УДК 551.517

Г. И. Ибрагимов

Базисы из экспонент в пространствах $E^p(D^n)$ на полимногоугольнике и представление функций из этого пространства в виде суммы периодических

Для пространств $E^p(D^n)$ функций, заданных на декартовом произведении выпуклых многоугольников, установлено, что система экспонент специального вида образует базис. Указана зависимость показателей экспонент от вершин многоугольников.

Для просторів $E^p(D^n)$ функцій, заданих на декартовому добутку опуклих многокутників, установлено, що система еспонент спеціального виду утворює базис. Указана залежність показників експонент від вершин многокутників.

В работах [1—3] изучались базисы из экспонент в пространствах E^p, $1 < p < \infty$, на выпуклых многоугольниках комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и строились разложения функций из этих классов на суммы периодических в одномерном случае. В данной работе эти результаты обобщаются на случай функций многих переменных.

Пусть $D^n \subset \mathbb{C}^n$ — область вида $D^n = D_1 \times \ldots \times D_n$, где $D_\nu \subset \mathbb{C}$ — выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_{\nu,k}$, $k = 1, \ldots, N_\nu$; $N_\nu \geqslant 3$, содержащий начало координат; $\Gamma_\nu = \partial D_\nu$ — граница области D^ν, $\Gamma^n = \Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n$ — остов полиобласти D^n. Положим

$$L_\nu(\lambda) = \sum_{k=1}^{N_\nu} d_{\nu,k} \exp(\gamma_{\nu,k}\lambda), \quad d_{\nu,k} \neq 0, \quad \nu = 1, \ldots, n$$

и пусть $\Lambda_\nu = \{\lambda_{\nu,m}\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность нулей функции $L_\nu(\lambda)$, пронумерованная в порядке неубывания модулей. Нам потребуются следующие свойства $L_\nu(\lambda)$ [4, с. 56; 3]): 1) вдали от начала координат нули $L_\nu(\lambda)$ простые (обозначим их через $\lambda_{\nu,m}^{(j)}$) имеют вид

$$\lambda_{\nu,m}^{(j)} = \overset{0}{\lambda}{}_{\nu,m}^{(j)} + \delta_{\nu,m}^{(j)}; \qquad \overset{0}{\lambda}{}_{\nu,m}^{(j)} = 2\pi mi/(\gamma_{\nu,j+1} - \gamma_{\nu,j}) + q_{\nu,j}\exp(i\alpha_{\nu,j}),$$

$$|\delta_{\nu,m}^{(j)}| < A\exp(-am), \quad j = 1, \ldots, N_\nu; \quad \nu = 1, \ldots, n; \quad m > m_0(\nu, j).$$

Здесь и далее a, A, A_1, $A_2, \ldots$ —положительные постоянные, $\gamma_{\nu,N_\nu+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma_{\nu,1}$; $\alpha_{\nu,j}$, $q_{\nu,j}$ — некоторые числа, для которых

1) $\exp\{q_{\nu,j}(\gamma_{\nu,j+1} - \gamma_{\nu,j})\exp(i\alpha_{\nu,j})\} = -d_{\nu,j}/d_{\nu,j+1}$;

2) $\exists r > 1$, $a > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ $A_k > 0 : |(\lambda_{\nu,m}^{(j)})^k \exp(\lambda_{\nu,m}^{(j)} z_\nu)(L_\nu'(\lambda_{\nu,m}^{(j)}))^{-1} - (\overset{0}{\lambda}{}_{\nu,m}^{(j)})^k B_{\nu,j}(-1)^m \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_{\nu,m}^{(j)}(z_\nu - (\gamma_{\nu,j} + \gamma_{\nu,j+1})/2)\}| \leqslant A_k \exp(-am)$,

$$z_\nu \in r\overline{D}_\nu,$$

где $B_{\nu,j} \neq 0$ некоторые числа, $r\overline{D}_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} \{w \in \mathbb{C} : w = rz, z \in \overline{D}_\nu\}$. Учитывая свойство 1, в дальнейшем для простоты предполагается, что все нули $L_\nu(\lambda)$ простые.

Введем в рассмотрение некоторые классы функций. Обозначим через $E^p(D^n)$, $p \geqslant 1$ класс аналитических в D^n функций $f(z)$ таких, что $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}^n} \int\limits_{G_k} |f(z)|^p |dz_1| \ldots |dz_n| < \infty$, $C_k = C_{k_1}^{(1)} \times \ldots \times C_{k_n}^{(n)}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $C_\nu^{(j)} \subset D_j$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ — последовательность замкнутых спрямляемых контуров, стремящихся к Γ_j. Можно показать [5], что $f(z)$ имеет почти всюду на Γ^n угловые предельные значения, определяющие функцию (сохраним для нее прежнее обозначение f) из $L^p(\Gamma^n)$. После введения в $E^p(D^n)$ нормы по формуле $\|f\|_{E^p(D^n)} = \left\{\int\limits_{\Gamma^n} |f(z)|^p |dz_1| \dots |dz_n|\right\}^{1/p}$ пространство $E^p(D^n)$ становится банаховым. Через $AC(\overline{D}^n)$ обозначим класс функций, аналитических в D^n и непрерывных на $\overline{D}^n$. Норму в пространстве $AC(\overline{D}^n)$ определяем по обычной формуле $\|f\|_{C(\overline{D}^n)} = \max\limits_{z\in\overline{D}^n} |f(z)|$. Наконец, через $A(\overline{D}^n)$ обозначим класс функций, аналитических в некоторой полиобласти $D_1' \times \dots \times D_n'$, где $D_j' \supset \overline{D}_j$, $j = 1, \dots, n$. При $n = 1$, т. е. в одномерном случае, верхний индекс n не будем писать (например, $E^p(D_\nu^1) \equiv E^p(D_\nu)$).

С каждой функцией $f \in E^p(D^n)$ связывается ряд экспонент

$$f(z) \sim \sum_{m\in\mathbb{N}^n} \omega(f; \lambda_m) \exp(\langle\lambda_m, z\rangle) / \prod_{\nu=1}^{n} L_\nu'(\lambda_{\nu,m_\nu}), \quad m = (m_1, \dots, m_n), \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются по формуле

$$\omega(f; \lambda_m) = \int\limits_{\Gamma^n} d\sigma(\xi) \int\limits_0^{\xi_1} \dots \int\limits_0^{\xi_n} f(\xi - \eta) \exp(\langle\lambda_m, \eta\rangle)\, d\eta, \tag{2}$$

где $d\sigma(\xi) = d\sigma_1(\xi_1) \dots d\sigma_n(\xi_n)$, $\lambda_m = (\lambda_{1,m_1}, \dots, \lambda_{n,m_n})$, $\langle\lambda_m, z\rangle = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu,m_\nu} z_\nu$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ и $\sigma_\nu(t)$ — функция скачков в вершинах многоугольника D_ν, так что $L_\nu(\lambda) = \int\limits_{\Gamma_\nu} \exp(\lambda t)\, d\sigma_\nu(t)$. Определим операторы взятия частичных сумм ряда (1). При $n = 1$ для $m \in \mathbb{N}^n$ и функции $f \in E^p(D_\nu)$ через $S_m^{(\nu)}$ обозначим оператор, действующий по формуле

$$S_m^{(\nu)}(f)(z_\nu) = \sum_{k=1}^{m} \omega(f; \lambda_{\nu,k}) \exp(\lambda_{\nu,k} z_\nu) / L_\nu'(\lambda_{\nu,k}).$$

При $n > 1$ для любого вектора $m = (m_1, \dots, m_n)$ и функции $f \in E^p(D^n)$ через S_m обозначим оператор, действующий по формуле

$$S_m(f)(z) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=1}^{m_n} \omega(f; \lambda_k) \exp(\langle\lambda_k, z\rangle) / \prod_{\nu=1}^{n} L_\nu'(\lambda_{\nu,k_\nu}), \quad k = (k_1, \dots, k_n).$$

В случае $n > 1$ и $f \in E^p(D^n)$ под $S_{m_\nu}^{(\nu)}(f)$ будем понимать результат действия оператора $S_{m_\nu}^{(\nu)}$ на функцию f, рассматриваемую как функцию переменного z_ν при фиксированных остальных переменных. Легко проверяются следующие свойства введенных операторов: а) $S_m(f) = S_{m_1}^{(1)}(S_{m_2}^{(2)}(\dots$ $\dots(S_{m_n}^{(n)}(f))\dots))$; б) $S_{m_{\nu_1}}^{(1)} S_{m_{\nu_2}}^{(2)} = S_{m_{\nu_2}}^{(\nu_2)} S_{m_{\nu_1}}^{(\nu_1)}$. Приведем основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть* $f \in E^p(D^n)$, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\|f - S_m(f)\|_{E^p(D^n)} \to 0$ *при* $m_\nu \to \infty$, $\nu = 1, \dots, n$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in E^p(D^n)$, $1 < p < \infty$ *и* D_ν, $\nu = 1, \dots, n$, *имеет четное число вершин. Тогда имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n} f_{k_1 \dots k_n}(z) + \sum_{\mu_1=0}^{N_1/2} \sum_{k_2=1}^{N_2} \dots \sum_{k_n=1}^{N_n} \varphi_{\mu_1 k_2 \dots k_n}(z_2, \dots, z_n)\, z_1^{N_1/2-\mu_1} + \dots$$

$$\ldots + \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_{n-1}=1}^{N_{n-1}} \sum_{\mu_n=0}^{N_n/2} \varphi_{k_1 \ldots k_{n-1}\mu_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{N_n/2-\mu_n} +$$

$$+ \sum_{\mu_1=0}^{N_1/2} \sum_{\mu_2=0}^{N_2/2} \sum_{k_3=1}^{N_3} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \varphi_{\mu_1\mu_2 k_3 \ldots k_n}(z_3, \ldots, z_n) z_1^{N_1/2-\mu_1} z_2^{N_2/2-\mu_2} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_{n-2}=1}^{N_{n-2}} \sum_{\mu_{n-1}=0}^{N_{n-1}/2} \sum_{\mu_n=0}^{N_n/2} \varphi_{k_1 \ldots k_{n-2}\mu_{n-1}\mu_n}(z_1, \ldots, z_{n-2}) z_{n-1}^{N_{n-1}/2-\mu_{n-1}} \times$$

$$\times z_n^{N_n/2-\mu_n} + \ldots + \sum_{\mu_1=0}^{N_1/2} \cdots \sum_{\mu_n=0}^{N_n/2} \varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n} z_1^{N_1/2-\mu_1} \ldots z_n^{N_n/2-\mu_n}.$$

Здесь функция $f_{k_1 \ldots k_n}(z) \in E^p(D^n)$ *периодическая по каждой переменной* z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, *с периодом равным* $\gamma_{\nu, k_\nu+1} - \gamma_{\nu, k_\nu}$; $\varphi_{\mu_1 k_2 \ldots k_n}(z_2, \ldots, z_n) \in E^p(D_2 \times \ldots \times D_n)$ *периодическая по каждой переменной* z_ν, $\nu = 2, \ldots, n$ *с периодом равным* $\gamma_{\nu, k_\nu+1} - \gamma_{\nu, k_\nu}$ *и т. д.*; $\varphi_{k_1 \ldots k_{n-1}\mu_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in E^p(D_1 \times \ldots \times D_{n-1})$ *периодическая по каждой переменной* z_ν, $\nu = 1, \ldots, n-1$, *с периодом равным* $\gamma_{\nu, k_\nu+1} - \gamma_{\nu, k_\nu}$; $\varphi_{\mu_1\mu_2 k_3 \ldots k_n}(z_3, \ldots, z_n) \in E^p(D_3 \times \ldots \times D_n)$ *периодическая по каждой переменной* z_ν, $\nu = 3, \ldots, n$, *с периодом* $\gamma_{\nu, k_\nu+1} - \gamma_{\nu, k_\nu}$ *и т. д.* $\varphi_{k_1 \ldots k_{n-2}\mu_{n-1}\mu_n}(z_1, \ldots, z_{n-2}) \in E^p(D_1 \times \ldots \times D_{n-2})$ *периодическая по каждой переменной* z_ν, $\nu = 1, \ldots, n-2$, *с периодом равным* $\gamma_{\nu, k_\nu+1} - \gamma_{\nu, k_\nu}$ *и т. д.* $\varphi_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ — *некоторые числа.*

1. Доказательство теоремы 1. Как отмечалось выше в случае, когда $n = 1$, $f \in E^p(D_\nu)$, $1 < p < \infty$, имеет место соотношение

$$\| f - S_m^{(\nu)}(f) \|_{E^p(D_\nu)} \to 0, \quad m \to \infty. \tag{3}$$

Нам еще понадобится следующий результат, неявно содержащийся в работе [2].

Лемма 1. *Оператор* $S_m^{(\nu)} : E^p(D_\nu) \to E^p(D_\nu)$ *является ограниченным, т. е.*

$$\| S_m^{(\nu)}(f) \|_{E^p(D_\nu)} \leqslant A_p \| f \|_{E^p(D_\nu)} \quad \forall f \in E^p(D_\nu), \quad A_p = \mathrm{const.} \tag{4}$$

Доказательство теоремы проведем по индукции. При $n = 1$ теорема верна. Предполагая, что она верна при некотором $n > 1$, для $n + 1$ имеем (учитывая свойства а), б) оператора взятия частичных сумм ряда (1))

$$\| f - S_{(m_1, \ldots, m_{n+1})}(f) \|_{E^p(D^{n+1})} = \int_{\Gamma_1} \cdots \int_{\Gamma_{n+1}} | f - S_{m_{n+1}}(S_{(m_1, \ldots, m_n)}(f)) |^p \times$$

$$\times | dz_1 | \ldots | dz_{n+1} | \leqslant \int_{\Gamma^n} | dz_1 | \ldots | dz_n | \int_{\Gamma_{n+1}} | f - S_{m_{n+1}}(f) |^p | dz_{n+1} | +$$

$$+ \int_{\Gamma^n} | dz_1 | \ldots | dz_n | \int_{\Gamma_{n+1}} | S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_{n+1}}(S_{(m_1, \ldots, m_n)}(f)) |^p | dz_{n+1} |. \tag{5}$$

В силу (3) при фиксированных $z_1, \ldots, z_n$

$$\int_{\Gamma_{n+1}} | f - S_{m_{n+1}}(f) |^p | dz_{n+1} | \to 0, \quad m_{n+1} \to \infty. \tag{6}$$

С другой стороны, в силу (4) и условия $f \in E^p(D^{n+1})$ получаем

$$\int_{\Gamma_{n+1}} |f - S_{m_{n+1}}(f)|^p \, |dz_{n+1}| \leqslant 2^p (1 + A_p^p) \times$$
$$\times \int_{\Gamma_{n+1}} |f|^p \, |dz_{n+1}| \in L(\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_n). \tag{7}$$

Из (6), (7) в силу теоремы Лебега заключаем, что

$$\int_{\Gamma^n} |dz_1| \ldots |dz_n| \int_{\Gamma_{n+1}} |f - S_{m_{n+1}}(f)|^p \, |dz_{n+1}| \to 0 \tag{8}$$

при $m_{n+1} \to \infty$. Далее, из (4), используя свойства а) операторов взятия частичных сумм, легко находим

$$\| S_{(m_1, \ldots, m_n)}(f) \|_{E^p(D^n)} \leqslant A_p^p \| f \|_{E^p(D^n)} \quad \forall f \in E^p(D^n). \tag{9}$$

Используя (9), имеем

$$\int_{\Gamma^n} |f - S_{(m_1, \ldots, m_n)}(f)|^p \, |dz_1| \ldots |dz_n| \leqslant 2^p (1 + A_p^{np}) \times$$
$$\times \int_{\Gamma^n} |f|^p \, |dz_1| \ldots |dz_n| \in L(\Gamma_{n+1}). \tag{10}$$

Далее, используя (4), индуктивное предложение и (10), на основании теоремы Лебега получаем

$$\int_{\Gamma^n} |dz_1| \ldots |dz_n| \int_{\Gamma_{n+1}} |S_{m_{n+1}}(f) - S_{m_{n+1}}(S_{(m_1, \ldots, m_n)}(f))|^p \, |dz_{n+1}| \to 0 \tag{11}$$

при $m_\nu \to \infty$, $\nu = 1, \ldots, n$. Из (5), (8) следует $\| f - S_{(m_1, \ldots, m_{n+1})}(f) \|_{E^p(D^{n+1})} \to 0$, $m_\nu \to \infty$, $\nu = 1, \ldots, n+1$. Теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Для сокращения записи доказательство теоремы 2 проведем для случая $n = 2$. В этом случае следует доказать следующее представление:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} f_{k_1 k_2}(z_1, z_2) + \sum_{\mu_1=0}^{N_1/2} \sum_{k_2=1}^{N_2} \varphi_{\mu_1 k_2}(z_2) z_1^{N_1/2 - \mu_1} +$$
$$+ \sum_{\mu_2=0}^{N_2/2} \sum_{k_1=1}^{N_1} \varphi_{k_1 \mu_2}(z_1) z_2^{N_2/2 - \mu_2} + \sum_{\mu_1=0}^{N_1/2} \sum_{\mu_2=0}^{N_2/2} \varphi_{\mu_1 \mu_2} z_1^{N_1/2 - \mu_1} z_2^{N_2/2 - \mu_2}, \tag{12}$$

где функции, входящие в (12), обладают описанными в теореме свойствами. Нам потребуется следующая лемма, фактически содержащаяся в работе [6].

Лемма 2. *Пусть* $f \in A(\overline{D}_\nu)$, $\mu \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f(z_\nu)$ *можно представить в виде* $f(z_\nu) = \sum_{k=1}^{N_\nu} f_k(z_\nu) + P_{\mu-1}(z_\nu)$, *где*

$$f_k(z_\nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(f^{(\mu)}; w_{\nu,m}^{(k)}) (w_{\nu,m}^{(k)})^{-\mu} \exp(w_{\nu,m}^{(k)} z_\nu) / L'_\nu(w_{\nu,m}^{(k)}),$$

$$L_\nu(\lambda) = \exp(\varkappa_\nu \lambda) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \lambda / w_{\nu,m}^{(1)}) \ldots (1 - \lambda / w_{\nu,m}^{(N_\nu)}), \quad \varkappa_\nu \in \mathbb{C}, \quad w_{\nu,m}^{(k)} =$$

$$= 2\pi m i / (\gamma_{\nu,k+1} - \gamma_{\nu,k}), \quad k = 1, \ldots, N_\nu; \qquad P_{\mu-1}(z_\nu) = \sum_{j=0}^{\mu-1} \Big[f^{(\mu-1-j)}(0) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N_\nu} \sum_{m=1}^{\infty} \omega(f^{(\mu)}; w_{\nu,m}^{(k)}) (w_{\nu,m}^{(k)})^{-(j+1)} (L'_\nu(w_{\nu,m}^{(k)}))^{-1} \Big] z_\nu^{\mu-1-j}.$$

Кроме того, имеют место оценки

$$|f_k(z_\nu)| \leqslant A(\| f^{(\mu+1)} \|_{C(\Gamma'_\nu)} + \| f^{(\mu)} \|_{C(\Gamma'_\nu)}), \quad z_\nu \in \overline{D}_\nu, \tag{13}$$

$$|P_{\mu-1}(z_\nu)| \leqslant A(\| f^{(\mu+1)} \|_{C(\Gamma'_\nu)} + \| f^{(\mu)} \|_{C(\Gamma'_\nu)} + $$
$$+ |f^{(\mu-1)}(0)| + \ldots + |f(0)|), \quad z_\nu \in \overline{D}_\nu, \tag{14}$$

где Γ'_ν — *контур, охватывающий* $\overline{D}_\nu$, *на котором и внутри которого* $f(z_\nu)$ *аналитическая.*

Пусть теперь $f \in A(\overline{D}_1 \times \overline{D}_2)$. Применяя лемму 2 к функции $f(z_1, z_2)$ сначала по второй переменной z_2 при $\mu = N_2/2 + 1$, а затем по первой переменной z_1 при $\mu = N_1/2 + 1$, после простых (хотя громоздких) преобразований убедимся, что функцию $f(z_1, z_2)$ можно представить в виде (12). Таким образом, имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Функция* $f \in A(\overline{D}_1 \times \overline{D}_2)$ *представима в виде* (12), *где входящие в разложение* (12) *функции обладают свойствами, описанными в теореме* 2.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Используя свойства 1, 2 функции $L_\nu(\lambda)$ при $n = 1$, следуя [3], введем операторы $\sigma_m^{(\nu)} : E^p(D_\nu) \to \to E^p(D_\nu)$, действующие по формуле

$$\sigma_m^{(\nu)}(f)(z_\nu) = \sum_{k=1}^{m_0(\nu)} \omega(f; \lambda_{\nu,k}) \exp(\lambda_{\nu,k} z_\nu) \,|\, L'_\nu(\lambda_{\nu,k}) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_\nu} \sum_{k=m_0(\nu,j)}^{m} \omega(f; \lambda_{\nu,k}^{(j)}) (-1)^k \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_{\nu,k}^{(j)} (z_\nu - (\gamma_{\nu,j} + \gamma_{\nu,j+1})/2)\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_\nu} \sum_{k=m_0(\nu,j)}^{m} \omega(f; \lambda_{\nu,k}^{(j)}) [\exp(\lambda_{\nu,k}^{(j)} z_\nu)/L'_\nu(\lambda_{\nu,k}^{(j)}) -$$
$$- B_{\nu,j} (-1)^k \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_{\nu,k}^{(j)} (z_\nu - (\gamma_{\nu,j} + \gamma_{\nu,j+1})/2)\}, \tag{15}$$

где $m_0(\nu)$ выбрано так, что $\Lambda_\nu = \{\lambda_{\nu,k}\}_{k=1}^{m_0(\nu)} \cup \left\{\bigcup_{j=1}^{N_\nu} \{\lambda_{\nu,k}^{(j)}\}_{k=m_0(\nu,j)}^{\infty}\right\}$.

Полагая $\sigma_{m_1 m_2}(f)(z_1, z_2) \equiv \sigma_{m_1}^{(1)}(\sigma_{m_2}^{(2)}(f)(z_2))(z_1)$, используя свойство а) и повторно применяя (15) (сначала по одной, а затем по другой переменной), после преобразований получаем

$$\sigma_{m_1 m_2}(f)(z_1, z_2) = \sum_{k_1=1}^{m_0(1)} \sum_{k_2=1}^{m_0(2)} \omega(f; \lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,k_2}) \exp(\lambda_{1,k_1} z_1 + \lambda_{2,k_2} z_2)/L'_1(\lambda_{1,k_1}) \times$$
$$\times L'_2(\lambda_{2,k_2}) + \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_1=1}^{m_0(1)} \exp(\lambda_{1,k_1} z_1) (L'_1(\lambda_{1,k_1}))^{-1} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} \omega(f; \lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,k_2}^{(j_2)}) B_{2,j_2} \times$$
$$\times (-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_{2,k_2}^{(j_2)} (z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2\} + \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_1=1}^{m_0(1)} \exp(\lambda_{1,k_1} z_1) \times$$
$$\times (L'_1(\lambda_{1,k_1}))^{-1} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} \omega(f; \lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,k_2}^{(j_2)}) [\exp(\lambda_{2,k_2}^{(j_2)} z_2)/L'_2(\lambda_{2,k_2}^{(j_2)}) -$$
$$- B_{2,j_2} (-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_{2,k_2}^{(j_2)} (z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2\}] + \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{m_0(2)} \exp(\lambda_{2,k_2} z_2) \times$$
$$\times (L'_2(\lambda_{2,k_2}))^{-1} \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} \omega(f; \lambda_{1,k_1}^{(j_1)}, \lambda_{2,k_2}) B_{1,j_1} (-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}_{1,k_1}^{(j_1)} (z_1 - (\gamma_{1,j_1} +$$

$$+ \gamma_{1,j_1+1})/2)\} + \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{m_0(2)} \exp(\lambda_{2,k_2} z_2)\,(L_2'(\lambda_{2,k_2}))^{-1} \Big(\sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda_{2,k_2}) \times$$

$$\times [\exp(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1} z_1)\,(L_1'(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1}))^{-1} - B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}]\Big) +$$

$$+ \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} [\exp(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2} z_2)/L_2'(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) - B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 -$$

$$- (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}] \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda^{(j_2)}_{2,k_2})\, B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 -$$

$$- (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\} + \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} [\exp(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1} z_1)/L_1'(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1}) -$$

$$- B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}] \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) \times$$

$$\times B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\} + \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} \times$$

$$\times \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) [\exp(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1} z_1)/L_1'(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1}) - B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \times$$

$$\times \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}] [\exp(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2} z_2)/L_2'(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) - B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \times$$

$$\times \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}] + \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} \times$$

$$\times \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda^{(j_2)}_{2,k_2})\, B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\} \times$$

$$\times B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}. \tag{16}$$

Положим

$$F_{2,j_2,k_1}(z_2) = \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \omega(f;\lambda_{1,k_1},\lambda^{(j_2)}_{2,k_2})\, B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}, \tag{17}$$

$$F_{1,j_1,k_2}(z_1) = \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{\infty} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda_{2,k_2})\, B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}, \tag{18}$$

$$\Phi_{2,j_2,k_1}(z_2) = \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \omega(f;\lambda_{1,k_1},\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) [\exp(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2} z_2)/L_2'(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) - B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}], \tag{19}$$

$$\Phi_{1,j_1,k_2}(z_1) = \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{\infty} \omega(f;\lambda^{(j_1)}_{1,k_1},\lambda_{2,k_2}) [\exp(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1} z_1)/L_1'(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1}) - B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}], \tag{20}$$

$$E^2_{j_2, j_1, k_1}(z_2) = \sum_{k_2=m_0(2, j_2)}^{\infty} \omega(f;\ \lambda^{(j_1)}_{1,k_1}, \lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}, \tag{21}$$

$$E^1_{j_1, j_2, k_2}(z_1) = \sum_{k_1=m_0(1, j_1)}^{\infty} \omega(f;\ \lambda^{(j_1)}_{1,k_1}, \lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) B_{1,j_1}(-1)^{k_1} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}, \tag{22}$$

$$\Phi(z_1, z_2) = \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{\infty}\sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \omega(f;\ \lambda^{(j_1)}_{1,k_1}, \lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) \prod_{\nu=1}^{2} [\exp(\lambda^{(j_\nu)}_{\nu,k_\nu} z_\nu) \times (L'_\nu(\lambda^{(j_\nu)}_{\nu,k_\nu}))^{-1} - B_{\nu,j_\nu}(-1)^{k_\nu} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_\nu)}_{\nu,k_\nu}(z_\nu - (\gamma_{\nu,j_\nu} + \gamma_{\nu,j_\nu+1})/2)\}]. \tag{23}$$

Отметим [2], что ряды (17), (21) сходятся в метрике $E^p(D_2)$; ряды (18), (22) по тем же соображениям сходятся в метрике $E^p(D_1)$; ряд (19) в силу свойства 2 функции $L_\nu(\lambda)$ сходится абсолютно и равномерно на некоторой замкнутой области $\overline{D}{}'_2$ такой, что $D'_2 \supset \overline{D}_2$; аналогично ряд (20) сходится абсолютно и равномерно на некоторой замкнутой области $\overline{D}{}'_1$ такой, что $D'_1 \supset \overline{D}_1$, и ряд (23) сходится абсолютно и равномерно на $\overline{D}{}'_1 \times \overline{D}{}'_2$, так что, в частности, $F_{2,j_2,k_1}(z_2) \in E^p(D_2)$, $F_{1,j_1,k_2}(z_1) \in E^p(D_1)$, $\Phi_{2,j_2,k_1}(z_2) \in A(\overline{D}_2)$, $\Phi_{1,j_1,k_2}(z_1) \in A(\overline{D}_1)$, $F^2_{j_2,j_1,k_1}(z_2) \in E^p(D_2)$, $F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) \in E^p(D_1)$, $\Phi(z_1, z_2) \in A(\overline{D}_1 \times \overline{D}_2)$. Используя теорему 1, равенства (17) — (23) и переходя к пределу при $m_1, m_2 \to \infty$ в равенстве (16), получаем

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1=1}^{m_0(1)}\sum_{k_2=1}^{m_0(2)} \omega(f;\ \lambda_{1,k_1}, \lambda_{2,k_2}) \prod_{\nu=1}^{2} \exp(\lambda_{\nu,k_\nu} z_\nu)(L'_\nu(\lambda_{\nu,k_\nu}))^{-1} + \sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{k_1=1}^{m_0(1)} \exp(\lambda_{1,k_1} z_1)(L'_1(\lambda_{1,k_1}))^{-1} F_{2,j_2,k_1}(z_2) + \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{m_0(2)} \exp(\lambda_{2,k_2} z_2) \times (L'_2(\lambda_{2,k_2}))^{-1} F_{1,j_1,k_2}(z_1) + \sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{k_1=1}^{m_0(1)} \exp(\lambda_{1,k_1} z_1)(L'_1(\lambda_{1,k_1}))^{-1}\Phi_{2,j_2,k_1}(z_2) + \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{m_0(2)} \exp(\lambda_{2,k_2} z_2)(L'_2(\lambda_{2,k_2}))^{-1}\Phi_{1,j_1,k_2}(z_1) + \sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} [\exp(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2} z_2)(L'_2(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}))^{-1} - B_{2,j_2}(-1)^{k_2}\exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}] \sum_{j_1=1}^{N_1} F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) + \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{\infty} [\exp(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1} z_1) \times (L'_1(\lambda^{(j_1)}_{1,k_1}))^{-1} - B_{1,j_1}(-1)^{k_1}\exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}] \times \sum_{j_2=1}^{N_2} F^2_{j_2,j_1,k_1}(z_2) + \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{\infty}\sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \omega(f;\ \lambda^{(j_1)}_{1,k_1}, \lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) \times [B_{1,j_1}(-1)^{k_1}\exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_1)}_{1,k_1}(z_1 - (\gamma_{1,j_1} + \gamma_{1,j_1+1})/2)\}][B_{2,j_2}(-1)^{k_2} \times \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\}] + \Phi(z_1, z_2). \tag{24}$$

В силу изложенного выше необходимо объяснить существование предела $\lim\limits_{m_1, m_2\to\infty} \mathfrak{M}^{(j_1,j_2)}_{m_1 m_2}(f)$ в метрике E^p, где

$$\mathfrak{M}^{(j_1,j_2)}_{m_1 m_2}(f)(z_1, z_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k_1=m_0(1,j_1)}^{m_1} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{m_2} \omega(f; \lambda^{(j_1)}_{1,k_1}, \lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) \times$$

$$\times \prod_{\nu=1}^{2} B_{\nu, j_\nu}(-1)^{k_\nu} \exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_\nu)}_{\nu,k_\nu}(z_\nu - (\gamma_{\nu,j_\nu} + \gamma_{\nu,j_\nu+1})/2)\}.$$

В случае $n = 1$ этот факт установлен в [2]. При $n > 1$ доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Выберем теперь, следуя [6] (см. также [3]), коэффициенты $d_{\nu,k}$ квазиполинома $L_\nu(\lambda)$ в виде $d_{\nu,k} = (-1)^{k+1}$, $k = 1, \ldots, N_\nu$. Тогда функции $F_{2,j_2,k_1}(z_2)$, $F_{1,j_1,k_2}(z_1)$, $F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1)$, $F^2_{j_2,j_1,k_1}(z_2)$ окажутся периодическими с требуемыми периодами. Применив к функциям $\exp(\lambda_{1,k_1}z_1)(L_1'(\lambda_{1,k_1}))^{-1}$, $\exp(\lambda_{2,k_2}z_2)(L_2'(\lambda_{2,k_2}))^{-1}$ лемму 2 (при $\mu = N_1/2 + 1$ и $\mu = N_2/2 + 1$), для второго и третьего членов в равенстве (24) после несложных преобразований получим разложения вида (12). Применяя теперь лемму 3 к четвертому и пятому членам равенства (24), аналогично предыдущим получим разложения вида (12).

Рассмотрим шестой член в (24). На основании леммы 2

$$\exp(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}z_2)/L_2'(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) - B_{2,j_2}(-1)^{k_2}\exp\{\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} + \gamma_{2,j_2+1})/2)\} =$$

$$= \sum_{r_2=1}^{N_2} e_{r_2}(j_2, k_2, z_2) + \pi_{j_2,k_2}(z_2), \tag{25}$$

где $e_{r_2}(j_2, k_2, z_2)$ — периодическая функция с требуемыми периодами, π_{j_2,k_2} — алгебраический многочлен степени $N_2/2$, причем в силу (13), (14) и свойства 2 функции $L_\nu(\lambda)$ выполняются неравенства

$$|e_{r_2}(j_2, k_2, z_2)| \leqslant A\exp(-ak_2), \quad |\pi_{j_2,k_2}(z_2)| \leqslant A\exp(-ak_2), \quad z_2 \in \overline{D}_2. \tag{26}$$

Далее из результатов [2] можно вывести неравенство

$$\| F^1_{j_1,j_2,k_2}\|^p_{E^p(D_1)} \leqslant A^p_p \int_{\Gamma_1} |\omega(f(z_1, \cdot); \lambda^{(j_2)}_{2,k_2})|^p\, |dz_1|,$$

где

$$\omega(f(z_1, \cdot); \lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) = \int_{\Gamma_2} d\sigma_2(\xi) \int_0^{\xi} f(z_1, \eta)\exp\{\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}(\xi - \eta)\}\, d\eta,$$

из которого следует

$$\| F^1_{j_1,j_2,k_2}\|_{E^p(D_1\times D_2)} \leqslant A_p \|f\|_{E^p(D_1\times D_2)}. \tag{27}$$

Подставляя теперь (25) в шестой член равенства (24) и используя (26), (27), получаем

$$\sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} [\exp(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}z_2)/L_2'(\lambda^{(j_2)}_{2,k_2}) - B_{2,j_2}(-1)^{k_2}\exp\{\overset{0}{\lambda}{}^{(j_2)}_{2,k_2}(z_2 - (\gamma_{2,j_2} +$$

$$+ \gamma_{2,j_2+1})/2)\}] \sum_{j_1=1}^{N_1} F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) = \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \left[\sum_{r_2=1}^{N_2} e_{r_2}(j_2, k_2, z_2) + \pi_{j_2,k_2}(z_2)\right] \times$$

$$\times \sum_{j_1=1}^{N_1} F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) = \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{r_2=1}^{N_2} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} e_{r_2}(j_2, k_2, z_2) F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) +$$

$$+ \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \pi_{j_2,k_2}(z_2) F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1). \tag{28}$$

Отсюда видно, что первый член в (28) имеет вид (12) с требуемыми в теореме 2 свойствами слагаемых, а второй член легко приводится к виду (12). Действительно, полагая $\pi_{j_2,k_2}(z_2) = \sum_{s=0}^{N_2/2} a_s(j_2, k_2) z_2^s$, $a_s(j_2, k_2) \in \mathbb{C}$, имеем

$$\sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} \pi_{j_2,k_2}(z_2) F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{N_1} \sum_{s=0}^{N_2/2} \sum_{j_2=1}^{N_2} \sum_{k_2=m_0(2,j_2)}^{\infty} a_s(j_1, j_2) F^1_{j_1,j_2,k_2}(z_1) z_2^s.$$

Таким образом, шестой член в равенстве (24) приводится к виду (12) с требуемыми в теореме 2 свойствами слагаемых. Точно так же приводится к виду (12) седьмой член в (24). Так как восьмой член имеет вид (12) (с требуемыми в теореме 2 свойствами слагаемых), то для завершения доказательства теоремы 2 достаточно заметить, что первый и последний члены в равенстве (24) приводятся к виду (12) с помощью леммы 3. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Подобно одномерному случаю появление в разложении из теоремы 2 слагаемых от второго до последнего не случайно, так как суммами периодических функций рассматриваемые классы не исчерпываются.

1. *Седлецкий А. М.* Базисы из экспонент в пространствах E^p на выпуклых многоугольниках // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1978.— **32**, № 6.— С. 837—848.
2. *Мельник Ю. И.* О рядах Дирихле функций, регулярных в выпуклых многоугольниках // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 6.— С. 837—841.
3. *Мельник Ю. И.* Некоторые свойства рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 69—81.
4. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
5. *Рудин У.* Теория функций в поликруге.— М. : Мир, 1974.— 160 с.
6. *Леонтьев А. Ф.* О представлении аналитических функций в виде суммы периодических // Мат. сб.— 1974.— **93**, № 4.— С. 512—528.

Азерб. пед. ин-т

Получено 08.12.88