УДК 512.546

В. И. АРНАУТОВ, д-р физ.-мат. наук,
Е. Г. ЗЕЛЕНЮК, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

К проблеме полноты максимальных топологических групп

В предположении леммы Буса получено отрицательное решение проблемы В. И. Арнаутова: верно ли, что каждую недискретную топологию на группе можно усилить до дискретной полной?

В припущенні леми Буса отримано негативне рішення проблеми В. І. Арнаутова: чи вірно, що кожну недискретну топологію на групі можна посилити до недискретної повної?

Все топологии на группах предполагаются хаусдорфовыми и групповыми.

Топологическая группа называется максимальной, если ее топология максимальна в классе всех недискретных топологий. Данная работа возникла в связи с проблемой полноты максимальных групп, поставленной В. И. Арнаутовым: верно ли, что каждая максимальная группа полна? В предположении леммы Буса эта проблема решается отрицательно.

Результаты п. 1 принадлежат первому из авторов, а результаты пп. 2, 3 — второму.

1. Полнота некоторых топологических групп, близких к максимальным. Пусть $\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — бесконечное семейство групп, G — их прямая сумма, φ — фильтр на Γ, мажорирующий фильтр Фреше, т. е. $\bigcap \varphi = \varnothing$.

1.1. Рассмотрим семейство множеств вида $U_F = \{g \in G \mid \operatorname{supp}(g) \subseteq F\}$, где F пробегает φ. Оно образует базу некоторого фильтра Φ на G. Этот фильтр удовлетворяет всем характеристическим свойствам фильтра окрестностей единицы топологической группы:

1) если $U \in \Phi$, то и $U^{-1} \in \Phi$;
2) для любого $U \in \Phi$ найдется такое $V \in \Phi$, что $V^2 \subseteq U$;
3) для любых $g \in G$, $U \in \Phi$ найдется такое $V \in \Phi$, что $g^{-1}Vg \subseteq U$;
4) $\bigcap \Phi = \{e\}$.

Следовательно, Φ задает некоторую топологию на G. Обозначим ее τ_φ. Ясно, что τ_φ — линейная топология. Более того, она даже нормально линейная, т. е. группа (G, τ_φ) обладает базой окрестностей единицы из нормальных подгрупп.

1.2. Для произвольной последовательности $\mathcal{F} = \{F_n \mid n < \omega\}$ элементов φ (как обычно, ω — первый бесконечный ординал или, что то же, множество всех натуральных чисел, включая 0) положим $U_{\mathcal{F}} = \{g \in G \mid g = g_0 \cdot \ldots \cdot g_n, \mid \mathrm{supp}\,(g_i) \mid \leqslant 1, \quad \mathrm{supp}\,(g_i) \subseteq F_i\}$ и рассмотрим семейство множеств вида $U_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}$ пробегает все последовательности элементов φ. Оно образует базу некоторого фильтра Φ' на G. Фильтр Φ, так же как и Φ, удовлетворяет всем характеристическим свойствам фильтра окрестностей единицы топологической группы. Следовательно, Φ' задает некоторую топологию на G. Обозначим ее $\tau_{\{\varphi\}}$. Нетрудно заметить, что $\tau_{\{\varphi\}}$ — уравновешенная тепология, т. е. в группе $(G, \tau_{\{\varphi\}})$ совпадают левая и правая равномерности. Ясно также, что $\tau_{\{\varphi\}} \geqslant \tau_\varphi$, причем неравенство, вообще говоря, нестрогое. Докажем, что $\tau_{\{\varphi\}}$ — максимальная топология из всех топологий на G, в каждой из которых сходится к единице фильтр $\overline{\varphi}$ с базой из множеств вида $U_F \cap \{g \in G \mid \mathrm{supp}\,(g) \mid = 1\}$, где F пробегает φ.

То, что $\overline{\varphi}$ сходится к единице $(G, \tau_{\{\varphi\}})$, очевидно. Предположим, что существует топология $\tau > \tau_{\{\varphi\}}$, в которой $\overline{\varphi}$ сходится к единице. Пусть V — окрестность единицы (G, τ), не являющаяся окрестностью единицы $(G, \tau_{\{\varphi\}})$. Выберем последовательность $\{V_n \mid n < \omega\}$ окрестностей единицы (G, τ) такую, что $V_0^2 \subseteq V$, $V_{n+1}^2 \subseteq V_n$. Затем в каждой окрестности V_n выберем элемент фильтра $\overline{\varphi}$ вида $U_{F_n} \cap \{g \in G \mid |\mathrm{supp}\,(g)| = 1\}$, где $F_n \in \varphi$. Но тогда, полагая $\mathcal{F} = \{F_n \mid n < \omega\}$, получаем $U_{\mathcal{F}} \subseteq \{g \in G \mid g = g_0 \ldots g_n,\ g_i \in \in V_i\} \subseteq V$ и, следовательно, V — окрестность единицы $(G, \tau_{\{\varphi\}})$. Пришли к противоречию.

1.3. Будем говорить, что фильтр φ усиливается до последовательности, если существует последовательность $\{x_n \mid n < \omega\}$ такая, что для каждого $F \in \varphi$ все x_n, начиная с некоторого номера, принадлежат F. Если же такой последовательности не существует, то будем говорить, что фильтр φ не усиливается до последовательности.

Теорема. *Группа $(G, \tau_{\{\varphi\}})$ полна тогда и только тогда, когда фильтр φ не усиливается до последовательности.*

Доказательство. Предположим, что φ усиливается до некоторой $\{\gamma_n \mid n < \omega\}$. Для каждого $n < \omega$ в группе G_{γ_n} выберем элемент $g_{\gamma_n} \neq e_{\gamma_n}$ и через a_n обозначим такой элемент G, что

$$np_\gamma(a_n) = \begin{cases} g_{\gamma_i}, \text{ если } \gamma = \gamma_i \in \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}, \\ e_\gamma, \text{ если } \gamma \notin \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}. \end{cases}$$

Последовательность $\{a_n \mid n < \omega\}$ будет фундаментальной в $(G, \tau_{\{\varphi\}})$, однако сходиться не будет. Следовательно, $(G, \tau_{\{\varphi\}})$ неполна.

Пусть теперь φ не усиливается до последовательности, ξ — произвольный фундаментальный фильтр в (G, τ_φ). Мы должны доказать, что ξ сходится. Рассмотрим множество

$$\Gamma^* = \bigcap \{\mathrm{supp}\,(A) \mid A \in \xi\}$$

(здесь $\mathrm{supp}\,(A) = \bigcup \{\mathrm{supp}\,(a) \mid a \in A\}$). Возможны два случая: а) Γ^* конечно; б) Γ^* бесконечно.

Предположим, что имеет место первый случай: $\Gamma^* = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$. Выберем такое $A \in \xi$, что множества $np_{\gamma_0}(A), \ldots, np_{\gamma_n}(A)$ одноэлементны. Это можно сделать, иначе фильтр ξ не был бы фундаментальным. Обозначим через a такой элемент G, что

$$np_\gamma(a) = \begin{cases} np_{\gamma_i}(A), \text{ если } \gamma = \gamma_i \in \{\gamma_0, \ldots \gamma_n\}, \\ e_\gamma, \text{ если } \gamma \notin \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}, \end{cases}$$

и докажем, что ξ сходится к a. Для этого достаточно доказать, что фильтр $\eta = \{E\,a^{-1} \mid E \in \xi\}$ сходится к единице.

Пусть U — произвольная окрестность единицы (G, τ_φ). Можно считать, что для некоторого $F \in \varphi$ $U = U_F$. Выберем $B \in \eta$ такое, что $BB^{-1} \subseteq U_F$, и покажем, что $B \subseteq U_F$. В самом деле, пусть $b \in B$. Так как $\bigcap \{\mathrm{supp}\,(C) \mid C \in \eta\} = \varnothing$, то $\mathrm{supp}\,(b) \cap \mathrm{supp}\,(C) = \varnothing$ для некоторого $C \in \eta$. Но тогда

$$\mathrm{supp}\,(b) \subseteq \mathrm{supp}\,(b) \cup \mathrm{supp}\,(B \cap C) = \mathrm{supp}\,(b \cdot (B \cap C)) =$$

$$= \mathrm{supp}\,(b \cdot (B \cap C)^{-1}) \subseteq \mathrm{supp}\,(B \cdot B^{-1}) \subseteq F,$$

а значит, $b \in U_F$.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\{\gamma_n \mid n < \omega\}$ — некоторая бесконечная последовательность попарно различных элементов Γ^*. Так как φ не усиливается до $\{\gamma_n \mid n < \omega\}$, то найдутся такая подпоследовательность $\{\gamma_{n_k} \mid k < \omega\}$ последовательности $\{\gamma_n \mid n < \omega\}$ и такое $F \in \varphi$, что $\gamma_{n_k} \notin F$ для любого $k < \omega$. Пусть теперь A — произвольный элемент ξ. Выберем $a, b \in A$ такие, что $(\mathrm{supp}\,(a) \setminus \mathrm{supp}\,(b)) \cap \{\gamma_{n_k} \mid k < \omega\} \neq \varnothing$. Тогда $ab^{-1} \notin U_F$. Но тогда фильтр ξ нефундаментален. Получили противоречие. Следовательно, второй случай невозможен.

Следствие. *Если φ — свободный ультрафильтр, то группа (G, τ_φ) полна.*

1.4. Теорема. *Группа $(G, \tau_{\{\varphi\}})$ полна.*

Доказательство. Пусть ξ — произвольный фундаментальный фильтр в $(G, \tau_{\{\varphi\}})$. Мы должны доказать, что ξ сходится. С этой целью, как и в теореме 1.3, рассмотрим множество $\Gamma^* = \bigcap \{\mathrm{supp}\,(A) \mid A \in \xi\}$. Возможны два случая: а) Γ^* конечно; б) Γ^* бесконечно. Первый случай рассматривается аналогично теореме п. 1.3, во втором рассуждения немного другие.

Пусть $\{\gamma_n \mid n < \omega\}$ — бесконечная последовательность попарно различных элементов Γ^*. Покажем вначале, что для любых $k < \omega$ и $A \in \xi$ существует $a \in A$ такой, что $\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\} \subseteq \mathrm{supp}\,(a)$. Допустим противное и выберем последовательность $\mathscr{F} = \{F_n \mid n < \omega\}$ элементов φ такую, что $\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\} \cap F_n = \varnothing$. Если теперь B — произвольный элемент ξ, то для некоторых $b, c \in B$ $(\mathrm{supp}\,(b) \setminus \mathrm{supp}\,(c)) \cap \{\gamma_0, \dots, \gamma_k\} \neq \varnothing$, откуда $bc^{-1} \notin U_{\mathscr{F}}$ — противоречие с фундаментальностью ξ.

Далее, пусть $\mathscr{F} = \{F_n \mid n < \omega\}$ — такая последовательность элементов φ, что $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{2n}\} \cap F_n = \varnothing$, A — произвольный элемент ξ. Выберем какой-то элемент $b \in A$. Для некоторого $k < \omega$ $\mathrm{supp}\,(b) \cap \{\gamma_n \mid n < \omega\} \subseteq \{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}$. И выберем элемент $a \in A$ такой, что $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{2k+1}\} \subseteq \mathrm{supp}(a)$. Но тогда $\mathrm{supp}\,(ba^{-1}) \supseteq \{\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_{2k+1}\}$. Из определения последовательности $\mathscr{F}$ и множества $U_{\mathscr{F}}$ следует, что $ba^{-1} \notin U_{\mathscr{F}}$ — снова противоречие с фундаментальностью ξ. Следовательно, второй случай, как и в теореме п. 1.3, просто невозможен.

1.5. Предложение. *Пусть все G_γ, $\gamma \in \Gamma$,— некоммутативные простые группы, τ — недискретная нормально линейная топология на G. Тогда найдется такой фильтр φ на Γ, что $\tau = \tau_\varphi$.*

Доказательство. Пусть φ — фильтр на Γ, базу которого образуют множества вида $\mathrm{supp}\,(V)$, где V — открытая нормальная подгруппа (G, τ). Достаточно доказать, что для произвольного $\gamma_0 \in \mathrm{supp}\,(V)$ найдется такой $g \in V$, что $np_{\gamma_0}(g) \neq e_{\gamma_0}$ и $np_\gamma(g) = e_\gamma$, если $\gamma \neq \gamma_0$. Выберем $b \in V$ такой, что $b_{\gamma_0} = np_{\gamma_0}(b) \neq e_{\gamma_0}$. Из простоты и некоммутативности G_{γ_0} следует существование такого $a_{\gamma_0} \in G_{\gamma_0}$, что $a_{\gamma_0} b_{\gamma_0} a_{\gamma_0}^{-1} b_{\gamma_0}^{-1} \neq e_{\gamma_0}$. Обозначим через a такой элемент G, что

$$np_\gamma(a) = \begin{cases} a_{\gamma_0}, & \text{если } \gamma = \gamma_0, \\ e_\gamma, & \text{если } \gamma \neq \gamma_0. \end{cases}$$

И, наконец, полагая $g = aba^{-1}b^{-1}$, получаем требуемый элемент $g \in V$.

С л е д с т в и е. *Пусть все G_γ, $\gamma \in \Gamma$,— некоммутативные простые группы, τ — топология на G, максимальная в классе недискретных нормально линейных топологий. Тогда группа (G, τ) полна.*

Действительно, достаточно заметить, что тот фильтр φ на Γ, для которого $\tau = \tau_\varphi$, на самом деле будет свободным ультрафильтром, и применить следствие п. 1.3.

1.6. П р е д л о ж е н и е. *Пусть все G_γ, $\gamma \in \Gamma$,— некоммутативные простые группы, мощности которых ограничены в совокупности некоторым натуральным числом, τ — недискретная уравновешенная топология на G. Тогда найдется такой фильтр φ на Γ, что $\tau \leqslant \tau_{\{\varphi\}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой окрестности V единицы (G, τ) сопоставим множество F_V всех таких $\gamma \in \Gamma$, что $\operatorname{supp}(g) = \{\gamma\}$ для некоторого $g \in V$. Покажем, что $F_V \neq \varnothing$. В самом деле, так как τ уравновешенная, то найдется такая окрестность V_1 единицы (G, τ), что $gV_1g^{-1}V_1^{-1} \subseteq V$ для любого $g \in G$. Выберем какой-то неединичный $b \in V_1$. Тогда $b_{\gamma_0} = np_{\gamma_0}(b) \neq e_{\gamma_0}$ для некоторого $\gamma_0 \in \Gamma$. Поскольку G_{γ_0} — простая некоммутативная группа, то существует такой элемент $a_{\gamma_0} \in G_{\gamma_0}$, что $a_{\gamma_0} b_{\gamma_0} a_{\gamma_0}^{-1} b_{\gamma_0}^{-1} \neq e_{\gamma_0}$. Как и при доказательстве предложения п. 1.5 обозначим через a такой элемент G, что

$$np_\gamma(a) = \begin{cases} a_{\gamma_0}, & \text{если } \gamma = \gamma_0, \\ e_\gamma, & \text{если } \gamma \neq \gamma_0, \end{cases}$$

и положим $g = aba^{-1}b^{-1}$. Тогда $g \in V$ и $\operatorname{supp}(g) = \{\gamma_0\}$. Итак, $F_V \neq \varnothing$. Кроме того $F_{V_1 \cap V_2} \subseteq F_{V_1} \cap F_{V_2}$. Значит, множества вида F_V образуют базу некоторого фильтра на Γ. Обозначим его φ. Чтобы доказать, что $\tau \leqslant \tau_{\{\varphi\}}$, достаточно проверить, что фильтр $\overline{\varphi}$ на G, базу которого образуют множества вида $U_F \cap \{g \in G \mid |\operatorname{supp}(g)| = 1\}$, где $F \in \varphi$, сходится к единице (G, τ).

Пусть V — произвольная окрестность единицы (G, τ). Выберем окрестности V_1, V_2 единицы такие, что $V_1^k \subseteq V$ и $gV_2g^{-1} \subseteq V_1$ для любого $g \in G$, где k — натуральное число, ограничивающее сверху мощности всех G_γ. Покажем, что $U_F \cap \{g \in G \mid |\operatorname{supp}(g)| = 1\} \subseteq V$. В самом деле, пусть $h \in U_{F_{V_2}} \cap \{g \in G \mid |\operatorname{supp}(g)| = 1\}$, $\{\gamma_0\} = \operatorname{supp}(h)$, $b = np_{\gamma_0}(h)$. Как было показано выше (см. проверку того, что $F_V \neq \varnothing$), существует такой элемент $g \in V_2$, что $\operatorname{supp}(g) = \{\gamma_0\}$. Так как $|G_{\gamma_0}| \leqslant k$ и G_{γ_0} — простая группа, то для элемента $a = np_{\gamma_0}(g)$ найдутся такие элементы $c_1, \ldots, c_s \in G_{\gamma_0}$, где $s \leqslant k$, что $b = (c_1ac_1^{-1}) \ldots (c_sac_s^{-1})$. Пусть $d_1, \ldots, d_s$ — такие элементы из G, что

$$np_\gamma(d_i) = \begin{cases} c_i, & \text{если } \gamma = \gamma_0, \\ e_\gamma, & \text{если } \gamma \neq \gamma_0. \end{cases}$$

Тогда $h = (d_1gd_1^{-1}) \ldots (d_sgd_s^{-1}) \in (d_1V_2d_1^{-1}) \ldots (d_sV_2d_s^{-1}) \subseteq V_1^s \subseteq V_1^k \subseteq V$.

С л е д с т в и е. *Пусть все G_γ, $\gamma \in \Gamma$,— некоммутативные простые группы, мощности которых ограничены в совокупности некоторым натуральным числом, τ — топология на G, максимальная в классе недискретных уравновешенных топологий. Тогда группа (G, τ) полна.*

1.7. З а м е ч а н и е. Пусть G — произвольная подгруппа прямого произведения групп G_γ, $\gamma \in \Gamma$, содержащая их прямую сумму. Наделяя прямую сумму топологиями τ_φ и $\tau_{\{\varphi\}}$ и объявляя ее открытой подгруппой, мы тем самым распространим на G конструкции из пп. 1.1 и 1.2. Более того, на G легко переносятся все результаты этого параграфа с единственной поправкой: в предложении п. 1.5 равенство $\tau = \tau_\varphi$ заменяется неравенством $\tau \leqslant \tau_\varphi$.

1.8. З а м е ч а н и е. Если в качестве $\{G_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ взять бесконечное семейство циклических групп попарно различных простых порядков, а в качестве G, как и ранее, их прямую сумму, то получим коммутативный вариант предложения и следствия из п. 1.5: для каждой недискретной линейной топологии τ на G найдется такой фильтр φ на Γ, что $\tau = \tau_\varphi$. Следовательно, каждая топология на G, максимальная в классе недискретных линейных топологий, полна.

2. Пример полной максимальной группы. Пусть G — счетная группа периода 2.

2.1. Лемма. *Пусть τ — недискретная линейная метризуемая (сокращенно н. л. м.) топология на G, φ — несходящийся фундаментальный фильтр в (G, τ). Тогда существует н. л. м. топология $\tau' > \tau$ такая, что каждый фильтр $\varphi' \geqslant \varphi$ не будет фундаментальным в (G, τ').*

Доказательство. Вначале заметим, что фильтр в топологической группе будет фундаментальным тогда и только тогда, когда каждая окрестность единицы при подходящем сдвиге попадает в этот фильтр. Поэтому достаточно построить в (G, τ) недискретную подгруппу H такую, что для каждого $g \in G$ $G \diagdown (g + H) \in \varphi$, и объявить H открытой подгруппой.

Пусть $\{U_n \mid n < \omega\}$ — база окрестностей нуля (G, τ), $\{g_n \mid n < \omega\}$ — пересчет G. Выберем окрестность $V_0 \subseteq U_0$ нуля такую, что $G \diagdown (g_0 + V_0 + V_0) \in \varphi$ и ненулевой $a_0 \in V_0$. Далее выберем окрестность $V_1 \subseteq U_1$ нуля такую, что $V_1 + V_1 \subseteq V_0$, $G \diagdown (g_1 + \langle a_0 \rangle + V_1 + V_1) \in \varphi$ и ненулевой $a_1 \in V_1$. Далее выберем окрестность $V_2 \subseteq U_2$ нуля такую, что $V_2 + V_2 \subseteq V_1$, $G \diagdown (g_2 + \langle a_0, a_1 \rangle + V_2 + V_2) \in \varphi$ и ненулевой $a_2 \in V_2$. Продолжая этот процесс, мы и построим требуемую подгруппу $H = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$.

Нам понадобится один дополнительный теоретико-множественный принцип — лемма Буса LB. Это принцип — одно из важнейших следствий аксиомы Мартина. LB утверждает, что каждый фильтр на счетном множестве с базой мощности $< 2^\omega$ усиливается до последовательности.

2.2. Пример (LB). Мы будем строить возрастающую 2^ω-последовательность н. л. м. топологий на G.

Пусть $\{X_\theta \mid \theta < 2^\omega\}$ — пересчет всех подмножеств G. Зафиксируем $\theta < 2^\omega$ и предположим, что для каждого $\xi < \theta$ уже построена н. л. м. топология τ_ξ и сделан пересчет $\{\varphi_{(\xi,\eta)} \mid \eta < 2^\omega\}$ несходящихся фундаментальных фильтров в (G, τ_ξ) со счетной базой.

Если θ — предельный ординал, то положим $\tau_\theta^1 = \sup\{\tau_\xi \mid \xi < \theta\}$. Используя LB, усилим топологию τ_θ^1 до н. л. м. топологии τ_θ. Пусть $\{a_n \mid n < \omega\}$ — нетривиальная сходящаяся к нулю последовательность в (G, τ_θ^1). Топология τ_θ, базу окрестностей нуля которой образуют подгруппы вида $\langle a_n, a_{n+1}, \ldots \rangle$ будет н. л. м. и тоньше τ_θ^1.

Пусть $\theta = \xi^+$ для некоторого $\xi < \theta$. Усилим τ_ξ, если это возможно, до недискретной метризуемой топологии τ_θ^1 такой, что X_ξ будет окрестностью нуля в (G, τ_θ^1). Так как G — группа периода 2, то топологию τ_θ^1 можно усилить до н. л. м. топологии. Будем считать, что сама τ_θ^1 является н. л. м. топологией. Если же этого нельзя сделать, то положим $\tau_\theta^1 = \tau_\xi$. Затем τ_θ^1 с помощью леммы п. 2.1 усилим до н. л. м. топологии τ_θ^2 такой, что каждый фильтр $\varphi \geqslant \varphi_{p_\xi}$, где $\{p_\eta \mid \eta < 2^\omega\}$ — естественный пересчет канторового квадрата $2^\omega \times 2^\omega$, не будет фундаментальным в (G, τ_θ^2), и положим $\tau_\theta = \tau_\theta^2$. Сразу после построения τ_θ сделаем пересчет $\{\varphi_{(\theta,\eta)} \mid \eta < 2^\omega\}$ несходящихся фундаментальных фильтров в (G, τ_θ) со счетной базой.

Наконец, положим $\tau^* = \sup\{\tau_\theta \mid \theta < 2^\omega\}$ и докажем, что (G, τ^*) — полная максимальная группа.

Предположим, что существует недискретная топология $\tau > \tau^*$. Тогда для некоторого $\xi < 2^\omega$ X_ξ будет окрестностью нуля в τ, но не будет окрестностью нуля в τ^*. Но тогда X_ξ будет окрестностью нуля в $\tau_{\xi^+} < \tau^*$, чего быть не может.

Выясним вопрос о полноте. Пусть ψ — произвольный фундаментальный фильтр в (G, τ^*). Предположим, что он не сходится. Тогда для некоторого $\xi < 2^\omega$ он не будет сходиться и в (G, τ_ξ). Так как топология τ_ξ метризуема, то фильтр ψ ослабляется до некоторого несходящегося фундаментального фильтра φ в (G, τ_ξ) со счетной базой. И тогда для некоторого θ такого, что $\xi < \theta < 2^\omega$, каждый фильтр $\varphi' \geqslant \varphi$ не будет фундаментальным в (G, τ_θ). В частности, в (G, τ_θ) не будет фундаментальным фильтр ψ. Но тогда ψ не будет фундаментальным и в (G, τ^*) вопреки предположению.

2.3. Замечание. *Можно доказать, что построенная в примере п. 2.2 топология τ^* на самом деле даже супермаксимальна, т. е. в группе (G, τ^*) есть только один свободный сходящийся к нулю ультрафильтр, в частности, τ' экстремально несвязна.*

2.4. Замечание. В предположении CH можно доказать, что каждая бесконечная абелева группа допускает полную максимальную топологию. Этот результат распространяется также и на произвольную счетную группу, конечно же, при условии, что она топологизируема.

3. Пример неполной максимальной группы. Как и в предыдущем пункте, пусть G — счетная группа периода 2.

3.1. Лемма. *Пусть τ — н. л. м. топология на G, φ — фильтр на G со счетной базой, фундаментальный в τ и не усиливающийся до фундаментального в некоторой метризуемой топологии τ'. Тогда на G существует н. л. м. топология $\tau'' \geqslant \tau$ и фильтр $\psi \geqslant \varphi$ со счетной базой такие, что ψ фундаментальный в τ'', а τ'' дополняема к τ', т. е.* $\sup\{\tau', \tau''\} = \tau_d$, *где τ_d — дискретная топология.*

Доказательство. Вначале покажем, что найдется окрестность V нуля в τ' такая, что каждое $F \in \varphi$ V-неограничено, т. е. любой элемент фильтра не покрывается конечным числом сдвигов V. Допустим противное и усилим φ до какого-то ультрафильтра u. По условию произвольная окрестность нуля в τ' конечным числом сдвигов покрывает некоторый элемент φ. Значит, некоторый сдвиг этой окрестности принадлежит u. А значит, u фундаментальный в τ' — противоречие.

А теперь собственно доказательство леммы. Построим подгруппу H из G, дискретную в τ' и нетривиально пересекающую каждый элемент φ.

Пусть V — окрестность нуля в τ' такая, что каждое $F \in \varphi$ V-неограничено, $\{F_n \mid n < \omega\}$ — база φ. Предположим, что мы уже выбрали $a_0 \in F_0, \ldots, a_n \in F_n$ так, что группа $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ V-дискретна, т. е. $\langle a_0, \ldots$ $\ldots, a_n\rangle \cap V = \{0\}$. Выберем $a_{n+1} \in F_{n+1} \setminus (\langle a_0, \ldots, a_n\rangle + V)$. Тогда V-дискретной будет и группа $\langle a_0, \ldots, a_{n+1}\rangle$. Продолжая этот процесс, мы и построим требуемую подгруппу $H = \langle a_0, \ldots, a_n, \ldots\rangle$.

В качестве τ'' возьмем топологию на G, базу окрестностей нуля в которой образуют множества вида $H \cap U$, где U — окрестность нуля в τ, а в качестве ψ — фильтр, базу которого образуют множества вида $H \cap F$, где $F \in \varphi$.

3.2. Лемма. *Пусть τ — недискретная метризуемая топология на G, φ — несходящийся фундаментальный в τ фильтр на G со счетной базой. Тогда существует н. л. м. топология $\tau' \geqslant \tau$ и фильтр $\varphi' \geqslant \varphi$ со счетной базой, фундаментальный в τ'.*

Доказательство. Пусть $\{U_n \mid n < \omega\}$ — база окрестностей нуля в τ такая, что $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$, а $\{F_n \mid n < \omega\}$ — база φ такая, что $F_n \supseteq$ $\supseteq F_{n+1}$ и $F_n + F_n \subseteq U_{n+2}$. В каждом F_n выберем $a_n \in F_n$. В качестве φ' возьмем фильтр, базу которого образуют множества вида $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, а в качестве τ' возьмем топологию, базу окрестностей нуля в которой образуют множества вида $\langle A_n + A_n\rangle$. Ясно, что фильтр φ' со счетной базой и фундаментальный в τ', а τ' н. л. м. и так как $\langle A_n + A_n\rangle \subseteq U_n$, то $\tau' \geqslant \tau$.

3.3. Пример (LB). Пусть $\{X_\theta \mid \theta < 2^\omega\}$ — пересчет всех подмножеств G, τ_0 — какая-то н. л. м. топология на G, φ_0 — фильтр на G со счетной базой, несходящийся фундаментальный в τ_0, $\tau_{(0,\eta)} = \tau_d$, $\eta < 2^\omega$.

Зафиксируем $\theta > 2^\omega$ и предположим, что для каждого $\xi < \theta$ на G уже определены н. л. м. топология τ_ξ, фильтр φ_ξ со счетной базой, фундаментальный в τ_ξ и топологии $\tau_{(\xi,\eta)}$, $\eta < 2^\omega$, причем в $\tau_{(\xi,\eta)}$ фильтр φ_ξ не усиливается до фундаментального, кроме того, $\tau_\alpha \leqslant \tau_\beta$, $\varphi_\alpha \leqslant \varphi_\beta$, если $\alpha \leqslant \beta < \theta$.

Если θ — предельный ординал, то положим $\tau_\theta = \sup\{\tau_\xi \mid \xi < \theta\}$, $\varphi_\theta =$ $= \sup\{\varphi_\xi \mid \xi < \theta\}$. Используя LB, легко добиться, чтобы τ_θ была н. л. м., а φ_θ был со счетной базой.

Пусть $\theta=\xi^+$ для некоторого $\xi<\theta$, $\{p_\eta \mid \eta<2^\omega\}$ — естественный пересчет канторового квадрата $2^\omega \times 2^\omega$. С помощью леммы п. 3.1 усилим τ_ξ до н. л. м. топологии τ'_ξ, дополняемой к τ_{p_ξ}, а φ_ξ до фильтра φ'_ξ со счетной базой, фундаментального в τ'_ξ. Возможны две ситуации:

а) существуют топология $\tau\geqslant\tau'_\xi$ и фильтр $\varphi\geqslant\varphi'_\xi$ такие, что X_ξ будет окрестностью нуля в τ, а φ — фундаментальным в τ;

б) в каждой топологии $\tau\geqslant\tau'_\xi$ такой, что X_ξ будет окрестностью нуля в τ, фильтр φ'_ξ не усиливается до фундаментального.

Если имеет место первый случай, то полагаем $\tau_\theta=\tau$, $\varphi_\theta=\varphi$, $\tau_{(\theta,\eta)}=\tau_d$, $\eta<2^\omega$. Можно считать, что τ н. л. м., а φ со счетной базой (лемма п. 3.2!). Если же имеет место второй случай, то пусть $\tau_\theta=\tau'_\xi$, $\varphi_\theta=\varphi'_\xi$, а $\tau_{(\theta,\eta)}$, $\eta<2^\omega$, — это все метризуемые топологии, мажорирующие τ'_ξ, в которых X_ξ будет окрестностью нуля.

Наконец, положим $\tau^*=\sup\{\tau_\theta \mid \theta<2^\omega\}$, $\varphi^*=\sup\{\varphi_\theta \mid \theta<2^\omega\}$ и докажем, что τ^* — максимальная топология на G, а φ^* — несходящийся фундаментальный фильтр в (G,τ^*).

Если бы φ^* сходится в τ^*, то он бы сходился и в $\tau_0<\tau^*$. Но тогда в τ_0 сходился бы и $\varphi_0<\varphi^*$. Столь же просто доказывается и фундаментальность φ^* в τ^*.

Выясним вопрос о максимальности τ^*. Допустим, что существует недискретная топология $\tau>\tau^*$. Значит, для некоторого $\xi<2^\omega$ X_ξ будет окрестностью нуля в τ, но не будет окрестностью нуля в τ^*. Рассмотрим ξ^+-й шаг данного процесса. Если имеет место случай а), то X_ξ будет окрестностью нуля в $\tau_{\xi^+}<\tau^*$, чего быть не может. Если же имеет место случай б), то для некоторого $\eta<2^\omega$ $\tau_{(\xi^+,\eta)}<\tau$, чего также быть не может. В самом деле, ведь тогда для некоторого $\theta<2^\omega$ τ_θ будет дополняемой к $\tau_{(\xi^+,\eta)}$. Тем более дополняемой к $\tau_{(\xi^+,\eta)}$ будет τ^*. И тем более дополняемой к $\tau_{(\xi^+,\eta)}$ будет τ — противоречие с неравенством $\tau_{(\xi^+,\eta)}<\tau$.

Получено 21.02.90