t) = \mathscr{L}[t_0, \xi_0; Z]V(t)$.

Определим теперь оператор (22) для двух случаев. Обозначим через $V(s)$ множество $\overline{\mathrm{co}}\{v(t, s) : t \in R\}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть Z — произвольная выпуклая компактная характеристика из R^N и трубка $V(r)$ строго помещается в Z на отрезке* $[0, s]$, *причем $V(0) \subset Z + \xi_0$. Тогда значения оператора* (22) *для многомерного люфта* ($W = L[Z]$) *определяются формулой*

$$W_*[0, \xi_0]\, v(t, s) = \mathscr{L}[0, \xi_0; Z]\, V(s). \tag{25}$$

Если, например, вектор-функция $g[t, x]$ такова, что при любом x множество $\overline{\mathrm{co}}\{g(t, x) : t \in R\}$ строго помещается в Z, то теорема 2 об усреднении справедлива для задачи (11)—(15) при $W = L[Z]$.

Т е о р е м а 5. *Пусть Z — строго выпуклая компактная характеристика из R^N и $V(0) \subset Z + \xi_0$ или не существует такого $x \in R^N$, что $V(0) \subset Z + x$. Тогда значения оператора* (22) *для многомерного люфта*

($W = L[Z]$) *определяются формулой*

$$W_*[0, \xi_0]\, v(t, s) = \widetilde{\mathscr{L}}[0, \xi_0;\ Z]\, V(s)(t). \qquad (26)$$

В теоремах 4 и 5 можно отказаться от предположения $V(0) \subset Z + \xi_0$. Оператор (22) для $L[Z]$ при этом снова будет определяться по формулам (25) и (26), в которых начальное состояние ξ_0 заменяется на ξ_0', определяемое по формуле $\xi_0' = \lim\limits_{t\to\infty} L[0, \xi_0;\ Z]\, v(t, 0)$.

Очевидные аналоги теорем 4 и 5 для упора с характеристикой Z можно получить, пользуясь представлением (7).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 501 с.
2. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом.— М.: Наука, 1983.— 271 с.
3. *Писаренко Г. С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала.— Киев : Наук. думка, 1970.— 376 с.
4. *Ишлинский А. Ю.* Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук.— 1944.— № 9.— С. 583—590.
5. *Гильман Т. С., Покровский А. В.* Приближенное построение решений систем с гистерезисом методом усреднения // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений.— Тарту : Изд-во Тартус. ун-та, 1981.— С. 7—9.
6. *Гильман Т. С.* Построение старших приближений для систем дифференциально-операторных уравнений // Управление в сложных нелинейных системах. — М.: Наука, 1984.— С. 5—21.

Ин-т пробл. управления, Москва Получено 03.06.86