УДК 519.21

М. Ю. Козаченко

Смешанные произведения мультипликативных операторных систем без разрывов 2 рода

Изучаются смешанные произведения мультипликативных эволюционных операторных систем, принимающих значения в некотором банаховом кольце R и удовлетворяющих условию ортогональности, с помощью их инфинитезимальных аддитивных систем.

Вивчаються мішані добутки мультиплікативних еволюційних систем, що приймають значення в деякому банаховому кільці R та задовольняють умові ортогональності, за допомогою їх інфінітезімальних адитивних систем.

Настоящая работа является продолжением работы [1] и использует принятые в ней обозначения. В [2—4] изучались эволюционные операторные системы, принимающие значения в некотором банаховом кольце R, непрерывные в каждой точке $\tau \in [0, T]$ либо слева, либо справа, в зависимости от этой точки. Там же был установлен гомеоморфизм между мультипликативными системами рассматриваемого класса и их инфинитезимальными аддитивными системами. Далее для двух мультипликативных систем x_s^t и u_s^t из рассматриваемого класса, непрерывных в каждой точке $\tau \in [0, T]$ одновременно либо слева, либо справа, было доказано существование их смешанного произведения

$$(x \boxtimes u)_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} u_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}, \tag{1}$$

которое также являлось мультипликативной системой из рассматриваемого класса.

Наконец, в [5] при указанных условиях существование (1) получена формула

$$D(x \boxtimes u)_s^t = D(x)_s^t + D(u)_s^t + (D(x) \boxplus D(u))_s^t, \tag{2}$$

где

$$D(x)_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - I) = y_s^t, \quad D(u)_s^t = v_s^t \tag{3}$$

являются аддитивными эволюционными системами из указанного класса, инфинитезимальными для x_s^t и u_s^t соответственно, а

$$(y \boxplus v)_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} v_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} = \omega_s^t \tag{4}$$

также является аддитивной эволюционной системой из указанного класса и называется смешанной суммой y_s^t и v_s^t, или их взаимной характеристикой в указанном порядке.

Отметим, что формула (2) является обобщением известной формулы Троттера [6] на неоднородный разрывный случай и в отличие от неоднородного непрерывного слоя [7] содержит качественно новую добавку (4).

В [1] были получены следующие необходимые и достаточные условия для того, чтобы отображение (3) являлось изоморфизмом: для аддитивных систем

$$y_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} = 0, \quad \tau \in (0, T), \tag{5}$$

для мультипликативных систем

$$(x_{\tau-}^{\tau} - I)(x_{\tau}^{\tau+} - I) = 0, \quad \tau \in (0, T). \tag{6}$$

Эти условия значительно слабее рассмотренных в [2] и определяют более широкие классы систем: $\mathfrak{N}[0, T]$-аддитивных и $\mathfrak{M}[0, T]$-мультипликативных, a- и m-систем соответственно [1].

В настоящей статье будут получены условия, при которых формула (2) справедлива и для m-систем. Для этого прежде всего будут указаны необходимые и достаточные условия, при которых входящие в правую часть этой формулы аддитивные системы $y_s^t + v_s^t$ и ω_s^t будут a-системами. Эти условия будут достаточны и для того, чтобы $y_s^t + v_s^t + \omega_s^t$ также была a-системой, инфинитезимальной к $(x \boxplus u)_s^t$. В заключение будет указана первообразная m-системы для a-системы $(y \boxplus v)_s^t$.

Докажем прежде всего ряд вспомогательных утверждений. Заметим, что в дальнейшем верхние индексы при s_i^k, t_k^n у $x_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}$, $y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}$ будем опускать.

Лемма 1. *Пусть $\Delta_n[s, t] \subseteq \Delta_r[s, t]$ — измельчающиеся последовательности разбиений интервала $[s, t] \subseteq [0, T]$ и $\forall \tau \in (0, T)$ выполняется следующее условие*:

$$y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} = 0. \tag{7}$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$, $\forall n \geqslant n_\varepsilon$, $\forall r$

$$\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k}\Big| < \varepsilon. \qquad (8)$$

Здесь $\Delta_n[s, t] = \{s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant tm_n = t\}$.

Доказательство. Перепишем (8) следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k}\Big| = \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - \sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i}\sum_{i=1}^{r_k} v_{s_{i-1}}^{s_i}\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i\neq j}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} x_{s_{j-1}}^{s_j}\Big| = \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i<j} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{j-1}}^{s_j} + \sum_{j<i} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{j-1}}^{s_j}\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k} y_{t_{k-1}}^{s_{i-1}} v_{s_{i-1}}^{s_i} + \sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{t_{k-1}}^{s_{i-1}}\Big| = \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}[y_{t_{k-1}}^{s_{i-1}} v_{s_{i-1}}^{s_i} + y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{t_{k-1}}^{s_{i-1}}]\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}[(y_0^{s_{i-1}} - y_0^{t_{k-1}})(v_0^{s_i} - v_0^{s_{i-1}}) + (y_0^{s_i} - y_0^{s_{i-1}})(v_0^{s_{i-1}} - v_0^{t_{k-1}})]\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}[(y(s_{i-1}) - y(t_{k-1}))(v(s_i) - v(s_{i-1})) + (y(s_i) -$$

$$- y(s_{i-1}))(v(s_{i-1}) - v(t_{k-1}))]\Big|, \qquad (9)$$

где $y_0^t = y(t)$, $v_0^t = v(t)$.

По определению a-систем вариации $y(t)$ и $v(t)$ ограничены, поэтому они имеют на $[0, T]$ только счетное количество скачков, из которых всегда можно выделить конечное число скачков так, чтобы сумма норм всех оставшихся скачков для каждой a-системы не превышала $1/8\ \varepsilon \min\{\mathrm{var}^{-1} y, \mathrm{var}^{-1} v\}$. Занумеруем все точки скачков $\{\theta_i\}$, $i = \overline{1, \infty}$, функций $y(t)$ и $v(t)$ на $[0, T]$ так, чтобы первые $N(\varepsilon)$ из них были именно теми, в которых выполняются выделенные скачки, и представим $y(t)$ и $v(t)$ на $[0, T]$ в виде

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t),$$
$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t),$$

где $y_1(t)$, $v_1(t)$ — непрерывны на $[0, T]$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ ступенчатые, причем скачки $y_3(t)$ и $v_3(t)$ совпадают по месту и величине с теми скачками $y(t)$ и $v(t)$, которые попали в выделенные $N(\varepsilon)$ скачков и только с ними, скачки $y_2(t)$, $v_2(t)$ — с теми скачками $y(t)$ и $v(t)$, которые остались и только с ними, кроме того, все $y_i(t)$, $v_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, имеют ограниченную вариацию на $[0, T]$ и в каждой общей точке разрыва $y_i(t)$, $v_i(t)$, $i = 2, 3$, выполнено условие (6).

Представим правую часть равенства (9) в виде следующей суммы:

$$\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}(y_1(s_{i-1}) - y_1(t_{k-1}))(v(s_i) - v(s_{i-1})) + (y_1(s_i) - y_1(s_{i-1}))(v(s_{i-1}) -$$

$$- v(t_{k-1}))\Big| + \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}(y_2(s_{i-1}) - y_2(t_{k-1}))(v(s_i) - v(s_{i-1})) + (y_2(s_i) -$$

$$- y_2(s_{i-1}))(v(s_{i-1}) - v(t_{k-1}))\Big| + \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}(y_3(s_{i-1}) - y_3(t_{k-1})(v_1(s_i) - v_1(s_{i-1})) +$$

$$+ (y_3(s_i) - y_3(s_{i-1}))(v_1(s_{i-1}) - v_1(t_{k-1}))\Big| + \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}(y_3(s_{i-1}) - y_3(t_{k-1}))(v_2(s_i) -$$

$$-v_2(s_{i-1})) + (y_3(s_i) - y_3(s_{i-1}))(v_2(s_{i-1}) - v_2(t_{k-1}))\Big| + \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{i=1}^{r_k}(y_3(s_{i-1}) -$$

$$-y_3(t_{k-1}))(v_3(s_i) - v_3(s_{i-1}) + (y_3(s_i) - y_3(s_{i-1}))(v_3(s_{i-1}) - v_3(t_{k-1}))\Big|.$$

Заметим, что как только δ_n с ростом n станет меньше $\min\limits_{0<i\neq j\leqslant N(\varepsilon)}|\Theta_i - \Theta_j|$, пятое слагаемое тождественно будет равно нулю. Действительно, в этом случае в отрезке $[t_{k-1}, s_i]$ может находиться не более одной точки скачка. При этом если точка скачка попала в $[t_{k-1}, s_{i-1})$, то это ноль в силу постоянства $y_3(t)$ и $v_3(t)$ на $[s_{i-1}, s_i]$; если же точка скачка попала в $[s_{i-1}, s_i]$, то это ноль в силу постоянства $y_3(t)$ и $(v_3)(t)$ на $[t_{k-1}, s_{i-1}]$. А если точка скачка попала в s_{i-1}, то это ноль в силу (7). Первое слагаемое этой суммы не превышает величину

$$\sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant m_n\\ 1\leqslant i\leqslant r_k}}|y_1(s_{i-1}) - y_1(t_{k-1})|\operatorname*{var}_{[s,t]} v + \sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant m_n\\ 1\leqslant i\leqslant r_k}}|y_1(s_i) - y_1(s_{i-1})|\operatorname*{var}_{[s,t]} v$$

и может быть сделано меньше $\varepsilon/4$ при $\delta_n \to 0$ за счет равномерной непрерывности $y_1(t)$. Второе слагаемое не превышает величину

$$\sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant m_n\\ 1\leqslant i\leqslant r_k}}|y_2(s_{i-1}) - y_2(t_{k-1})|\operatorname*{var}_{[s,t]} v + \sup_{\substack{1\leqslant k\leqslant m_n\\ 1\leqslant i\leqslant r_k}}|y_2(s_i) - y_2(s_{i-1})|\operatorname*{var}_{[s,t]} v,$$

что в свою очередь в силу свойств $y_2(t)$ меньше чем

$$\left(\frac{1}{8}\varepsilon\min\{\operatorname{var}^{-1}y, \operatorname{var}^{-1}(v)\} + \frac{1}{8}\varepsilon\min\{\operatorname{var}^{-1}y, \operatorname{var}^{-1}v\}\right)\operatorname*{var}_{[s,t]} v < \varepsilon/4.$$

Четвертое слагаемое аналогично второму не превышает $\varepsilon/4$ в силу свойств $v_2(t)$.

Как только с ростом n δ_n будет меньше $\min\limits_{0<i\neq j<N(\varepsilon)}|\Theta_i - \Theta_j|$, то в двойной сумме третьего слагаемого останется не более $2N(\varepsilon)$ слагаемых, отличных от нуля. Каждое из этих слагаемых в этом случае не будет превышать величину

$$|(y_3(s_{i-1}) - y_3(t_{k-1}))\sup_{|s-u|\leqslant\max|t_k - s_{i-1}|}(v_1(s) - v_1(u)) +$$

$$+ (y_3(s_i) - y_3(s_{i-1}))\sup_{|s-u|\leqslant\max|t_k - s_{i-1}|}(v_1(s) - v_1(u)|,$$

если $t_{k-1}\leqslant\Theta_j\leqslant s_{i-1}\leqslant t_k$ при некотором Θ_j, $j = \overline{1, N(\varepsilon)}$, и в силу равномерной непрерывности $v_1(t)$ на $[s, t]$ может быть сделано меньше $\varepsilon(8N(\varepsilon)\times\times\operatorname{var} v)^{-1}$. Поэтому все слагаемое меньше $\varepsilon/4$.

Лемма 2. *Условие* (7) *является необходимым и достаточным для того, чтобы предел* (4) *не зависел от измельчающейся последовательности разбиений* Δ_n $[s, t]$.

Доказательство. Аналогично [8] лемму достаточно доказать для монотонных измельчающихся разбиений. Покажем, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)$ $\forall\Delta_n : \delta_n<\delta(\varepsilon)$, $\forall\Delta_r : \Delta_r\supset\Delta_n$ справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} - \sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i}\Big| < \varepsilon.$$

Достаточность является тривиальным следствием леммы 1. Докажем **необходимость**. Рассмотрим для некоторого $\tau\in\Delta_n$ разность

$$\Sigma[\Delta_n\cup\tau] - \Sigma[\Delta_n] = y_{t_{k-1}}^{\tau} v_{t_{k-1}}^{\tau} + y_{\tau}^{t_k} v_{\tau}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} = y_{t_{k-1}}^{\tau} v_{t_{k-1}}^{\tau} +$$

$$+ y_{\tau}^{t_k} v_{\tau}^{t_k} - (y_{t_{k-1}}^{\tau} + y_{\tau}^{t_k})(v_{t_{k-1}}^{\tau} + v_{\tau}^{t_k}) = y_{t_{k-1}}^{\tau} v_{\tau}^{t_k} +$$

$$+ y_{\tau}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{\tau} \underset{\delta_n \to 0}{\longrightarrow} y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} = 0,$$

что и требовалось показать.

Следствие 1. *Условие* (7) *является необходимым и достаточным для того, чтобы* ω_s^t *удовлетворяла следующему аддитивному эволюционному соотношению:*

$$\omega_s^{\tau} + \omega_{\tau}^t = \omega_s^t, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T.$$

Этот факт является очевидным в силу того, что точку τ всегда можно присоединить к разбиениям $\{\Delta_n\}$.

Замечание 1. Для того чтобы система $y_s^t + v_s^t$ являлась a-системой, необходимо и достаточно, чтобы y_s^t и v_s^t удовлетворяли условию

$$y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} = 0. \tag{10}$$

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Условия* (7) *и* (10) *влекут следующие условия*:

$$y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} = v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+}. \tag{11}$$

Следствие 3. *Любые пары условий из* (7), (10) *и* (11) *эквивалентны.*

Следствие 4. *Для того чтобы* ω_s^t *и* $y_s^t + v_s^t$ *являлись а-системами одновременно, необходимо и достаточно выполнения любой пары из условий* (7), (10), (11).

Следствие 5. *Для того чтобы* $y_s^t + v_s^t + \omega_s^t$ *являлась а-системой, достаточно выполнения любой пары из условий* (7), (10), (11).

Доказательство следствия 5. Условия аддитивности и ограниченности вариации очевидны. Проверим выполнение условия регулярности, воспользовавшись соотношениями

$$\omega_{\tau-}^{\tau} = y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau-}^{\tau}, \quad \omega_{\tau}^{\tau+} = y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau}^{\tau+},$$

$$(y_{\tau-}^{\tau} + v_{\tau-}^{\tau} + \omega_{\tau-}^{\tau})(y_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau}^{\tau+} + \omega_{\tau}^{\tau+}) = y_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + \omega_{\tau-}^{\tau} \omega_{\tau}^{\tau+} +$$
$$+ y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau-}^{\tau} \omega_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau-}^{\tau} \omega_{\tau}^{\tau+} + \omega_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} + \omega_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} =$$
$$= y_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau}^{\tau+} + v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} =$$
$$= v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau-}^{\tau} v_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} = y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} v_{\tau}^{\tau+} + y_{\tau-}^{\tau} y_{\tau}^{\tau+} v_{\tau-}^{\tau} = 0.$$

Лемма 3. *При условии* (7) *справедливо соотношение*

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{m_n} | \omega_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} | \to 0, \quad \delta_n \to 0. \tag{12}$$

Доказательство. Перепишем γ_n следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m_n} | \omega_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} | = \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \lim_{\delta_r \to 0} \sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k}) \Big| =$$
$$= \lim_{\delta_r \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \sum_{i=1}^{r_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} \Big| .$$

Теперь из леммы 1 соотношение (12) вытекает очевидным образом.

Замечание 2. По формулам, полученным в [1] для m-систем x_s^t и u_s^t и их инфинитезимальных систем $D(x)_s^t = y_s^t$ и $D(u)_s^t = v_s^t$, находим соотношения

$$x_{\tau-}^{\tau} - I = y_{\tau-}^{\tau}, \quad x_{\tau}^{\tau+} - I = y_{\tau}^{\tau+}, \quad u_{\tau-}^{\tau} - I = v_{\tau-}^{\tau}, \quad u_{\tau}^{\tau+} - I = v_{\tau}^{\tau+}, \tag{13}$$

в силу которых условия (7), (10), (11) могут быть представлены в виде

$$(x_{\tau-}^{\tau} - I)(u_{\tau}^{\tau+} - I) + (x_{\tau}^{\tau+} - I)(u_{\tau-}^{\tau} - I) = 0, \tag{14}$$

$$(x^{\tau}_{\tau-} - I)(u^{\tau+}_{\tau} - I) + (u^{\tau}_{\tau-} - I)(x^{\tau+}_{\tau} - I) = 0, \tag{15}$$

$$x^{\tau+}_{\tau} u^{\tau}_{\tau-} = u^{\tau}_{\tau-} x^{\tau+}_{\tau}, \tag{16}$$

любые пары из которых эквивалентны.

Теорема 1. *Любой пары из условий* (7), (10), (11) *или* (14)—(16) *достаточно, чтобы смешанное произведение m-систем* y^t_s *и* u^t_s *определяло m-систему, для которой была бы справедлива формула* (2).

Доказательство. В силу следствия (5) и формулы $D(D^{-1}(y)^t_s = u^t_s$ из [1] для доказательства теоремы достаточно показать, что справедливо равенство

$$(y \boxplus u)^t_s = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x^{t_k}_{t_{k-1}} u^{t_k}_{t_{k-1}} =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + v^{t_k}_{t_{k-1}} + w^{t_k}_{t_{k-1}} + I) = D^{-1}(y + v + w)^t_s, \tag{17}$$

которое вытекает из соотношения

$$\lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + v^{t_k}_{t_{k-1}} + w^{t_k}_{t_{k-1}} + I) = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + I)(v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x^{t_k}_{t_{k-1}} (v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x^{t_k}_{t_{k-1}} u^{t_k}_{t_{k-1}} = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + I) u^{t_k}_{t_{k-1}}, \tag{18}$$

к доказательству которого мы и переходим. Для доказательства первого из равенств оценим разность

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + I)(v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + v^{t_k}_{t_{k-1}} + \omega^{t_{k-1}}_{t_{k-1}} + I) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + I)(v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) [y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}} - \omega^{t_k}_{t_{k-1}}] \times$$

$$\times \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + v^{t_i}_{t_{i-}} + \omega^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \leqslant \sup_k \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + I)(v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \times$$

$$\times \sup_k \Big| \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + v^{t_i}_{t_{i-1}} + w^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} | [y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}} - \omega^{t_k}_{t_{k-1}}] | \leqslant C\gamma_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Докажем второе равенство:

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} + I)(v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x^{t_k}_{t_{k-1}} (v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) \Big| \leqslant \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \times$$

$$\times (v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) [(y^{t_k}_{t_{k-1}} - x^{t_k}_{t_{k-1}} + I)(v^{t_k}_{t_{k-1}} + I)] \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} x^{t_i}_{t_{i-1}} (v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \Big| \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (y^{t_i}_{t_{i-1}} + I)(v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \sum_{k=1}^{m_n} | [y^{t_k}_{t_{k-1}} - x^{t_k}_{t_{k-1}} + I] | \times$$

$$\times \sup_k (v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) \sup_k \Big| \prod_{i=k+1}^{m_n} x^{t_i}_{t_{i-1}} (v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Третье равенство вытекает из следующего:

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x^{t_k}_{t_{k-1}} (v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} x^{t_k}_{t_{k-1}} u^{t_k}_{t_{k-1}} \Big| \leqslant \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} x^{t_i}_{t_{i-1}} (v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \times$$

$$\times [x^{t_k}_{t_{k-1}} (I + v^{t_k}_{t_{k-1}} - u^{t_k}_{t_{k-1}})] \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} x^{t_i}_{t_{i-1}} u^{t_i}_{t_{i-1}} \Big| \leqslant \Big| \sup_k \prod_{i=1}^{k-1} x^{t_i}_{t_{i-1}} (v^{t_i}_{t_{i+1}} + I) \Big| \times$$

$$\times \sup_k | x^{t_k}_{t_{k-1}} | \sum_{k=1}^{m_n} | (v^{t_k}_{t_{k-1}} + I - u^{t_k}_{t_{k-1}}) | \sup_k \Big| \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} x^{t_i}_{t_{i-1}} u^{t_i}_{t_{i-1}} \Big| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Четвертое равенство выполняется из соображений симметрии.

Представляет интерес первообразная m-система $D^{-1} (y \boxplus v)^t_s$ для смешанной суммы $(y \boxplus v)^t_t$ a-систем y^t_s и v^t_s. В силу следствия 4 и результатов [1] $D^{-1} (y \boxplus v)^t_s$ определены при любой паре из условий (7), (10), (11).

Теорема 2. *Если выполняется любая пара условий из* (7), (10), (11) *или* (14) — (16), *то справедливо следующее равенство*:

$$D^{-1} (w)^t_s = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (w^{t_k}_{t_{k-1}} + I) = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_{k-1}}_{t_{k-1}} + I) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} (u^{t_k}_{t_{k-1}} - I) + I) = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} ((x^{t_k}_{t_{k-1}} - I) (u^{t_k}_{t_{k-1}} - I) + I) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} ((x^{t_k}_{t_{k-1}} - I) v^{t_k}_{t_{k-1}} + I), \quad x^t_s = D^{-1} (y)^t_s, \quad u^t_s = D^{-1} (v)^t_s. \tag{19}$$

Для доказательства первого из входящих в (19) равенств оценим следующую разность:

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (w^{t_k}_{t_{k-1}} + I) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} (\omega^{t_i}_{t_{i-1}} + I) (\omega^{t_k}_{t_{k-1}} -$$

$$- y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}}) \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (y^{t_i}_{t_{i-1}} v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \Big| \leqslant \sup_k \prod_{i=1}^{k-1} | \omega^{t_i}_{t_{i-1}} + I | \sup_k \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} | y^{t_i}_{t_{i-1}} v^{t_i}_{t_{i-1}} +$$

$$+ I | \sum_{k=1}^{m_n} | \omega^{t_k}_{t_{k-1}} - y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}} | \leqslant \exp \Big\{ \sum_{k=1}^{m_n} | \omega^{t_i}_{t_{i-1}} | \Big\} \times$$

$$\times \exp \Big\{ \sum_{k=1}^{m_n} | y^{t_i}_{t_{i-1}} | | v^{t_i}_{t_{i-1}} | \Big\} \times \gamma_n \leqslant C \gamma_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Докажем второе из равенств. Для этого оценим выражение

$$\Big| \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}} + I) - \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y^{t_k}_{t_{k-1}} (u^{t_k}_{t_{k-1}} - I) + I) \Big| = \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (y^{t_i}_{t_{i-1}} v^{t_i}_{t_{i-1}} + I) \times$$

$$\times (y^{t_k}_{t_{k-1}} v^{t_k}_{t_{k-1}} - y^{t_k}_{t_{k-1}} (u^{t_k}_{t_{k-1}} - I)) \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} (y^{t_i}_{t_{i-1}} (u^{t_i}_{t_{i-1}} - I) + I) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \overrightarrow{\prod_{i=1}^{k-1}} |(y_{t_{i-1}}^{t_i} v_{t_{i-1}}^{t_i} + I)| \sup_k \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} |(y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - I) + I)| \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}(v_{t_{k-1}}^{t_k} - u_{t_{k-1}}^{t_k} + I)| \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{m_n} |v_{t_{k-1}}^{t_k} - (u_{t_{k-1}}^{t_k} - I)| \to 0, \quad \delta_n \to 0,$$

где C_1 — некоторая константа. Докажем третье равенство:

$$\left|\overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (y_{t_{k-1}}^{t_k}(u_{t_{k-1}}^{t_k} - I) + I) - \overrightarrow{\sum_{k=1}^{m_n}} ((x_{t_{k-1}}^{t_k} - I)(u_{t_{k-1}}^{t_k} - I) + I)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - I) + I) [y_{t_{k-1}}^{t_k}(u_{t_{k-1}}^{t_k} - I) - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - I)(u_{t_{k-1}}^{t_k} - I) \Big| \times$$

$$\times \left| \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} ((x_{t_{i-1}}^{t_i} - I)(u_{t_{i-1}}^{t_i} - I) + I)\right| \leqslant \sup_k \prod_{i=1}^{k-1} |y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - I) + I| \times$$

$$\times \sup_k \overrightarrow{\prod_{i=k+1}^{m_n}} |(x_{t_{i-1}}^{t_i} - I)(u_{t_{i-1}}^{t_i} - I) + I| \sum_{k=1}^{m_n} |(y_{t_{k-1}}^{t_k} - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - I)) \times$$

$$\times (u_{t_{k-1}}^{t_k} - I)| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_{k-1}} - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - I)| \to 0, \quad \delta_n \to 0,$$

где C_2 — некоторая константа.

Четвертое равенство в (7) выполняется из соображений симметрии.

В заключение приведем формулы, выражающие первообразную m-систему $D^{-1}(y_s^t + v_s^t)$ для суммы a-систем y_s^t и v_s^t (которая также является a-системой при условии (10) в силу замечания (1)) через $D^{-1}(y)_s^t = x_s^t$ и $D^{-1}(v)_s^t = u_s^t$:

$$D_l^{-1}(y+v)_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \overrightarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (x_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - I),$$

$$D_r^{-1}(x+v)_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \overleftarrow{\prod_{k=1}^{m_n}} (x_{t_{k-1}}^{t_k} + u_{t_{k-1}}^{t_k} - I).$$

Индексы l и r у x_s^t и u_s^t можно расставлять в правых частях этих формул произвольным образом. Эти формулы были получены в [4], и с учетом результатов [1] нетрудно показать, что они справедливы и в рассматриваемом случае.

Замечание 3. Операции $\boxtimes$ и $\boxplus$, очевидно, не коммутативны в общем случае для скачкообразных систем, в отличие от непрерывных систем [7]. И в настоящей работе для определенности все результаты приведены для $x_s^t \boxtimes u_s^t$ и $y_s^t \boxplus v_s^t$ в указанном порядке. Легко видеть, что для $u_s^t \boxtimes x_s^t$ и $v_s^t \boxplus y_s^t$ условия (7), (10), (11) и (14) — (16) примут соответственно следующий вид:

$$v_\tau^\tau\ y_{\tau-}^{\tau+} + v_\tau^{\tau+} y_{\tau-}^\tau = 0,$$

$$v_{\tau-}^\tau y_\tau^{\tau+} + y_{\tau-}^\tau v_\tau^{\tau+} = 0,$$

$$v_\tau^{\tau+} y_{\tau-}^\tau = y_{\tau-}^\tau v_\tau^{\tau+},$$

$$(u_{\tau-}^\tau - I)(x_\tau^{\tau+} - I) + (u_\tau^{\tau+} - I)(x_{\tau-}^\tau - I) = 0,$$

$$(u_{\tau-}^\tau - I)(x_\tau^{\tau+} - I) + (x_{\tau-}^\tau - I)(u_\tau^{\tau+} - I) = 0,$$

$$(u_\tau^{\tau+} - I)(x_{\tau-}^\tau - I) = (x_{\tau-}^\tau - I)(u_\tau^{\tau+} - I)$$

и для справедливости указанных выше теорем в любом порядке «смешанных сомножителей» или «слагаемых» приходится требовать выполнимость этих условий одновременно.

1. *Козаченко М. Ю.* Необходимое и достаточное условие изоморфизма мультипликативных и аддитивных систем без условий непрерывности с точностью до измельчающихся разбиений // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 5.— С. 576—583.
2. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных параметрических полугрупп без условий непрерывности // Там же.— 1985.— **37**, № 2.— С. 168—175.
3. *Каратаева Т. В.* Соотношения между правыми и левыми мультипликативными полугруппами без условий непрерывности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 8—11.
4. *Каратаева Т. В.* Гомеоморфизм мультипликативных и аддитивных полугрупп без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 3.— С. 309—315.
5. *Каратаева Т. В* О смешанном произведении эволюционных мультипликативных систем без условий непрерывности // Там же.— № 4.— С. 444—450.
6. *Trotter H. F.* On the product of semigroups of operators // Proc. Amer. Math. Soc.— 1959.— **10**, N 4.— P. 545—551.
7. *Буцан Г. П.* Мультипликативные параметрические полугруппы // Кибернетика.— 1978. — 3.— С. 38—43.
8. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 3—6.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 12.11.87