УДК 519.852+512.552.3

Г. В. Бабиков

Линейное программирование над упорядоченными телами

Рассмотрена теория линейного программирования над произвольным упорядоченным телом. Обобщены теоремы Фаркаша и двойственности. Дан метод решения рассматриваемых задач.

Розглянута теорія лінійного програмування над довільним впорядкованим тілом. Узагальнені теореми Фаркаша і подвійності. Приведено метод розв'язку розглянутих задач.

Теория линейных неравенств и линейного программирования (ЛП) над упорядоченными полями впервые была изложена С. Н. Черниковым [1].

Отдельные результаты ЛП над упорядоченными полями переносятся в область ЛП над частично упорядоченными кольцами [2—8] и некоторыми алгебраическими системами [9]. Однако в ЛП над упорядоченными телами переносятся не отдельные, а почти все результаты ЛП над упорядоченными полями, и таким образом, над упорядоченными телами можно создать стройную теорию ЛП.

Рассмотрим здесь чисто алгебраический подход, для чего будет использовано понятие универсальных обратных матриц (у. о. м.).

Пусть P — произвольное упорядоченное тело (например, упорядоченное некоммутативное тело, построенное Гильбертом). Пусть $\mathfrak{M}(P)$ обозначает множество всех прямоугольных, а $\mathfrak{M}^{mn}(P)$ — множество всех $m\times n$-матриц над P. На $\mathfrak{M}^{nn}(P)$ введем частичную функцию-десигнант.

О п р е д е л е н и е 1 [10]. *Десигнантом 1×1-матрицы $(a_{11})\in\mathfrak{M}^{11}(P)$ называется элемент $\Delta_{11}=a_{11}\in P$. Десигнантом матрицы $A=(a_{ij})\in\mathfrak{M}^{nn}(P)$ называется элемент из P вида $\Delta_n=\Delta_{n-2}(n,n)-\Delta_{n-2}(n,n-1)\Delta_{n-1}^{-1}\Delta_{n-2}(n-1,n)$ при предположении существования и обратимости в P десигнантов Δ_k, $k=1,\dots,n-1$, причем $\Delta_k(s,t)$ означает десигнант подматрицы, стоящей на пересечении строк с номерами $1,\dots,k,s$ и столбцов с номерами $1,\dots,k,t$ и $\Delta_0(s,t)=a_{st}$.*

Десигнант некоторой подматрицы матрицы A называется также поддесигнантом матрицы A.

Всякую матрицу $A\in\mathfrak{M}^{mn}(P)$ можно рассматривать (с точностью до нумерации строк и столбцов) как матрицу с r-цепочкой десигнантов (поддесигнанты Δ_k, $k=1,\dots,r$ существуют и обратимы в P, а все поддесигнанты большего порядка равны нулю).

Матрицу A с r-цепочкой десигнантов можно представить в виде [10]

$$A=V_A(v_{ji})D_A(d_{ii})U_A(u_{ij}), \tag{1}$$

где $d_{ii}=\Delta_i$, $v_{ji}=\Delta_{i-1}(j,i)\Delta_i^{-1}$, $u_{ij}=\Delta_i^{-1}\Delta_{i-1}(i,j)$ в случае $i\leqslant r_A$, и $d_{ii}=0$, v_{ji}, u_{ij} — произвольные элементы из P, если $i>r_A$, и D_A, V_A,

U_A — соответственно диагональная $p_A \times q_A$-матрица, нижняя унитреугольная $m \times p_A$-матрица и верхняя унитреугольная $q_A \times n$-матрица $(p_A, q_A \geqslant r_A)$. Наложим на тело P следующее ограничение: в P определен инволютивный антиавтоморфизм.

Для матрицы $A \in \mathfrak{M}^{mn}(P)$ введем сопровождающие векторы $\lambda \in P^m$ и $\mu \in P^n$ для строк и столбцов соответственно. Обозначим через A^* матрицу, полученную из матрицы A транспонированием и инволюцией ее элементов.

Определение 2 [3]. *Универсальной обратной матрицей (у. о. м.) $A^-_{\lambda\mu}$ к матрице A с системой сопровождений λ и μ будем называть матрицу* $A^-_{\lambda\mu} = U^*_C (V^*_C C U^*_C)^{-1} V^*_C \operatorname{diag}\lambda$, $p_C = q_C = r_C$, *где* $C = \operatorname{diag}\lambda \cdot A \times \operatorname{diag}\mu \cdot U^*_M (V^*_M \operatorname{diag}\mu \cdot U^*_M)^{-1} V^*_M$, $p_M = q_M = r_M$, $M = \operatorname{diag}\mu$.

В частных случаях:

при $\lambda = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mu = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ имеем $U^*_A (V^*_A A U^*_A) V^*_A = A^+$ — обобщенная обратная Мура — Пенроуза;

при $\lambda = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{r}, 0, \ldots, 0)$, $\mu = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{r}, 0, \ldots, 0)$ имеем

$$U_A^{-1} D_A^+ V_A^{-1} = A^-. \tag{2}$$

В последнем случае требование существования инволютивного антиавтоморфизма необязательно.

Так как AA^- и A^-A — соответственно нижняя и верхняя унитреугольные матрицы, то это предопределяет выбор у. о. м. вида (2) в задачах, связанных с решением систем линейных неравенств.

1. Некоторые общие результаты. Отметим, что в теории линейных неравенств над упорядоченными телами обобщается теорема Моцкина о представлении решений (односторонней) системы линейных неравенств [6].

Далее, справедливы теорема Фаркаша и теорема двойственности в ЛП.

Теорема 1 (Фаркаша). *Неравенство $\gamma^{\mathrm{T}}\xi \leqslant d$ является следствием совместной системы линейных неравенств $A\xi \leqslant \beta$, где A — $m \times n$-матрица с r_A-цепочкой десигнантов тогда и только тогда, когда существуют $\omega \in P^r_+$, $w \geqslant 0$ такие, что $\gamma^{\mathrm{T}}\xi - d = (\omega^{\mathrm{T}}, \theta^{\mathrm{T}})(A\xi - \beta) - w$, где θ — нулевой вектор из P^{n-r} (P_+ — множество неотрицательных элементов из P).*

Доказательство. Докажем необходимость. Обозначим $\bar{\xi} = (\xi^{\mathrm{T}}, 1)^{\mathrm{T}}$. Легко видеть, что из системы неравенств $A\xi \leqslant \beta$ следует

$$\bar{\xi} = -(A, -\beta)^- \, (\eta + (A, -\beta)\zeta) + \zeta, \quad \eta \in P^m_+,$$
$$\zeta = (z_1, \ldots z_n, 1)^{\mathrm{T}}, \quad z_i \in P, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Подставив это выражение в неравенство $\gamma^{\mathrm{T}}\xi \leqslant d$ и положив $z_1 = \ldots = z_n = 0$, получаем

$$\forall \eta \{(\gamma^{\mathrm{T}}, -d)(A, -\beta)^- (\eta - \beta) + d \geqslant 0, \quad \eta \geqslant 0\}. \tag{3}$$

Отсюда $(\gamma^{\mathrm{T}}, -d)(A, -\beta)^- \geqslant 0$. Положим $(\gamma^{\mathrm{T}}, -d)(A, -\beta)^- = (\omega^{\mathrm{T}}, \theta^r)^{\mathrm{T}}$. Из (3) следует

$$d \geqslant (\omega^{\mathrm{T}}, \quad \theta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\beta. \tag{4}$$

Рассматривая поочередно случаи $z_1 = \ldots = z_{i-1} = z_{i+1} = \ldots z_n = 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, аналогично предыдущему получаем

$$(\omega^{\mathrm{T}}, \theta^{\mathrm{T}}) A = \gamma^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует необходимость. Достаточность очевидна.

Обозначим $\eta = (\omega^{\mathrm{T}}, \theta^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Рассмотрим задачи: найти

$$\sup \{\gamma^{\mathrm{T}}\xi \mid A\xi - \beta \leqslant 0, \ \xi \geqslant 0\} \tag{6}$$

и

$$\inf\{\eta^{\intercal}\beta\,|\,\eta^{\intercal}A-\gamma^{\intercal}\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0\}\tag{7}$$

(A, β, γ, ξ, η имеют прежний смысл).

Для этих задач можно определить функцию Лагранжа $L(\xi,\eta)=\gamma^{\intercal}\xi+\eta^{\intercal}\beta-\eta^{\intercal}A\xi$ и основанное на ней понятие седловой точки.

Так как $L(\xi,\beta)=\gamma^{\intercal}\xi+\eta^{\intercal}(\beta-A\xi)=\eta^{\intercal}\beta+(\gamma^{\intercal}-\eta^{\intercal}A)\xi$, то $\gamma^{\intercal}\xi\leqslant\eta^{\intercal}\beta$ для допустимых ξ и η и для задач (6) и (7) справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (двойственности). *Если обе двойственные задачи* (6) *и* (7) *допустимы, то они имеют решения, причем оптимальные значения обеих задач совпадают.*

Отметим, что обращаясь от задачи (6) к двойственной задаче (7) над телом, мы переходим от правой линейной целевой функции и правой системы ограничений над этим телом к левой целевой функции и левой системе ограничений (см. [11, 12]).

2. Методы решений. S-метод. Для системы линейных однородных неравенств над телом $A\xi\leqslant 0$ можно ввести понятие фундаментальной системы решений и для их нахождения применить «алгоритм допустимых операций» [6], который для случая $P=R$ (R — поле действительных чисел) может быть переведен в алгоритм Бургера — Моцкина и в алгоритм уравновешивания строк Н. В. Черниковой [13].

Основное внимание в этой статье уделяется ЛП. Поэтому укажем на некоторые методы решения задач ЛП над телом [14, 15] и перейдем к изложению S-метода.

Пусть задача ЛП задана в стандартной постановке [1]

$$\sup\{f=c^{\intercal}x\,|\,Ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\},\ A\in\mathfrak{M}^{mn}(P).\tag{8}$$

Обозначим

$$A_0=A_0(a_{ij})=\begin{pmatrix}E_{nm} & A\\ 0_{nm} & -E_{nn}\end{pmatrix},\quad b^0=(b^{\intercal},0^{\intercal})^{\intercal},$$

$$c^0=(0^{\intercal},c^{\intercal})^{\intercal},\quad z=(y^{\intercal},x^{\intercal})^{\intercal}\in P^{m+n}.$$

Обозначим также $\alpha(j)=(0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0)^{\intercal}\in P^{m+n}$.

Определение 3. *Сопутствующей задачей к задаче* (8) *будем называть задачу*

$$\sup\{f=c^{0\intercal}z\,|\,A_0z\leqslant b^0\}.\tag{9}$$

Очевидно, $\sup c^{0\intercal}z=\sup c^{\intercal}x$ (или $c^{0\intercal}z^*=c^{\intercal}x^*$) и $z^*=(0^{\intercal},x^{*\intercal})^{\intercal}$, где x^* и z^* — точки, в которых достигаются решения задач (8) и (9).

Таким образом, решение задачи (8) сводится к решению задачи (9) с квадратной неособенной матрицей A_0 системы ограничений, причем $A_0^-=A_0^{-1}=A_0$, $A_0^-b^0=b^0$, $c^{0\intercal}A^-=-c^{0\intercal}$, $c^{0\intercal}A^-b^0=0$.

Введем множество N_0:

$$N_0=\{j\,|\sup_{i:(A_0\alpha(j))_i<0}\{0,(A_0\alpha(j))_i^{-1}b_i\}\leqslant\inf_{i:(A_0\alpha(j))_i\geqslant 0}\{(A_0\alpha(j))_i^{-1}b_i,\ \infty\}\},\tag{10}$$

положив по определению

$$0^{-1}a=\begin{cases}\infty, & a\geqslant 0,\\ -\infty, & a<0.\end{cases}$$

Найдем

$$\sup\nolimits_1 f=\sup\{c^{0\intercal}\alpha(j)\sup_{i:a_{ij}<0}\{0,a_{ij}^{-1}b_i^0\},\quad c^{0\intercal}\alpha(j)\inf_{i:a_{ij}\geqslant 0}\{a_{ij}^{-1}b_i^0,\ \infty\}\}.$$

Найдем также j_1, на котором достигается $\sup_1 f$.

Заменим j_1-е неравенство из системы $A_0z\leqslant b^0$ i_1-м неравенством системы $Ax\leqslant b$, где i_1 в зависимости от случая $c^{0\intercal}\alpha(j_1)\geqslant 0$ или $c^0\alpha(j_1)<0$

находится из соотношений $a_{i_1j_1}^{-1}b_{i_1}^0 = \inf_{i:a_{ij_1}\geqslant 0}\{a_{ij_1}^{-1}b_i^0, \infty\}$ или $a_{i_1j_1}^{-1}b_{i_1}^0 = \sup_{i:a_{ij_1}<0}\{0, a_{ij_1}^{-1}b_i^0\}$. При этом матрица системы неравенств A_0 перейдет в неособенную матрицу A_1 после замены j_1-й строки на i_1-ю строку матрицы A, дополненную слева нулями.

Введем обозначения

$$A_{k-1}^{-1}\alpha(j_k) = \xi_k, \quad (\xi_k)_i^{-1}(A_{k-1}^{-1}b^{k-1})_i = d_{ki}, \quad b^{k-1} - \alpha(j_k)\sup_{i:(\xi_k)_i<0}\{0, d_{ki}\} = \eta_{ki},$$

$$b^{k-1} - \alpha(j_k)\inf_{i:(\xi_k)_i\geqslant 0}\{d_{ki}, \infty\} = \zeta_{ki}, \quad b^{k-1} = A_{k-1}x^{k-1}.$$

Определение 4. *Назовем последовательность троек (S-объектов) $S_k = \{A_k, x^k, \sup_k f\}$, S-процессом, если $S_0 = \{A_0, b^0, 0\}$, $b^0 \geqslant 0$, $b^0 \neq 0$ и выполняются условия:*

1) *матрица A_k получается из матрицы A_{k-1} заменой j_k-й строки A_{k-1} на i_k-ю строку матрицы A, дополненную слева нулями;*

$$2)\ x^k = \begin{cases} A_{k-1}^{-1}\eta_{ki}, & \text{если } c^{0\tau}\xi_k \geqslant 0, \\ A_{k-1}^{-1}\zeta_{ki}, & \text{если } c^{0\tau}\xi_k < 0; \end{cases}$$

$$3)\ \sup_k f = \sup_{j_k\in N_{k-1}}\{c^{0\tau}A_{k-1}^{-1}\eta_{ki}, \quad c^{0\tau}A_{k-1}^{-1}\zeta_{ki}\},$$

где $N_{k-1} = \{j_k \mid \sup_{i:(\xi_k)_i<0}\{0, d_{ki}\} \leqslant \inf_{i:(\xi_k)_i\geqslant 0}\{d_{ki}, \infty\}\}$.

Определение 5. *Назовем последовательность $S_k = \{A_k, x^k, \sup_k f\}$ $\bar{S}$-процессом, если $b^0 \notin p_+^{m+n}$ и в определении 4 N_{k-1} заменить на $\bar{N}_{k-1}$* [16]

$$\bar{N}_{k-1} = \{j \mid \exists_i (d_{ki} > 0) \vee \forall i\, (\xi_k)_i \leqslant 0\}.$$

(Если $\sup_k f = \sup_{k-1} f$, то находим x^{k+1}, выбирая $i_{k-1} \leqslant m$, j_k так, чтобы число отрицательных компонент x_i^{k+1}, $i \leqslant m$, в векторе x^{k+1} было наименьшим.)

Теорема 3. *S-процесс ($\bar{S}$-процесс) обрывается через конечное число шагов.*

Доказательство. Выделим из системы неравенств $A_0 z \leqslant b^0$ i_1-е неравенство и рассмотрим соответствующую правую гиперплоскость $y_{i_1} + \ldots + a_{i_11}x_1 + \ldots + a_{i_1n}x_n = b_{i_1}$ [12]. Пересечение этой гиперплоскости с гиперплоскостью $y_{i_1} = 0$ совпадает с пересечением ее с гиперплоскостью $a_{i_1}x_{i_1} + \ldots + a_{i_1n}x_n = b_{i_1}$ (определяемой i_1-м неравенством системы $Ax \leqslant b$). Таким образом, две системы неравенств, полученные из системы $A_0 z \leqslant b^0$ заменой j_1-го неравенства неравенством $-y_{i_1} \leqslant 0$, или i_1-м неравенством системы $Ax \leqslant b$ определяют одну и ту же точку (вершину) x^1 и ребро, связывающее x^0 и x^1 [2]. Затем продолжаем этот процесс. Из условия 3 следует, что если при $k > 1$ $\sup_k f \neq c^{0\tau}A_{k-1}^{-1}b^{k-1}$, то $\sup_k f > c^{0\tau}A_{k-1}^{-1}b^{k-1} = c^{\tau}x^{k-1} = \sup_{k-1} f$. Это означает, что точка x^k, $k \geqslant 0$, в S-процессе проходится только один раз. А так как число замен неравенств из системы $A_0 z \leqslant b^0$ неравенствами из системы $Ax \leqslant b$ может быть лишь конечным, то S ($\bar{S}$)-процесс обрывается через конечное число шагов p, когда $\sup_{p+1} f = \sup_p f$ и $S_{p+1} = S_p$.

Замечание. S-процесс связан с чисто алгебраическими преобразованиями (причем не используется понятие опорного плана, не требуется регистрации номеров векторов текущего базиса, исключается зацикливание).

S-метод подобен симплекс-методу в случае $P = R$, но организация пути к оптимуму целевой функции по ребрам многогранника решений другая, чем в симплекс-методе. В $\bar{S}$-методе организуется «выход» (по ребрам другого многогранника) из области R_+^m, а затем он переходит в S-метод.

1. *Черников С. Н.* Линейные неравенства.— М.: Наука, 1968.— 488 с.
2. *Бабиков Г. В.* Универсальные обратные матрицы.— Свердловск, 1978.— 50 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 951-78.
3. *Бабиков Г. В.* Обобщенные обратные матрицы и их приложения в линейной алгебре и математическом программировании // Сообщения Объед. ин-та ядер. исслед.— Дубна: ОИЯИ, 1984.— 15 с.
4. *Бабиков Г. В.* Некоторые задачи оптимизации над кольцами матриц // VII Всесоюз. конф. «Проблемы теоретической кибернетики» : Тез. докл.— Иркутск : Иркут. ун-т, 1985.— С. 10—11.
5. *Бабиков Г. В.* О некоторых задачах линейной алгебры и линейного программирования над частично упорядоченными кольцами // Противоречивые модели оптимизации.— Свердловск : УНЦ АН СССР, 1987.— С. 12—20.
6. *Бабиков Г. В.* О системах линейных неравенств над частично упорядоченными кольцами // Несобственные модели мат. программирования.— Свердловск, 1980.—Ч. 2.— С. 115—162.— Деп. в ВИНИТИ, № 2824-80.
7. *Babikov G. V.* The use of generalized inverses of matrices in parametric programming // Parametric Optimization and Ill — Posed Problems in Mathematical Optimization. Seminarbericht N 81.— Berlin: Humbodt-Universität, 1986.— S. 13—26.
8. *Бабиков Г. В.* О некоторых обобщениях задач линейного программирования // Методы мат. программирования и программное обеспечение: Тез. докл.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987.— С. 12.
9. *Бабиков Г. В.* Об уравнениях и неравенствах над алгебраическими системами // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл.— Львов: Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, 1987.— Ч. 1.— С. 15.
10. *Бабиков Г. В.* О разложении матриц над некоторыми универсальными алгебрами // Докл. АН СССР.— 1982.— **267**, № 5.— С. 1033—1035.
11. *Бабиков Г. В.* Одна теорема о разложении матриц и ее применения к вопросам линейной алгебры над телами // Методы мат. программирования и их приложения.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.— С. 26—32.
12. *Артин Э.* Геометрическая алгебра.— М. : Наука, 1961.— 284 с.
13. *Черникова Н. В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1965.— **5**, № 2.— С. 334—337.
14. *Бабиков Г. В.* Об одном подходе к решению задач линейного программирования // Всесоюз. конф. «Динамическое управление»: Тез. докл.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.— С. 21—22.
15. *Бабиков Г. В.* Факторизации матриц и прямые методы в линейной алгебре и линейном программировании // Методы для нестационарных задач мат. программирования.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979.— С. 84—93.
16. *Бабиков Г. В.* Некоторые соотношения и зацикливание в линейном программировании // Методы оптимизации и распознавания образов в задачах планирования.— Свердловск, 1980.— С. 37—43.

Свердл. ин-т нар. хоз-ва

Получено 15.12.87