УДК 517.8

Ф. Деланоэ

Задача Дирихле для уравнения заданной лоренц-гауссовой кривизны

Известно, что существуют препятствия для разрешимости задачи Дирихле для строго выпуклых графов $x_{n+1} = F(x_1, \ldots, x_n)$ над ограниченной строго выпуклой областью с заданной положительной гауссовой кривизной. Доказывается, что нет таких препятствий для аналогичного случая в пространстве Минковского.

Відомо, що існують перешкоди для розв'язності задачі Діріхле для строго опуклих графів $x_{n+1} = F(x_1, \ldots, x_n)$ над обмеженою строго опуклою областю з заданою додатно гаусcовою кривиною. Доводиться, що нема таких перешкод для аналогічного випадку в просторі Мінковського.

1. Обозначим через $\mathbf{E}_{n,1}$ векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, снабженное метрикой Минковского $h = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ — гладкая функция на ней и $\tilde{\varphi} : x \in \Omega \to \tilde{\varphi}(x) = [x, \varphi(x)] \in \mathbf{E}_{n,1}$ — соответствующее погружение. Известно, что индуцированная метрика $\tilde{\varphi}^* h$ положительна невырождена тогда и только тогда, когда $|d\varphi| < 1$ (где $|\cdot|$ — стандартная евклидова норма). Если погружение $\tilde{\varphi} : \Omega \to \mathbf{E}_{n,1}$ такое, что $|d\varphi| < 1$ на Ω, то оно называется пространственно-подобным; например, таким является погружение $\tilde{\sigma}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbf{E}_{n,1}$, соответствующее функции $\sigma(x) = \sqrt{1 + |x|^2}$. Оно удовлетворяет тождеству $h(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}) \equiv -1$, так что гиперповерхность $\tilde{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ является простосвязной компонентой единичного псевдошара $\{X \in \mathbf{E}_{n,1}, |h(X, X) = 1\}$ пространства Минковского, кроме того, кривизна римановой метрики $\tilde{\sigma}^* h$ постоянна и равна -1, т. е. риманово многообразие $(\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma}^* h)$ совпадает с n-мерным гиперболическим пространством $\mathbf{H}_n(-1)$. Для произвольного пространственно-подобного погружения $\tilde{\varphi} : \Omega \to \mathbf{E}_{n,1}$ вектор $N_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - |d\varphi|^2}} \times (d\varphi, 1)$ лежит в $\tilde{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ и является нормальным в том смысле, что справедливо тождество $h(N_\varphi, d\tilde{\varphi}) \equiv 0$, а значит, можно определить некоторый аналог отображения Гаусса $\Gamma_\varphi : \Omega \to \mathbf{H}_n(-1)$ формулой $\Gamma_\varphi(x) = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - |d\varphi|^2}}(x)$. Назовем якобиан $K_\varphi = \det\left(\frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial x}\right)$ этого отображения лоренц-гауссовой кривизной погружения $\tilde{\varphi}$; он выражается через функцию φ по формуле

$$K_\varphi = \frac{\det(D^2\varphi)}{(1 - |d\varphi|^2)^{(n+2)/2}}, \qquad (1)$$

где $(D^2\varphi)$ — гессиан функции φ, значит, оператор $\varphi \to K_\varphi$ типа Монжа — Ампера. В частности, справедливо тождество $\Gamma_\sigma(x) \equiv x$ и $K_\sigma \equiv 1$.

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная строго выпуклая область класса C^∞. Обозначим $C_+(\bar{\Omega})$ открытый выпуклый конус банахова пространства $C^0(\bar{\Omega})$ непрерывных функций на $\bar{\Omega}$, состоящий из положительных функций, и $K_+(\bar{\Omega})$ — открытое выпуклое подмножество банахова пространства $C^2(\bar{\Omega})$, состоящее из строго выпуклых функций φ таких, что $|d\varphi| < 1$ на $\bar{\Omega}$. Можно проверить, что нелинейный дифференциальный оператор $K : \varphi \in K_+(\bar{\Omega}) \to K_\varphi \in C_+(\bar{\Omega})$ является эллиптическим и принадлежит классу C^∞.

Пусть

$$K_+^\infty(\partial\Omega) = \{\Psi \in C^\infty(\partial\Omega), \quad \exists\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_+(\bar{\Omega}), \quad \Psi = \varphi|_{\partial\Omega}\}.$$

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Подмножество $K_+^\infty(\partial\Omega)$ является открытым в $C^\infty(\partial\Omega)$ и отображение*

$$T: \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_+(\bar{\Omega}) \to (K_\varphi, \varphi|_{\partial\Omega}) \in [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap C_+(\bar{\Omega})] \times K_+^\infty(\partial\Omega)$$

является эпиморфным диффеоморфизмом класса C^∞.

Используя стандартные аргументы, можно убедиться, что дифференциал оператора T в любой точке

$$\varphi_0 \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_+(\bar{\Omega}),\ dT(\varphi_0): \delta\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \to [dK_{\varphi_0}(\delta\varphi), \delta\varphi|_{\partial\Omega}] \in C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\partial\Omega)$$

является линейным изоморфизмом. Таким образом, в силу теоремы о локальном обращении эллиптических операторов [1] теорема 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Для произвольных функций*

$$(\gamma, f) \in [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap C_+(\bar{\Omega})] \times [C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_+(\bar{\Omega})]$$

существует единственная функция $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_+(\bar{\Omega})$ такая, что $T_\varphi = (\gamma, f)$, т. е. погружение $\tilde{\varphi}: \bar{\Omega} \to \mathbf{E}_{n,1}$ пространственно-подобно и совпадает с погружением $\tilde{f}$ над границей области Ω, и ее лоренц-гауссова кривизна равна заданной функции γ.

Замечание 1. Условие $f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K_+(\bar{\Omega})$ необходимо, а по теореме 2 также и достаточно.

Р. Бартник и Л. Саймон доказали соответствующий результат для средней кривизны [2].

Замечание 2. Н. Трудингер и Д. Урбас рассмотрели эту же проблему, но с евклидовым пространством [3]. Тогда из-за строгой выпуклости области Ω недостаточно предполагать, что функция f строго выпукла, а положительная функция $\lambda \in C^\infty(\bar{\Omega})$ больше не произвольна. Она должна удовлетворять неравенству

$$\int_\Omega \gamma(x)\, dx < \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+2)/2}} < \infty.$$

Кроме того, Трудингер и Урбас доказали, что если функция γ/δ не ограничена на $\bar{\Omega}$ (где δ — расстояние от $\partial\Omega$), то можно найти функцию $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ такую, что нельзя реализовать γ как гауссову кривизну графа выпуклой функции, совпадающей с f на $\partial\Omega$.

3. Пусть $\varphi \in K_+(\bar{\Omega})$. Суммируя от 1 до n по повторным индексам и обозначая φ_i, φ_{ij} и т. д. частные производные $\partial\varphi/\partial x_i$, $\partial^2\varphi/\partial x_i \partial x_j$ и т. д., а (φ^{ij}) — обращение гессиановой матрицы (φ_{ij}), дифференциал оператора K в точке $\varphi \in K_+(\bar{\Omega})$ записываем так:

$$dK_\varphi(\delta\varphi) = K_\varphi\left[\varphi^{ij}(\delta\varphi)_{ij} + \frac{n+2}{(1-|d\varphi|^2)}\varphi_i(\delta\varphi)_i\right]. \tag{2}$$

Отсюда, очевидно, оператор $K: K_+(\bar{\Omega}) \to C_+(\bar{\Omega})$ эллиптический.

Лемма 1. *Оператор*

$$T: \varphi \in K_+(\bar{\Omega}) \to (K_\varphi,\ \varphi|_{\partial\Omega}) \in C_+(\bar{\Omega}) \times C^2(\partial\Omega)$$

одно-однозначен.

Доказательство. Пусть φ_0 и φ_1, принадлежащие классу $K_+(\bar{\Omega})$, такие, что $T(\varphi_0) = T(\varphi_1)$. Введем путь $t \in [0, 1] \to \varphi_t = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_0 \in$

$\in K_+(\overline{\Omega})$ и линейный оператор эллиптического типа

$$\delta\varphi\in C^2(\overline{\Omega})\to L(\delta\varphi)=\Big(\int_0^1 K_{\varphi_t}\varphi_t^{ij}dt\Big)(\delta\varphi)_{ij}+$$

$$+(n+2)\Big[\int_0^1\frac{(\varphi_t)_i}{(1-|d\varphi_t|^2)}\,dt\Big](\delta\varphi)_i\in C^0(\overline{\Omega}).$$

С учетом (2) уравнение $T(\varphi_1)-T(\varphi_0)=0$ выражается через оператор L и функцию $\varphi=(\varphi_1-\varphi_0)$ краевой задачей $L\varphi=0$ в области Ω, $\varphi=0$ на $\partial\Omega$, значит, искомый результат $\varphi\equiv 0$ на $\overline{\Omega}$ вытекает из принципа максимума Хопфа [4]. Лемма доказана.

По лемме 1 единственность решения теоремы 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $(\gamma,f)\in[C^\infty(\overline{\Omega})\cap\cap C_+(\overline{\Omega})]\times[C^\infty(\overline{\Omega})\cap K_+(\overline{\Omega})]$ и $\alpha\in(0,1)$. Для каждого $s\in[0,1]$ рассмотрим задачу Дирихле

$$T(\varphi_s)=[(1-s)K_f+s\gamma,f] \qquad (3)$$

и множество S чисел $s\in[0,1]$ таких, что существует функция $\varphi_s\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, являющаяся решением задачи (3). Множество S непусто, поскольку $\varphi_0=f$, очевидно, — решение задачи (3) при $s=0$, т. е. $0\in S$. Кроме того, применяя теорему Банаха о локальном обращении к оператору

$$T:C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\cap K_+(\overline{\Omega})\to[C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\cap C_+(\overline{\Omega})]\times C^{2,\alpha}(\partial\Omega),$$

убеждаемся, что подмножество $S\subset[0,1]$ относительно открыто. Из связности интервала $[0,1]$ следует, что если множество S тоже замкнуто, то оно обязательно совпадает с целым интервалом $[0,1]$; тогда $\varphi_1\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\cap\cap K_+(\overline{\Omega})$ является решением задачи Дирихле $T(\varphi_1)=(\gamma,f)$, и по стандартной нелинейной эллиптической регулярности [5] $\varphi_1\in C^\infty(\overline{\Omega})$. Теорема 2 доказана.

Лемма 2. *Из априорной оценки*

$$\partial M_1=[\max_{(s,x)\in[0,1]\times\partial\Omega}|d\varphi_s(x)|]\in(0,1)$$

вытекает замкнутость множества S.

Доказательство. Известно, произвольная функция $\varphi\in K_+(\overline{\Omega})$, как и норма ее градиента, достигают своих максимумов на границе области Ω, так что

$$\partial M_1\equiv M_1=\max_{(s,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}}|d\varphi_s(x)|,$$

и с учетом краевого условия на φ_s

$$M_0=\max_{(s,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}}|\varphi_s(x)|\leqslant\max\{\max_{\partial\Omega}f,\ |(\min_{\partial\Omega}f)-\partial M_1 d(\Omega)|\},$$

где $d(\Omega)$ — диаметр области Ω. Поскольку $M_1\in(0,1)$, существует число $\nu>0$ такое, что

$$\min_{(s,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}}\Psi[s,x,d\varphi_s(x)]\geqslant\nu,$$

$$\Psi(s,x,p)=(1-|p|^2)^{(n+2)/2}[(1-s)K_f(x)+s\gamma(x)].$$

Кроме того, функция $\Psi(s,x,p)$ ограничена в норме C^2 на множестве $(s,x,p)\in\mathfrak{A}=[0,1]\times\overline{\Omega}\times[0,M_1]$. Таким образом, в силу теоремы 1 [6] имеет место оценка

$$M_2=\max_{(s,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}}|D^2\varphi_s(x)|\leqslant C(n,\Omega,M_1,\nu,|\Psi|_{C^2(\mathfrak{A})},|f|_{C^4(\partial\Omega)}).$$

Отсюда с учетом выражения (2) вытекает, что линейный оператор dK_{φ_s} равномерно эллиптический на $\overline{\Omega}$ независимо от $s \in [0, 1]$. Полагая, что K_φ является вогнутой функцией по гессиану $(D^2\varphi)$, из работ Эванса [7] и Крылова [8] получаем оценку

$$M_{2,\beta} = \max_{s\in[0,1]} |\varphi_s|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leqslant C'(n, \Omega, M_1, M_2, |\Psi|_{C^2(\mathfrak{A})}, |f|_{C^3(\partial\Omega)})$$

для какого-либо числа $\beta \in (0, 1)$, зависящего от $(n, \Omega, M_1, M_2, |\Psi|_{C^2(\mathfrak{A})}$, $|f|_{C^3(\partial\Omega)}$. Априорная оценка $M_{2,\beta}$ доказана, например, в [9, с. 441].

Пусть $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность из множества S и $s \in [0, 1]$ — ее предел. Поскольку последовательность $(\varphi_{s_i})_{i\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена в норме $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, в силу теоремы Асколи для любого $\delta \in (0, \beta)$ существует подпоследовательность $(s_{\delta,i})_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $(\varphi_{s_{\delta,i}})_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к некоторой функции φ_s в норме $C^{2,\delta}(\overline{\Omega})$. Очевидно, функция φ_s выпукла и является решением задачи (3). Кроме того, с учетом оценки $M_1 \in (0, 1)$ на φ_s справедливо неравенство $\det(D^2\varphi_s) > 0$ на $\overline{\Omega}$, так что $\varphi_s \in K_+(\overline{\Omega})$. По стандартной нелинейной эллиптической регулярности [5] $\varphi_s \in C^\infty(\overline{\Omega})$, в частности, $s \in S$, и множество S замкнуто, что и требовалось доказать.

В силу леммы 2 доказательство теоремы 2 сводится к априорной оценке $\partial M_1 \in (0, 1)$.

5. Построение оценки ∂M_1. Положим

$$K(s, x) = (1 - s) K_f(x) + s\gamma(x),$$

$$m_0 = \min_{(s,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}} K(s, x), \quad M_0 = \max_{(s,x)\in[0,1]\times\overline{\Omega}} K(s, x),$$

$$d_1 = \max_{x\in\partial\Omega} |df(x)|.$$

Обозначим через λ (соответственно Λ) минимум (максимум) на $\overline{\Omega}$ самого малого (большого) собственного значения гессиана (D^2f). При этом $m_0 > 0$ и $\lambda > 0$.

Лемма 3. *Имеет место оценка* $\partial M_1 \leqslant \Delta(n, \Omega, m_0, M_0, d_1, \lambda, \Lambda) \in \in (0, 1)$.

Доказательство. Выберем какую-либо точку $x_0 \in \partial\Omega$ и систему координат $(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что $\forall i = 1, \ldots, n$, $x_{0i} = 0$, координата x_n направлена по внутренней к $\partial\Omega$ нормали в точке x_0, и координата x_1 направлена по градиенту * на $\partial\Omega$ в точке x_0 индуцированной функции $f|_{\partial\Omega}$. Построим барьерные функции $\varphi_{x_0}^-$, $\varphi_{x_0}^+$, принадлежащие классу $K_+(\overline{\Omega})$, такие, что справедливы следующие условия: $K_{\varphi_{x_0}^-} = M_0$ и $K_{\varphi_{x^0}^+} = m_0$ в области Ω, $\varphi_{x_0}^- \leqslant f \leqslant \varphi_{x_0}^+$ на границе $\partial\Omega$, и функции $\varphi_{x_0}^-|_{\partial\Omega}$, $\varphi_{x_0}^+|_{\partial\Omega}$ имеют касание первого порядка с функцией $f|_{\partial\Omega}$ в точке x_0, т. е.

$$\varphi_{x_0}^-(x_0) = \varphi_{x_0}^+(x_0) = f(x_0), \quad \forall i < n \ \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{x_0}^-(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{x_0}^+(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Кроме того, по построению, число $\max[|d\varphi_{x_0}^-(x_0)|, |d\varphi_{x_0}^+(x_0)|]$ будет оценено постоянной $s \in (0, 1)$, зависящей лишь от $(n, \Omega, m_0, M_0, d_1, \lambda, \Lambda)$. Предполагая, что функции $\varphi_{x_0}^-$, $\varphi_{x_0}^+$ известны, по лемме Олейник [10] и Хопфа [11] получаем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_{x_0}^-(x_0) < \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_s(x_0) < \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_{x_0}^+(x_0),$$

следовательно,

$$|d\varphi_s(x_0)| \leqslant \max[|d\varphi_{x_0}^-(x_0)|, |d\varphi_{x_0}^+(x_0)|] \leqslant \Delta(n, \Omega, m_0, M_0, d_1, \lambda, \Lambda).$$

Лемма 3 доказана.

---

* Если при всех $i < n$ $f_i(x_0) = 0$, то для x_1 никаких условий нет.

Для построения барьерных функций $\varphi_{x_0}^-$, $\varphi_{x_0}^+$ докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Для каждой тройки* $(\mu, \beta, a) \in (0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ *существует единственная строго выпуклая функция* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{a\})$, *удовлетворяющая уравнению* $K_\varphi = \mu$, *такая, что справедливы следующие условия*: $|d\varphi| < 1$, *функция* φ *радиально симметрична по отношению к точке* $a \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(a) = 0$, $|d\varphi|^2(a) = \beta/(1+\beta)$.

Доказательство. Обозначая $r = |x - a|$, $\varphi(x) = \Phi(r)$, $\Phi = d\Phi/dr$ и используя аналог счета [12, с. 335], запишем уравнение $K_\varphi = \mu$ в виде

$$\frac{d}{dr}(\xi^{n/2} - \mu r^n) = 0, \quad \xi = \frac{\Phi'^2}{1 - \Phi'^2}.$$

Проинтегрировав два раза, получим $\xi^{n/2}(r) = \beta^{n/2} + \mu r^n$ и, выбрав $\Phi' \geqslant 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int\limits_0^{|x-a|} \frac{(\beta^{n/2} + \mu r^n)^{1/n}}{\sqrt{1 + (\beta^{n/2} + \mu r^n)^{2/n}}}\, dr.$$

Лемма доказана.

Запишем искомую функцию $\varphi_{x_0}^-$ в виде $\varphi_{x_0}^-(x) = f(x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0)$, где φ — решение леммы 4, соответствующее значениям $\mu = M_0$, $\beta = 0$ и

$$a = \frac{R}{\sqrt{1 + A^2}}(-A, 0, \ldots, 0, 1)$$

параметров (μ, β, a). Тем самым построение барьерной функции $\varphi_{x_0}^-$ сводится к выбору положительных чисел R и A. Во-первых, число $R = |a|$ должно быть достаточно большим ($R > R_1$, где R_1 зависит только от n, Ω, M_0, d_1) и таким, что точка $a \in \mathbb{R}^n$ находится вне $\overline{\Omega}$ и, поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \in [0, 1)$, то

$$\theta(R) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\sqrt{1 + \frac{1}{M_0^{2/n} R^2}}\right] \in [0, 1).$$

Значит, можно определить функцию $A = A(R) = \theta(R)/\sqrt{1 - [\theta(R)]^2}$. При таком выборе A можно проверить, что условие

$$\forall i < n \quad \frac{\partial \varphi_{x_0}^-}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

выполняется.

Зафиксировав произвольный единичный вектор $v \in \mathbb{R}^n$ и обозначив $x \cdot y$ евклидово скалярное произведение каких-либо векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, оценим вторую косую производную функции $\varphi_{x_0}^-$ по вектору v:

$$d\varphi_{x_0}^-(v)(x) = \left(v \cdot \frac{x - a}{|x - a|}\right)\Phi'(|x - a|),$$

$$d[d\varphi_{x_0}^-(v)](v)(x) = \frac{\Phi'(|x - a|)}{|x - a|}\left[1 - \left(v \cdot \frac{x - a}{|x - a|}\right)^2\right] + \left(v \cdot \frac{x - a}{|x - a|}\right)^2 \Phi''(|x - a|). \tag{4}$$

Первая производная Φ' равна подынтегральному выражению φ (см. выше), т. е.

$$\Phi'(r) = \frac{M_0^{1/n} r}{\sqrt{1 + M_0^{2/n} r^2}} \in [0, 1), \tag{5}$$

и вторая производная Φ'' получается из уравнения $K_\varphi = M_0$:

$$\Phi''(r) = M_0 \left[\frac{r}{\Phi' r}\right]^{n-1} [1 - \Phi'^2(r)]^{(n+2)/2}.$$

Следовательно, с учетом (5)

$$\Phi''(r) = \frac{M_0^{1/n}}{(1 + M_0^{2/n} r^2)^{3/2}},$$

и справедливо неравенство

$$\Phi''(r) < \frac{1}{M_0^{2/n} r^3}. \tag{6}$$

Во-вторых, число $R = |a|$ должно быть достаточно большим ($R > \max(R_1, R_2)$, где R_2 зависит только от n, Ω, M_0, λ) и таким, что функция $(f - \varphi_{x_0}^-)$ выпукла в области Ω. Учитывая (4)—(6) и обозначая $\delta = \min_{x \in \bar{\Omega}} |x - a|$, видим, что это условие выполняется, если справедливо неравенство

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{M_0^{2/n} \delta^3} < \frac{\lambda}{2}.$$

Число $R = |a|$ должно быть достаточно большим ($R > \max(R_1, R_2, R_3)$, где R_3 зависит только от n, Ω, M_0, d_1) и таким, что справедливо неравенство

$$|d\varphi_{x_0}^-(x_0)| > |df(x_0)| \tag{7}$$

Так как $|x_0 - a| \geqslant \delta$ и $|d\varphi_{x_0}^-(x)| \equiv \Phi'(|x - a|)$, то, учитывая (5), можно проверить, что условие (7) гарантируется следующим неравенством:

$$M_0^{1/n} \delta > \frac{d_1}{\sqrt{1 - d_1^2}}.$$

Из выбора числа $A = A(R)$, точки $a \in \mathbb{R}^n$ и системы евклидовых координат $(x_1, \dots, x_n)$ следует

$$d\varphi_{x_0}^-(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_0)\, dx_n,$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_0) = \frac{-a_n}{|a|} \Phi'(|a|) < 0.$$

Учитывая (7), получаем равенство

$$d(f - \varphi_{x_0}^-)(x_0) = \varepsilon dx_n \tag{8}$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Возьмем точку $x \neq x_0$ на границе $\partial\Omega$ и положим $v = (x - x_0)/|x - x_0|$. Поскольку область Ω строго выпукла, имеет место неравенство $v_n > 0$; значит, из (8) и выпуклости функции $(f - \varphi_{x_0}^-)$ вытекает неравенство

$$(f - \varphi_{x_0}^-)(x) > (f - \varphi_{x_0}^-)(x_0) = 0.$$

Все требуемые условия для барьерной функции $\varphi_{x_0}^-$ теперь выполнены.

Чтобы построить барьерную функцию $\varphi_{x_0}^+$, запишем ее в виде

$$\varphi_{x_0}^+(x) = f(x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0),$$

но с функцией φ из леммы 4, соответствующей параметрам $\mu = m_0$, $\beta \neq 0$. Следовательно, функция φ сингулярна в точке

$$a = \frac{1}{\sqrt{\beta + (1 + A^2)}}(-A, 0, \dots, 0, -1).$$

Теперь точка a находится вне области $\bar{\Omega}$, но достаточно близко к точке $x_0 \in \in \Omega$. Методом добавления [2] выберем ее так, чтобы

$$\forall i < n \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_{x_0}^{+}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \tag{9}$$

$$\left(1 + \frac{m_0}{\beta^n}\right)^{1/n} \frac{1}{\sqrt{1/\beta + m_0/\beta^n)^{2/n}}} \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0).$$

Тем самым, поскольку справедливо условие

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \sqrt{1 + \frac{1}{\beta(1 + m_0/\beta^n)^{2/n}}} \in [0, 1), \tag{10}$$

можно определить неотрицательное число

$$A = A\left[n, m_0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \beta\right],$$

являющееся решением уравнения (9). В силу $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \in [0, d_1]$, где $d_1 < 1$, убеждаемся, что при $\beta > d_1^2/(1 - d_1^2)$ условие (10) выполняется. Обозначая $\varphi(x) = \Phi(|x - a|)$ и учитывая, что по уравнению $K_\Phi = m_0$ вторая производная Φ'' положительна, из аналога формулы (4) для настоящей функции $\varphi_{x_0}^{+}$ получаем неравенство

$$d\,[d\varphi_{x_0}^{+}(v)]\,(v)\,(x) \geqslant \frac{\Phi'(|x - a|)}{|x - a|}\left[1 - \left(v \cdot \frac{x - a}{|x - a|}\right)^2\right] \tag{11}$$

для произвольного единичного вектора $v \in \mathbb{R}^n$. Здесь функция $\Phi'(r)$ равна (см. подынтегральное выражение φ в доказательстве леммы 4)

$$\Phi'(r) = \left[1 + m_0\left(\frac{r}{\sqrt{\beta}}\right)^n\right]^{1/n} \frac{1}{\sqrt{1/\beta + [1 + m_0(r/\sqrt{\beta})^n]^{2/n}}}.$$

Неравенство (11) формально аналогично неравенству (A. 4) из [2, с. 150]. Окончание построения барьерной функции $\varphi_{x_0}^{+}$ аналогично построению функции w^{+}, описанному в [2, с. 150]. Априорная оценка ∂M_1 доказана.

1. *Delanoë Ph.* Local inversion of elliptic problems on compact manifolds.— 1987.— (Preprint / Univ. de Nice; N 87. 148).
2. *Bartnik R.*, *Simon L.* Spacelike hypersurfaces with preseribed boundary values and mean curvature // Communs Math. Phys.— 1982.— **87**.— P. 131—152.
3. *Trudinger N.*, *Urbas J.* The Dirichlet problem for the equation of prescribed Gauss curvature // Bull. Austral. Math. Soc.— 1983.— **28**.— P. 217—231.
4. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wissenseh. Math.-Phys.— 1927.— **K1.19**.— S. 147—152.
5. *Agmon S.*, *Douglis A.*, *Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Communs Pure and Appl. Math.— 1964.— **17**.— P. 35—92.
6. *Ивочкина Н. М.* Априорная оценка $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ выпуклых решений задачи Дирихле для уравнения Монжа — Ампера // Зап. науч. семинаров Ленингр. от-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1986.— **98**.— С. 69—79.
7. *Evans L.* Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations // Communs Pure and Appl. Math.— 1982.— **35**.— P. 333—363.
8. *Крылов Н. В.* Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— **47**, № 1.— С. 75—108.
9. *Schulz F.* Uber nichtlineare, konkave elliptische Differentialgleichungen // Math. Z.— 1986.— **191**.— S. 429—448.
10. *Олейник О. А.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Мат. сб.— 1952.— **30**.— С. 695—702.
11. *Hopf E.* A remark on linear elliptic differential equations of second order // Proc. Amer. Math. Soc.— 1952.— **3**.— P. 791—793.
12. *Delanoë Ph.* Radially symmetric boundary value problems for real and complex elliptic Monge — Ampére equations // J. Different. Equat.— 1985.— **58**.— P. 318—344.

Франция

Получено 11.04.90